·高等学校辅导教材·

同济高等数学（五版）习题选解 是非题题解·综合题题解

新编高等数学题解

（上册） （第四版）

王东升 周泰文 主 编

王东升 周泰文 刘后邦 俞 政 编

华中科技大学出版社

http://press.hust.edu.cn

高等学校辅导教材

新编高等数学题解

（第四版）

（上册）

同济高等数学（五版）习题选解

是非题题解·综合题题解

王东生　周泰文　主编

王东生　周泰文　刘后邦　俞　政　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学题解(第四版)(上册)/王东生　周泰文　主编
武汉:华中科技大学出版社,2004年4月
ISBN 7-5609-3118-9

Ⅰ.新…
Ⅱ.①王…　②周…　③刘…　④俞…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O13

新编高等数学题解(第四版)(上册)　王东生　周泰文　主编

责任编辑:李立鹏　杨志锋　　封面设计:柳思思
责任校对:吴　晗　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　　电话:(027)87557436

录　排:华中科技大学出版社照排室
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　　印张:14.375　　字数:346 000
版次:2004年4月第4版　　印次:2004年4月第15次印刷　　定价:17.80元
ISBN 7-5609-3118-9/O・311

内容简介

本书是理工科学生学习高等数学、备考以及教师教学的参考书.每章的“内容提要”系统简明,“习题选解”清晰典型,“是非题题解”引人深钻教材,“综合题题解”呈现研考水平.

本书分上、下两册出版.上册内容有:函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分应用、空间解析几何与向量代数.

第四版前言

本书以同济大学主编的《高等数学》(第五版)为蓝本,帮助学习高等数学的学生更好地掌握教材,以达到考研高中的水平.

本书自1994年出版第一版以来,共发行30多万册.继1996年被全国大学出版社协会评为畅销书并授予荣誉奖以后,2000年12月又被评为"全国优秀畅销书".

由于同济大学主编的《高等数学》教材已修订至第五版,因而本书再次做相应修订.本版的特点是:

1. 原版结构基本不变;

2. 内容编排与同济大学主编的第五版教材一致;

3. 既辅导学生掌握教材,学会解答高等数学习题,又留给他们发挥才智、自我钻研的空间;

4. 反映了最新的考研动态和要求,收录近5年考研数学1、2的试题,并全部编入本书相应章节中.

这次改编仍由王东生、周泰文、刘后邗、俞政合作,按原来的分工完成.

编　者

2004年1月

目　　录

第一章　函数与极限

一、内 容 提 要

1. 集合及其运算

(1) 集合　是指具有某种特性的事物的总体.组成此集合的每个事物称为此集合的**元素**.

表示集合用由枚举法或描述法:

1° 枚举法　若集合 A 由 n 个或可数个元素 a_i 组成,则记成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\quad 或\quad A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

2° 描述法　若集合 B 由具有性质 P 的元素 α 组成,则记成

$$B=\{\alpha|\alpha 具有性质 P\}.$$

集合 A 与其**子集** B 的关系可表为 $B\subset A$;

集合 A 与其**真子集** B 的关系可表为 $B\subsetneqq A$.

空集$\varnothing$可看成任一集合的子集.

(2) 运算　基本运算有并、交、差.

并集　$A\cup B\triangleq$[①]$\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$;

交集　$A\cap B\triangleq\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$;

差集　$A\backslash B\triangleq\{x|x\in A$ 且 $x\overline{\in} B\}$;

余集或补集　$A^c\triangleq\{x|x\in I$(全集)且 $x\overline{\in} A\}=I\backslash A$.

关于并、交、余的运算有下列法则:

1° 交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

---

① 符号"$\triangleq$"表示"规定为".

2° 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

3° 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

4° 对偶律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

2. 映射

(1) 定义　设 X,Y 是两个非空集合，若法则 f 使每一 $x\in X$ 都有唯一确定的 $f(x)=y\in Y$，则称法则 f 为从 X 到 Y 的一个**映射**，X 称为此映射的**定义域**，常记成 $D_f=X$；集合

$$R_f=\{y\mid y=f(x),x\in X\} \qquad (*)$$

称为此映射的**值域**，$R_f\subset Y$ 或 $R_f\subsetneq Y$.

$(*)$式中的 x 称为**原像**，y 称为 x 的**像**，于是映射的定义域即是原像集 x；值域即是像集 R_f，有时也用 $f(x)$表示，即 $f(x)\triangleq R_f$.

