中学生课外读物丛书

数 学 世 界

不 等 式

田根宝 李玉贞 编

上海科学技术出版社

中学生课外读物丛书

数学

不等式

田[illegible]宝 李玉贞 编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　[illegible]报印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张4.25　字数90,000

1990年8月第1版　1990年8月第1次印刷

印数：1—7,100

ISBN 7-5323-1428-6/G·206

定价：1.35元

编辑出版说明

本《丛书》是一套为广大中学生提供的课外读物。第一批先编辑出版数学、物理、化学三门学科的分册，目的为了引导学生开发思维，拓广知识视野，充实数、理、化各门科学本身的知识及这些知识在实际中的应用。但所涉及的基本知识不超过全日制中学数、理、化教学大纲所规定的范围。

本《丛书》的特点是知识性与趣味性相结合。注意揭示数、理、化知识本身内在的联系与规律；重视联系实际应用，联系邻近学科，使学生学到的知识能融会贯通；同时适当介绍学科领域里的新进展，以帮助学生开阔眼界。

本《丛书》的体例不拘泥于章节编排，而以专题篇目的面貌出现。各篇内容既有相对联系的系统性，又有相对的独立性，既体现生动活泼，又注意科学严谨。适合于广大初、高中学生阅读。

在本《丛书》编写过程中，曾得到了上海市教育局教研室有关同志的热忱指教与协助，在此致以衷心的谢意。

由于编写出版时间仓促，《丛书》中的缺点及不当之处、在所难免，欢迎广大读者提出批评指正。

编者的话

本书是以中学的数学教学大纲为基准，为提高学生学习不等式的兴趣和知识水准，引导学生开发思维，拓广知识视野而编写的。一方面以大量带有知识性和趣味性的例题来总结、概括求解不等式和证明不等式的常用方法，另一方面补充一些必要的，且重要的不等式，为今后进一步学习打下良好的基础。

本书的每一章节后面都配有习题，并在书末附有答案。

本书中打上＊号的章节可作为中学生的数学课外兴趣小组活动的内容。

上海铁道学院朱学炎教授审阅了本书全稿，谨致谢意。

田根宝、李玉貞

1988年6月

目　录

〔一〕

解不等式

1 同解不等式

我们在解不等式时经常会遇到解集的问题，常见的解集是以区间的形式出现。这里，首先给出集合的概念，然后再给出不等式解集的定义。

集合：被研究对象的全体称为集合（简称集）。记作{ }或字母A，B，C等。区间$a<x<b$，$a\leqslant x<b$，$a<x\leqslant b$，$a\leqslant x\leqslant b$等都是集合的一种特殊表现形式。集合中的对象称为集合的元素（简称元）。若c是集合A的元素，记作$c\in A$（记号"$\in$"读作"属于"）。若c不是集合A的元素，记作$c\,\overline{\in}\,A$或$c\notin A$（记号"$\overline{\in}$"或"$\notin$"都读作"不属于"）。

设函数$f(x)$和$g(x)$为定义在同一集合A上的两个函数，若存在某一集合X，在此集合上，对一切x均有

$$f(x)>g(x)\qquad（或f(x)\geqslant g(x)）\qquad（1）$$

或

$$f(x)<g(x)\qquad（或f(x)\leqslant g(x)）\qquad（2）$$

成立，则称A为函数$f(x)$和$g(x)$的未知量x的取值范围，而称集合X为给定不等式（1）或（2）的解集合（或简称解集）。并称求解集X的过程为解不等式。

如果两个不等式的解集完全一致，即如果它们中的任一不等式的一切解都是另一不等式的一切解，则称此两不等式是同解的，并称这两不等式为同解不等式。否则，称为不是（或非）同解不等式。

譬如：$3x-5>x+1$ 与 $2x>6$ 就是两个同解不等式。而 $\frac{x}{x-1}>1$ 与 $x>x-1$ 就不是同解不等式。

通常在解不等式时，使用容易求出解集的同解不等式进行替换，从而使问题得到简化。然而，这样的替换是以下列定理为基础的。

定理1 若函数 $\omega(x)$ 与函数 $f(x)$、$g(x)$ 在同一集合 A 上有定义，则不等式

$$f(x)\vee g(x)$$

与

$$f(x)+\omega(x)\vee g(x)+\omega(x)$$

是同解不等式（其中记号“$\vee$”表示“$>$”、“$\geqslant$”、“$<$”、“$\leqslant$”之一）。

定理2 若函数 $\omega(x)$ 与函数 $f(x)$、$g(x)$ 在同一集合 A 上有定义，且 $\omega(x)$ 是正值函数（$\omega(x)>0$），则不等式

