



俄罗斯数学
教材选译

函数论与 泛函分析初步

(第7版)

□ A. H. 柯尔莫戈洛夫 C. B. 佛明 著
□ 段虞荣 郑洪深 郭思旭 译

0174



高等教育出版社
Higher Education Press



俄罗斯数学
教材选译

0174

12

● 数学天元基金资助项目

函数论与 泛函分析初步

(第7版)

□ A. H. 柯尔莫戈洛夫 C. B. 佛明 著

□ 段虞荣 郑洪深 郭思旭 译



高等教育出版社

Higher Education Press

图字: 01-2005-5736 号

Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций
и функционального анализа

Copyright© FIZMATLIT PUBLISHERS RUSSIA 2004

ISBN 5-9221-0266-4

The Chinese language edition is authorized by FIZMATLIT
PUBLISHERS RUSSIA for publishing and sales in the People's
Republic of China

图书在版编目 (CIP) 数据

函数论与泛函分析初步:第7版 / (俄罗斯)柯尔莫
戈洛夫, (俄罗斯)佛明著;段虞荣,郑洪深,郭思旭译.

—2版.—北京:高等教育出版社,2006.1

ISBN 7-04-018407-9

I. 函... II. ①柯...②佛...③段...④郑...⑤郭...

III. ①函数论—教材②泛函分析—教材 IV. 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 141196 号

策划编辑 张小萍 责任编辑 郭伟 封面设计 王凌波
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京中科印刷有限公司		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	1992年10月第1版
印 张	29.5		2006年1月第2版
字 数	580 000	印 次	2006年1月第1次印刷
		定 价	56.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18407-00

序

从20世纪50年代初起,在当时全面学习苏联的大背景下,国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材。这些教材体系严密,论证严谨,有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础,培养了一大批优秀的数学人才。到了60年代,国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材,但还在很大程度上保留着苏联教材的影响,同时,一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用。客观地说,从解放初一直到文化大革命前夕,苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用,起了不可忽略的影响,是功不可没的。

改革开放以来,通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材,大家眼界为之一新,并得到了很大的启发和教益。但在很长一段时间中,尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革,但引进基本中断,更没有及时地进行跟踪,能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少,事实上已造成了很大的隔膜,不能不说是一个很大的缺憾。

事情终于出现了一个转折的契机。今年初,在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上,有数学家提出,莫斯科大学为庆祝成立250周年计划推出一批优秀教材,建议将其中的一些数学教材组织翻译出版。这一建议在会上得到广泛支持,并得到高等教育出版社的高度重视。会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论,大家一致认为:在当前着力引进俄罗斯的数学教材,有助于扩大视野,开拓思路,对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要。《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下,经数学天元基金资助,由高等教育出版

社组织出版的。

经过认真选题并精心翻译校订,本系列中所列入的教材,以莫斯科大学的教材为主,也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材。有大学基础课程的教材,也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书。有些教材虽曾翻译出版,但经多次修订重版,面目已有较大变化,至今仍广泛采用、深受欢迎,反射出俄罗斯在出版经典教材方面所做的不懈努力,对我们也是一个有益的借鉴。这一教材系列的出版,将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来,对推动我国数学课程设置和教学内容的改革,对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才,可望发挥积极的作用,并起着深远的影响,无疑值得庆贺,特为之序。

李大潜

2005年10月

第 7 版序

读者现在手中拿着的第 7 版的本书,在近半个世纪的时间内,不仅为我国,也为其他许多国家的数学教育服务过。

这里还想再说一下本书的两位卓越的、富有创造性的合作者。提出把曾经在国立莫斯科罗蒙诺索夫大学数学力学系分散于许多课程的内容综合成一个课的一般设想的是安德烈·尼可拉也维奇·柯尔戈洛夫。他制订了新的课程大纲(称为“分析Ⅲ”),其中包括集论初步、度量空间、赋范空间、测度论和勒贝格积分、巴拿赫空间与希尔伯特空间中的线性算子。A. H. 柯尔莫戈洛夫曾按照这个大纲讲过几次,并且打算照他的想法编写教科书。本书的第一个版本分两册分别于 1954 年和 1960 年于莫斯科大学出版社出版,系由 A. H. 柯尔莫戈洛夫与谢尔盖·瓦西里也维奇·佛明卓越的密切合作而写成的,后者在那些年份里给物理系讲授泛函分析课。