(2) 单射、满射、双射

设 f 是从 X 到 Y 的一个映射，若 f 使不同的原像有不同的像，则称此 f 为**单射**；若 f 使 $R_f=Y$，则称此 f 为**满射**；若 f 既是单射，又是满射，则称此 f 为**双射**，或**一一映射**.

(3) 逆映射与复合映射

若 f 是从 X 到 Y 的单射，则$\forall\ y\in R_f$，都有唯一确定的 x，使得 $f(x)=y$，即存在一个从 R_f 到 X 的映射 g，使得 $g(y)=x$，称 g 为 f 的**逆映射**，记成 $g=f^{-1}$，于是有

$$f^{-1}(y)=x \quad 或 \quad f[f^{-1}(y)]=y.$$

若 g 是从 X 到 y_1 的映射，而 $O_1\subset O_2$，f 是从 y_2 到 Z 的映射，则$\forall\ z\in X$，必有唯一确定的 $g(x)=y\in O_1\subset O_2$ 与 x 对应，从而必有唯一确定的 $f(y)=z\in Z$ 与 x 对应，因而必存在从 X 到 Z 的一个映射，称此映射为由 g 与 f 复合而成的**复合映射**，记成 $f\circ g$，于是有

$$\forall\ x\in X,\quad (f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(y)=z\in Z.$$

3. 函数

(1) 基本概念

设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则从 D 到 $\mathbf{R}$ 的映射 f 称为定义在 D 上的**函数**，记成

$$y = f(x),\quad x \in D.$$

上式中，x、y 分别称为**自变量**和**因变量**；f 是函数，$f(x)$是与 x 对应的**函数值**；D 称为**定义域**，即 $D_f = D$，数集

$$R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为此函数的**值域**. 点集

$$M = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为此函数的**图形**.

按以上的定义，函数是从数集 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的一个映射的法则 f，$f(x)$是唯一确定的，是单值的. 因此说，函数的对应法则都是单值的.

有时，一个对应法则确定的值不唯一. 例如：

由 $x^2+y^2=1$ 得到法则 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$，此处，同一自变量 x，可得到两个 y 值. 此时，若划分值域的区间为$[-1,0)$与$[0,1]$，在这两个区间上，分别得到 $y=-\sqrt{1-x^2}$，$y=\sqrt{1-x^2}$都是单值的.

这种对于一个自变量，结果不唯一的对应法则，称为**多值函数**. 这种情形，总要划分值域区间，使得在每个区间内，函数值唯一确定，再按照映射意义下的函数来研究它们.

(2) 反函数与复合函数

1° 反函数　设函数 $f: D \to f(D)$是单射，则称其逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$ 为其**反函数**，此时 f 与 f^{-1}互为反函数，若将其中的一个称为**直接函数**，另一个就是它的反函数.

互反的两个函数的定义域和值域正好互换.

在同一坐标系中，$x=f^{-1}(y)$与 $y=f(x)$的图形相同，而 $y=f^{-1}(x)$与 $y=f(x)$的图形关于 $y=x$ 对称.

2° 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$的定义域为 D_g，值域为 R_g，若 $R_g \subset D_f$，则函数

$$y = f[g(x)],\quad x \in D_g$$

称为由函数 $u=g(x)$与函数 $y=f(u)$复合而成的**复合函数**，记成

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

其定义域为 D_g，称 u 为**中间变量**.

(3) 几种特殊的函数

1° 有界函数　设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，若存在正数 M，当 $x\in X$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**；若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

2° 单调函数　设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有定义，若对于任意的 x_1、$x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上是**单调增（减）函数**.

3° 奇（偶）函数　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-a,a]$，若对于任意的 $x\in[-a,a]$，恒有 $f(-x)=-f(x)$ $(f(-x)=f(x))$，则称 $f(x)$ 为**奇（偶）函数**.

4° 周期函数　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个正数 l，对于任意的 $x\in D$，且 $x\pm l\in D$，恒有 $f(x\pm l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为以 l 为周期的**周期函数**. 通常说的周期函数的周期，指的是上述 l 的最小值.

(4) 初等函数

1° **基本初等函数**是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的统称.