$$f(x)\vee g(x)$$

与

$$f(x)\omega(x)\vee g(x)\omega(x)$$

是同解不等式。

定理3 若函数 $\omega(x)$ 与函数 $f(x)$、$g(x)$ 在同一集合 A 上有定义，且 $\omega(x)$ 是负值函数（$\omega(x)<0$），则不等式

$$f(x)\vee g(x)$$

与

$$f(x)\omega(x)\wedge g(x)\omega(x)$$

是同解不等式（其中记号“$\wedge$”表示记号“$\vee$”的相反记号。若“$\vee$”是“$>$”，则“$\wedge$”是“$<$”；若“$\vee$”是“$<$”，则“$\wedge$”是“$>$”）。

定理4 若在集合A上有$f(x)>g(x)$成立，则

$$f(x)>g(x)\Longleftrightarrow g(x)<f(x)。$$

例 判断下列不等式在实数集中是否为同解不等式：

1） $x^2<-1$和$-(5x^4+3)>0$；

2） $x>0$和$x^2>0$；

3） $x-3>2$和$x-3+\frac{1}{x-7}>2+\frac{1}{x-7}$；

4） $x-3>2$和$(x-3)(x+1)^2>2(x+1)^2$。

解 1） 是同解不等式。这是因为$-(5x^4+3)>0$与$5x^4+3<0$，$x^4<-\frac{3}{5}$是同解不等式（根据定理3、定理1和定理2）。又因$x^4\geqslant 0$是非负的，而x^2也是非负的。故$x^4<-\frac{3}{5}$和$x^2<-1$都是对一切实数x不成立。因而它们是同解不等式。

2） 不是（或非）同解不等式。这是因为$x>0$表示x为一切正数，而$x^2>0$除了x是一切正数以外，一切负数也成立。所以$x>0$与$x^2>0$并不是同解不等式。

3） 不是同解不等式。这是因为$x-3>2$的解集是$x>5$必包含$x=7$，然而当在不等式$x-3>2$的两边加上$\frac{1}{x-7}$就不是同解不等式了。因为后一不等式的解集中除去$x=7$。它们之所以造成不是同解不等式的关键是加上$\omega(x)=\frac{1}{x-7}$，不满足定理1的条件。

4） 是同解不等式。这是因为$x-3>2$与$(x-3)(x+1)^2>2(x+1)^2$的解集完全一致，都是$x>5$。故它们是同解不等式。或利用定理2，$\omega(x)=(x+1)^2>0$ $(x\neq-1)$。有$(x-3)(x+1)^2>2(x+1)^2$与$x-3>2$是同解不等式。