C. B. 佛明视 A. H. 柯尔莫戈洛夫为自己的老师之一;安德烈·尼可拉也维奇则对谢尔盖·瓦西里也维奇的学识、教学水平和人品给予高度评价。他们的合作是极为富有成果的。

在 1954 年写成的第一册的序言中,作者写道:“在后续分册中应有测度论与勒贝格积分、希尔伯特空间、含对称核的积分方程理论与正交函数系(这部大纲已在第二册中实现)、非线性泛函分析初步及泛函分析方法在计算数学问题中的某些应用。”

在第 1 版出版之后的十五年里,C. B. 佛明在完善此书方面做了许多工作;极大地扩充了包含在第 1 版中的内容;在度量空间理论部分加入了一般拓扑学初步,在赋范空间理论部分加入了线性拓扑空间初步,在积分理论部分加入了微分论,在正交函数系理论部分加入了三角级数论和傅里叶变换。按照他的请求,我写了《附录:

巴拿赫代数》。谢尔盖·瓦西里也维奇写了非线性分析一章,并在此之上继续工作,想把它大大扩充,但是他的辞世,却使这个打算没能进行到底。十分遗憾,把《泛函分析方法在计算数学问题中的某些应用》列入书中的想法未能实现。

在这一版中纠正了某些印刷错误,并把索引注明的出处由页码改为章、节、段(这样就可以在以后的版本中避免许多不确切性)。

今年是安德烈·尼可拉也维奇与谢尔盖·瓦西里也维奇·佛明合著的《函数论与泛函分析初步》第 1 版问世 50 周年。毋庸置疑,呈献给读者的本书第 7 版是具有 250 年历史的莫斯科大学的教授们所著的优秀教材之一。

B. M. 季霍米洛夫
莫斯科, 2004 年

前几版的序

第 2 版 序

《函数论与泛函分析初步》的第 1 版分别在 1954 年和 1960 年以两卷本出版。这两卷本的出现是与 20 世纪 40 年代末在莫斯科大学数学力学系教学大纲内包含了“分析Ⅲ”教程有关的,分析Ⅲ包含了测度论与函数论初步、积分方程、泛函分析的内容,稍晚些又包括了变分法。本教程起先由 A. H. 柯尔莫戈洛夫,以后又有其他讲授者,其中包括 C. B. 佛明,在莫斯科大学讲授过。后来其他大学的教学计划中也采用了这本书。

当时,在莫斯科大学用统一的教程“分析Ⅲ”代替实变函数论、积分方程及变分法的各门课程引起了较大的争论。本教程面临培养学生具备双重视野的任务:一方面,注意集合论,度量空间与拓扑空间连续映射的一般理论,线性空间以及在其上的泛函与算子,一般“测度空间”中的纯测度论与积分法等的发展的内部逻辑;另一方面,不忽略被这些更为抽象的数学领域所服务的古典分析学甚至应用分析学。

在解决这个问题的时候,我们在本书的编写计划中偏重于教程结构的抽象方面。从集的一般理论(第一章)可以转到度量空间、拓扑空间以及它们的连续映射(第二章),或直接转到测度(没有拓扑)的空间及该空间的积分法(第五章)。在第三与第四章中研究线性空间以及其中的线性泛函与线性算子。从这两章可以直接转到第十章(非线性微分算子与非线性泛函)。在第七章中研究可和函数线性空间。就实质上说,我们仅在第六章与第八章中把注意力集中在实变函数上。尽管本书把函数论与泛函分析的一般概念的研究放在首位,但读者可以观察到在几乎所有各章,我们都注意将上述概念与古典问题联系起来。在本版中增加了第六章(微分

论),第八章(三角级数及傅里叶积分)与第九章(线性积分方程),使得现在这本书(除变分法以外)包括了莫斯科大学中所用的“分析Ⅲ”教程的整个教学大纲。本书没有加入变分法这一部分内容,仅限于在第十章中叙述了非线性泛函分析的最重要概念。

如同旧版一样,在新版中,测度的一般理论占有相当的地位。近来不利用测度论工具而根据丹尼尔(Daniell)概型出现了相当多积分理论的叙述。但是,我们认为测度理论很重要,并且测度论本身不依赖于积分概念的引入,因而值得加到大学教程中去。

新增加的各章明显扩充了本书的内容。旧的各章也作了本质的修改并在其中加入新的节段(例如,序型与超限数,拓扑空间,广义函数等等)。

然而,在修改本书并增加新的篇幅时,我们努力保持了第一版中看来是比较成熟的初等叙述风格。我们期望本书与其他教程,特别是与Г. E. 希洛夫的书“数学分析专门教程”一样,在大学教学中得到其应有的地位。在希洛夫的教程中更强调问题的解析方面,而对度量空间与拓扑空间、测度等内容的兴趣不大,以较少的篇幅作为独立的内容来介绍。