2° 初等函数　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

4. 极限

(1) 数列的极限

$$\lim_{n\to\infty}u_n = A \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \forall\ \varepsilon>0, & \exists \text{自然数 } N \\ \text{只要 } n>N, & \text{就有 } |u_n-A|<\varepsilon \end{bmatrix}.$$

(2) 函数的极限

$$\lim_{x\to\infty}f(x) = A \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \forall\ \varepsilon>0, & \exists X>0 \\ \text{只要 } |x|>X, & \text{就有 } |f(x)-A|<\varepsilon \end{bmatrix}.$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x) = A$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \forall\ \varepsilon>0, & \exists\ \delta>0 \\ \text{只要 } 0<|x-x_0|<\delta, & \text{就有 } |f(x)-A|<\varepsilon \end{bmatrix}.$$

$\begin{matrix}\text{左}\\\text{右}\end{matrix}$极限 $f(x_0\mp 0)\triangleq\lim\limits_{x\to x_0\mp 0}f(x)=A$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \forall\, \varepsilon > 0, & \exists\, \delta > 0 \\ \text{只要 } 0 < \begin{matrix} x_0 - x \\ x - x_0 \end{matrix} < \delta, & \text{就有 } |f(x) - A| < \varepsilon \end{bmatrix}.$$

(3) 无穷小与无穷大

1° $\alpha(x)$为某过程中的无穷小$\Longleftrightarrow \lim \alpha(x) = 0$；

0 是唯一可作为无穷小的数；

$\lim$(有界变量·无穷小)$=0$.

2° $f(x)$为某过程中的无穷大$\Longleftrightarrow \lim f(x) = \infty(+\infty, -\infty)$；如

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \forall\, M>0, & \exists\, \delta>0 \\ \text{只要 } 0<|x-x_0|<\delta, & \text{就有 } f(x)<-M \end{bmatrix};$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \forall\, M>0, & \exists\, X>0 \\ \text{只要 } x>X, & \text{就有 } |f(x)|>M \end{bmatrix}.$$

在同一过程中，非 0 无穷小与无穷大互倒.

3° 无穷小的比较　设$\lim \alpha = 0$，$\lim \beta = 0$(此处，α与β分别为$\alpha(x)$、$\beta(x)$的简写).

若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则称$\beta$**是比**$\alpha$**高阶的无穷小**，记作$\beta = o(\alpha)$；

若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称$\beta$**是比**$\alpha$**低阶的无穷小**；

若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，则称$\beta$**与**$\alpha$**是同阶无穷小**. 特别地，当$c=1$时，称$\beta$**与**$\alpha$**是等价无穷小**，记作$\beta \sim \alpha$；

若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0 (k>0)$，则称$\beta$为$\alpha$的$k$阶无穷小；

4° 常用的等价无穷小　当$x \to 0$时，

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$；

$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$；$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$.

若$\beta - \alpha = o(\beta)$，则称$\alpha$**是**$\beta$**的主部**.

两个无穷小互为主部的充要条件是它们等价.

(4) 性质

1° 唯一性　变量若有极限，则极限唯一.

2° 有界性　有极限的变量必有界.

3° 保号性

(1°) 某时刻后 $f(x)\geqslant 0$(或$\leqslant 0$)$\Rightarrow \lim f(x)\geqslant 0$(或$\leqslant 0$);

(2°) $\lim f(x)>0$(或<0)$\Rightarrow$某时刻以后 $f(x)>0$(或<0);

(3°) 某时刻以后 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)\Rightarrow\lim\varphi(x)\geqslant\lim\psi(x)$.

4° 充要条件

(1°) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$;

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$;

(2°) $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$(此处$\lim\alpha=0$).

5° 函数极限与数列极限的关系　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,若在 $f(x)$的定义域内取值的任一数列$\{x_n\}\to x_0$,且 $x_n\neq x_0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

(5) 运算法则

1° 有限个有极限的变量之和(积)的极限等于各自极限之和(积).

2° 两个有极限的变量之差(商)的极限等于各自极限之差(商,但分母的极限为 0 时除外).

3° 求两个无穷小之比的极限时,分子、分母的因子可用其等价无穷小来代替.

4° 两个准则　单调有界的变量必有极限的准则;夹逼准则.

5° 两个重要极限　若 α 为某个过程中的无穷小,则

(1°) $\lim\limits_{\text{某过程}}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$;　(2°) $\lim\limits_{\text{某过程}}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$.