习题一．1

判断下列不等式在实数集中是否为同解不等式？

1． $5x\leqslant0$ 和 $5x+\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$。

2． $x-3>2$ 和 $(x-3)(x-1)>2(x-1)$。

3． $-x^2-5x+6<0$ 和 $x^2+5x-6<0$。

4． $\dfrac{1}{x-3}>2$ 和 $\dfrac{1-2(x-3)}{x-3}>0$。

5． $\dfrac{1}{x-3}>2$ 和 $1>2(x-3)$。

6． $\dfrac{x-2}{5-x}>0$ 和 $(x-2)(5-x)>0$。

7． $\dfrac{1}{(x+5)^2}>\dfrac{1}{(x+1)^2}$ 和 $(x+5)^2<(x+1)^2$。

8． $-x>3$ 和 $-x^3>3x^2$。

9． $\dfrac{1}{2}x<7$ 和 $\dfrac{1}{4}x^2<49$。

2 一元一次不等式

所谓一元一次不等式就是含有一个未知量，且它的次数

是一的不等式。譬如：

$$3x-2>1;\ 2x>1;\ 4x-1<2x+1$$

等都是一元一次不等式。特别称

$$ax\vee b \qquad (1)$$

为一元一次不等式的标准形。

(1)的解集：当$a>0$时，$x\vee\frac{b}{a}$；

当$a<0$时，$x\wedge\frac{b}{a}$；

当$a=0$时，根据给定不等式$0\cdot x\vee b$判定。

例如：不等式$ax>b$。

当$a=0$，$b<0$时，则解集为一切实数。

当$a=0$，$b\geqslant 0$时，无解。

解一元一次不等式的方法：

1） 代数法：利用定理（或性质）化为同解的标准形。然后根据标准形得出解集。

2） 图解法：作出函数$y=a_1x+b_1$与$y=a_2x+b_2$的直线，从图中找出它的解集。

例1 解不等式$3x-2>1$。

解 方法一：代数法：

$\because\ 3x-2>1$，

$\therefore 3x-2+2>1+2$，

即$3x>3$。

$\therefore\ x>1$为原不等式的解集。

方法二：图解法：见图1.1。

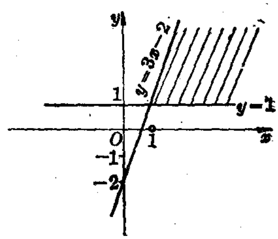

图 1.1

解集为$x>1$。

例2 解不等式

$$2kx-2x>3 \qquad (k\neq 1).$$

解 ∵ $2(k-1)x>3$，∴ $(k-1)x>\dfrac{3}{2}$（标准形）。

∵$k\neq 1$（已知），∴原不等式的解集为：

当$k>1$时，$x>\dfrac{3}{2(k-1)}$；

当$k<1$时，$x<\dfrac{3}{2(k-1)}$。

例3 解不等式

$$ax+b^2>bx+a^2.$$

解 ∵$(a-b)x>a^2-b^2$（标准形），

∴ 当$a>b$时，$x>\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$；

当$a<b$时，$x<\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$；

当$a=b$时，$0\cdot x>0$无解。

例4 解不等式

$$(a^2+a+1)x-(2+a)x>5a+3a.$$

解 ∵ $(a^2-1)x>8a$，

∴ 当$a^2-1>0$，即$|a|>1$时，$x>\dfrac{8a}{a^2-1}$。

当$a^2-1<0$，即$|a|<1$时，$x<\dfrac{8a}{a^2-1}$；

当$a=\pm 1$时：$a=1$，则$0\cdot x>8$，无解；$a=-1$，则$0\cdot x<8$，解集为一切实数。

由例2、例3、例4看出，若不等式中含有字母（非未知量）时，特别应注意全面的讨论。否则，在解集中会失去或扩大它的一些解。

习题一．2

1．解下列不等式：

1） $5x-a>ax-4$；

2） $x-2>m-nx$；

3） $-\frac{2}{3}xm-1>-[x(m+1)+m]$；

4） $3ax+b>ax+2b$；

5） $\frac{x}{a}+\frac{b}{a^2}>\frac{2x}{a}-\frac{b}{a^2}$

6） $x+\frac{x-1}{a+1}>\frac{x+1}{a+1}-ax$；

7） 当$a>0$，$b>0$时，$\frac{ax+b}{a-b}>\frac{ax-b}{a+b}$。

2．解下列不等式，并在数轴上表示解集：

1） $2x-1>3$；　　2） $x+1>2x-1$；

3） $2x-2>4-x$。

3　一元一次不等式组

对一元一次不等式组可使用同解不等式把不等式组中的每一个不等式化为标准形，最终可得到下面不等式组中之一的形式：

1） $\begin{cases} x>m, \\ x>n. \end{cases}$　　2） $\begin{cases} x<m, \\ x<n. \end{cases}$

3） $\begin{cases} x>m, \\ x<n. \end{cases}$ 4） $\begin{cases} x<m, \\ x>n. \end{cases}$

如果$m>n$，借助数轴求出它们的交集，即不等式组的解集。

1） $\begin{cases} x>m, \\ x>n. \end{cases}$

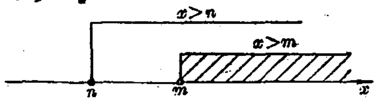

图 1.2

∴ 由图1.2得$x>m$是它们的交集。即解集为$x>m$。

2） $\begin{cases} x<m, \\ x<n. \end{cases}$

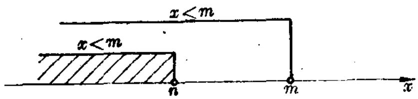

图 1.3

∴ 由图1.3得$x<n$是它们的交集。即解集为$x<n$。

3） $\begin{cases} x>m, \\ x<n. \end{cases}$

图 1.4

∴ 由图1.4得交集是空集，∴ 无解或说解集是空集。

4） $\begin{cases} x<m, \\ x>n. \end{cases}$

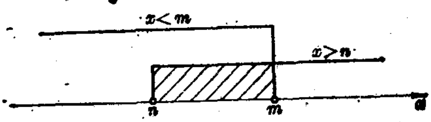

图 1.5

$\because$ 由图1.5得交集是$n<x<m$，$\therefore$ 解集是$n<x<m$。

例1 解不等式组

$$\begin{cases}5(x+1)+6(x+2)>9x+3, \\ 7x-3(2x+3)>2(x-8).\end{cases}$$

解 同解不等式组为

$$\begin{cases}11x+17>9x+3, \\ x-9>2x-16.\end{cases}$$

移项并根据第1节的定理4，得

$$\begin{cases}11x-9x>3-17 \\ 2x-x<16-9\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}2x>-14, \\ x<7.\end{cases}$$