A. H. 柯尔莫戈洛夫

C. B. 佛明

第 3 版 序

在新版准备过程中,我们保留了本书总的计划并力求不增加内容。此外,本书全部内容都经过重新审阅与修订。在这个工作中Φ. B. 希罗柯夫给予我们莫大的帮助。据我们的意见,在第一章与第四章中作出一些简单的变动和修改,从比较简单的概念过渡到比较复杂的概念(例如,从巴拿赫空间过渡到第四章中更一般的空间)。测度论(第五章)的叙述作了十分重要的修改。

近年来,“分析Ⅲ”教程往往包含巴拿赫代数论与谱分析初步。因此,我们把B. M. 季霍米洛夫所写有关上述两个问题作为附录是适宜的。

A. H. 柯尔莫戈洛夫

C. B. 佛明

第 4 版 序

这一版问世以后C. B. 佛明已不在人间。但是,他还是赶上改进本书的所有主要工作,主要修改了第十章。在这一章中补了关于隐函数定理的一节并且修改了“极值问题”的一节。这些就使得有必要修改第四章(哈恩-巴拿赫定理及关于逆算子的巴拿赫定理的推论)。

本书全文经由 B. M. 亚历克赛也夫与 B. M. 季霍米洛夫审阅,在此我向他们表示衷心的感谢。

A. H. 柯尔莫戈洛夫

第 6 版 序

这一版是在安德烈·尼可拉也维奇·柯尔莫戈洛夫逝世后出版的。他是在大学教育课程框架内设置函数论与泛函分析课程(简称“分析Ⅲ”)的倡议者。安德烈·尼可拉也维奇详细订出教学大纲,并在莫斯科大学数学力学系首先讲授这个课程(1946—1947 学年),而后再次讲授时(1952—1953 学年),就想写成教科书。为此目的,A. H. 柯尔莫戈洛夫邀请谢尔盖·瓦西里也维奇·佛明(后者在物理系讲授类似的课程)一道编写,他对后者的学识、教学水平和人品有很高的评价。这样,一个创作优秀教科书的作者集体便形成了,在近 35 年的期间内,在许多大学中讲授“分析Ⅲ”时,都采用了这本书。

本书第 1 版是分册出版的——分别在 1954 年和 1960 年由莫斯科大学出版社出版。我认为应当在这里提一下 T. Д. 文策尔和 O. C. 库拉庚娜在本书出版过程中(1954 年)所起的重大作用。他们写出了安德烈·尼可拉也维奇讲授课程的详细纲要,此后作者委托他们(那时他们还是大学生)担任此书的编校工作,他们以高度的责任心完成了任务。

A. H. 柯尔莫戈洛夫的多方面的一般教育思想已反映在“分析Ⅲ”的设想中。首先是关于抽象数学与应用数学的统一性问题,(正如在第 2 版序言中所说的)关于“培养学生具备双重视野:一方面,注意集合论、度量空间与拓扑空间连续映射的一般理论、线性空间以及在其上的泛函与算子、一般‘测度空间’中的纯测度论与积分法等的发展的内部逻辑;另一方面,不忽略被这些更为抽象的数学领域所服务的古典分析学甚至应用分析学”的必要性问题。

其次,A. H. 柯尔莫戈洛夫总是宣传“综合”课程的必要性,宣传这样一种理念:教育就如同一种螺旋运动,学习者可以越来越高的层次来观察整个轨迹。在本书中对在教学的开始阶段学生在课程中已接触到的古典分析(“分析Ⅰ”)与代数、几何与微分方程(“分析Ⅱ”)的概念实行综合。“分析Ⅲ”课程本身把原先在数学力学系开的课程中的实变函数论、泛函分析、积分方程、变分法等等材料统一起来。安德烈·尼可拉也维奇认为:大学教科书应当简明、易懂,并加入大量例子,这些例子可作为发展抽象理论的论据。本书就是这样写成的。

最初本书非常简明(它符合 A. H. 柯尔莫戈洛夫最初的设想),但嗣后作者们决定大大扩充本书的内容,以使不同类型大学的教师可以从中选择更适合他们的材料。这个扩充基本上是由 C. B. 佛明在第 2、3、4 版完成的。那时,应作者的请求,我写了有关巴拿赫代数的《附录》。在这里还想提一下在出版过程中,本书的各位编辑