5. 连续

(1) $f(x)$在点 x_0 处连续

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\forall\ \varepsilon>0, & \exists\ \delta>0,\\ \text{只要}\ |x-x_0|<\delta, & \text{就有}\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\end{array}\right].$$

$f(x)$在点 x_0 处$\dfrac{\text{左}}{\text{右}}$连续$\Leftrightarrow\dfrac{f(x_0-0)}{f(x_0+0)}=f(x_0)$.

$f(x)$在点 x_0 处连续$\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

* $f(x)$在区间 I 上一致连续

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\forall\ \varepsilon>0, & \exists\ \delta>0,\text{对于}\forall\ x_1、x_2\in I,\\ \text{只要}\ |x_1-x_2|<\delta, & \text{就有}\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\end{array}\right].$$

(2) 设 $f(x)$在 x_0 的某去心邻域内有意义，则 $f(x)$在点 x_0 处间断$\Longleftrightarrow f(x)$在点 x_0 处不连续.

间断点的分类 ，若 x_0 为 $f(x)$的间断点：

$1°$ x_0 为**第一类间断点**$\Longleftrightarrow f(x_0-0)$与 $f(x_0+0)$均存在.

当 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$时，x_0 为**可去间断点**；

当 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$时，x_0 为**跳跃间断点**.

$2°$ x_0 为**第二类间断点**$\Longleftrightarrow f(x_0-0)$与 $f(x_0+0)$中至少有一个不存在. 无穷间断点和振荡间断点均为第二类间断点.

如果在 x_0 的某个邻域内 $f(x)$无界，则称 x_0 为 $f(x)$的**无穷间断点或瑕点**.

(3) 连续与极限的关系

$f(x)$在点 x_0 处连续，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但其逆不真.

(4) 性质

$1°$ 运算性质

有限个在某点连续的函数的代数和(或积)，仍在该点连续；

两个在某点连续的函数之商(分母在该点为零的除外)，仍在该点连续.

$2°$ 反函数、复合函数、初等函数的连续性

若 $f(x)$在区间 I_x 上单值、单调增加(或减少)且连续，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$也在对应的区间 $I_y=\{y\,|\,y=f(x),x\in I_x\}$上单值、单调增加(或减少)且连续；

设函数 $u=\varphi(x)$在点 x_0 处连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数$y=f(u)$在点 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 $x=x_0$ 处也连续；

初等函数在其定义区间内连续.

$3°$ 闭区间上连续函数的性质

最值定理　在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值；

有界定理　在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界；

介值定理　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于$f(a)$与 $f(b)$之间的任意一个数 C，必有 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$.

特别地，当 $f(a)$与 $f(b)$异号时，有

零点定理　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，则必有 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

二、习题选解

习题 1-1　映射与函数

1.1.1　设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$ 的表达式.

解　$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$，

$A\cap B=[-10,-5)$，

$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$，

$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$.

1.1.2　设 A、B、C 是任意三个集合，证明对偶律：$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

*　欲证 $A=B$，只需证 $x\in A\Rightarrow x\in B$，从而 $B\supset A$；又 $x\in B\Rightarrow x\in A$，从而 $A\supset B$，于是得 $A=B$.

证　设 $x\in(A\cap B)^c\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Rightarrow x\in A^c$ 或 $x\in B^c$，即 $x\in A^c\cup B^c$，从而 $A^c\cup B^c\supset(A\cap B)^c$；

又设 $x\in A^c\cup B^c\Rightarrow x\in A^c$ 或 $x\in B^c\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Rightarrow x\notin A\cap B$ 即 $x\in(A\cap B)^c$，从而 $(A\cap B)^c\supset A^c\cup B^c$.

由以上两方面的结论推知 $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

1.1.3　设映射 $f:X\to Y$，$A\subset X$，$B\subset X$. 证明：

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

(2) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

证　(1) 设 $y\in f(A\cup B)=\{f(x)\mid x\in A\cup B\}$，

即　$y\in\{f(x)\mid x\in A$ 或 $x\in B\}\Rightarrow y\in f(A)\cup f(B)$，

从而　$f(A)\cup f(B)\supset f(A\cup B)$；

又设 $y\in f(A)\cup f(B)=\{f(x)\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$，

即　$y\in\{f(x)\mid x\in A\cup B\}\Rightarrow y\in f(A\cup B)$，

从而　$f(A\cup B)\supset f(A)\cup f(B)$，

于是　$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.