$\therefore$

$$\begin{cases}x>-7, \\ x<7.\end{cases}$$

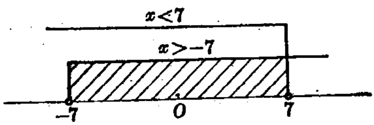

图 1.6

$\therefore$ 原不等式组的解集为$-7<x<7$（见图1.6）

例2 解不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{5-x}{4}-9<\dfrac{2x-1}{3}, \\[2ex] \dfrac{3+4x}{2}>0.3(x+2), \\[2ex] \dfrac{6-5x}{5}+\dfrac{3x-1}{2}>7-x.\end{cases}$$

解 同解不等式组为

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{5-x-36}{4}<\dfrac{2x-1}{3},\\ 3+4x>\dfrac{3}{5}(x+2),\\ \dfrac{2(6-5x)+5(3x-1)}{10}>7-x.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}3(-x-31)<4(2x-1),\\ 5(3+4x)>3(x+2),\\ 5x+7>10(7-x).\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}-3x-93<8x-4,\\ 15+20x>3x+6,\\ 5x+7>70-10x.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}11x>-89,\\ 17x>-9,\\ 15x>63.\end{array}\right.$$

$$\therefore\left\{\begin{array}{l}x>-\dfrac{89}{11},\\ x>-\dfrac{9}{17},\\ x>\dfrac{21}{5}.\end{array}\right.$$

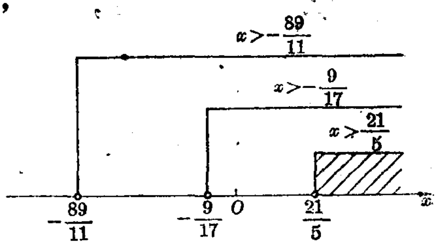

图 1.7

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $x>\dfrac{21}{5}$ （见图1．7）。

注意：若在不等式组中有非未知量的字母时，对这样的字母往往需要进行讨论才能得到正确的解集。否则，会出现失解或增解的现象。这种现象在解不等式时常会发生，希望同学们特别注意。

例3 $\left\{\begin{array}{l}(a+3)x<5a+6,\\ x>3.\end{array}\right.$

解 （1） $a+3>0$，即$a>-3$时，则有

$$\begin{cases} x<\dfrac{5a+6}{a+3}, \\ x>3. \end{cases} \qquad (*)$$

注意：这时不能随心所欲得解就是$x>3$. 因为$\dfrac{5a+6}{a+3}$只要选择适当的字母a它的值可以大于3.

为了求得当$a>-3$时的不等式组的解，有必要比较数$\dfrac{5a+6}{a+3}$与3的大小。若

$$\frac{5a+6}{a+3}>3,$$

$$\because \quad a+3>0,$$

$$\therefore \quad 5a+6>3(a+3),$$

$$5a+6>3a+9,$$

$$2a>3,$$

$$a>\frac{3}{2}.$$

因而，若 $a>\dfrac{3}{2}$时，则有$\dfrac{5a+6}{a+3}>3$. 故这时的解集是

$$3<x<\frac{5a+6}{a+3}.$$

从而，当$-3<a\leqslant\dfrac{3}{2}$时，则有$\dfrac{5a+6}{a+3}\leqslant 3$. 由此得到不等式组（$*$）为矛盾的不等式组，故无解。

（2） $a+3<0$，即$a<-3$时，则有

$$\begin{cases} x>\dfrac{5a+6}{a+3}, \\ x>3. \end{cases} \qquad (**)$$

注意：比较当$a<-3$时数$\frac{5a+6}{a+3}$与3的大小。若

$$\frac{5a+6}{a+3}>3,$$

则因为$a+3<0$，所以

$$5a+6<3(a+3),$$

$$2a<3,$$

$$a<\frac{3}{2}.$$

换句话说，只需$a<\frac{3}{2}$的一切a均有

$$\frac{5a+6}{a+3}>3.$$

成立。然而$a<-3<\frac{3}{2}$，故有上式成立。所以当$a<-3$时，此不等式组（＊＊）的解是

$$x>\frac{5a+6}{a+3}.$$

（3）$a+3=0$，即$a=-3$时，给定的原不等式组变成

$$\begin{cases} 0\cdot x<-9, \\ x>3. \end{cases}$$

是一个矛盾的不等式组，故无解。

综合以上讨论的结果，得答案：

若$a<-3$，则$x>\frac{5a+6}{a+3}$；若$a>\frac{3}{2}$，则$3<x<\frac{5a+6}{a+3}$；若$-3\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$，则无解。