的巨大帮助:Д. П. 热洛本科(1960年),Ф. В. 希洛科娃(1972年,第3版)和В. М. 阿列克谢也娃(1976年,第4版)。С. В. 佛明的辞世中断了他对本书的许多设想的实现(主要是有关第十章的改写)。第5版没有实质性的修改,在这一版中对文献目录作了某些修改。

А. Н. 柯尔莫戈洛夫和С. В. 佛明的书于1968,1972,1976和1981年在科学出版社(Наука)再版。此书被译成多种外国文字,出了英文和日文两种版本,在德意志民主共和国、捷克斯洛伐克社会主义共和国及匈牙利人民共和国出版,还被译成法文和西班牙文,1988年在Мир出版社出版了达里语的版本。

深信在更长的时间内,А. Н. 柯尔莫戈洛夫和С. В. 佛明的书对未来新的一代代的数学家们仍将是需要的。

В. М. 季霍米洛夫

基本符号表

\mathcal{A}	$E^*, E^\#$
B_T	(E^*, b)
$B(x_0, r)$	$(E^*, \ \cdot \)$
$B(X^2, Y)$	$f: M \rightarrow N$
$BC(X, Y)$	$f(A)$
$\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$	$f^{-1}(b)$
\mathbb{C}	$f^{-1}(\tau)$
$C = C[0, 1]$	F''
$C[a, b]$	$\mathcal{GL}(E, E_1)$
C_T	Im
$C^1[a, b]$	$J(E)$
$C^n[a, b]$	$K[a, b]$
$C_2[a, b]$	Ker
$C_E^1[t_0, t_1]$	$L_1, L_1(X, \mu)$
C^∞	$L_2, L_2(X, \mu)$
$CBV[0, 1]$	$L_p(X, \mu)$
c	$\mathcal{L}(E, E_1)$
$DF(x, h)$	L/L'
$D(\lambda), D(s, t; \lambda)$	$L(\{x_\alpha\})$
dF, d^2F, d^nF	l_1

l_2	$\rho_p(x, y)$
l_p	$\rho_\infty(x, y)$
\mathcal{M}	$\tau(\mathfrak{B})$
$N(X^n, Y)$	\mathcal{N}
$\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$	\mathcal{N}_0
S_∞	\mathcal{N}_1
S_∞^*	\cup
T_{x_0}	\cap
V_a^b	Δ
$V^0[a, b]$	\setminus
W	\subset
Z	\sim
$\rho_1(x, y)$	φ

目 录

第一章 集论初步	1
§ 1. 集的概念, 集上的运算	1
1. 基本定义(1) 2. 集上的运算(1)	
§ 2. 映射, 分类	3
1. 集的映射, 函数的一般概念(3) 2. 分类, 等价关系(5)	
§ 3. 集的对等性, 集的势的概念	7
1. 有限集与无限集(7) 2. 可数集(8) 3. 集的对等性(9) 4. 实数集的不可数性(11) 5. 康托尔-伯恩斯坦(Cantor-Bernstein)定理(12) 6. 集的势的概念(12)	
§ 4. 有序集, 超限数	14
1. 偏序集(14) 2. 保序映射(15) 3. 序型, 有序集(15) 4. 有序集的有序和(16) 5. 良序集, 超限数(16) 6. 序数的比较(17) 7. 选择公理, 策梅洛定理及其等价的其他命题(19) 8. 超限归纳法(20)	
§ 5. 集族	21
1. 集环(21) 2. 集半环(22) 3. 半环生成的环(23) 4. σ 代数(24)	
5. 集族与映射(25)	
第二章 度量空间与拓扑空间	26
§ 1. 度量空间的概念	26
1. 定义与基本例子(26) 2. 度量空间的连续映射, 等距(32)	
§ 2. 收敛性, 开集与闭集	33
1. 极限点, 闭包(33) 2. 收敛性(34) 3. 稠密子集(35) 4. 开集与闭集(35)	
5. 直线上的开集与闭集(36)	
§ 3. 完备度量空间	40

1. 完备度量空间的定义与例子(40)	2. 球套定理(42)	3. 贝尔(Baire)定理(43)	
4. 空间的完备化(43)			
§ 4. 压缩映射原理及其应用			45
1. 压缩映射原理(45)	2. 压缩映射原理最简单的一些应用(46)	3. 微分方程的存在性与唯一性定理(49)	4. 压缩映射原理应用于积分方程(51)
§ 5. 拓扑空间			53
1. 拓扑空间的定义与例子(53)	2. 拓扑的比较(55)	3. 确定邻域族. 基. 可数性公理(55)	4. T 中的收敛序列(58)
	5. 连续映射. 同胚(58)	6. 分离性公理(60)	
	7. 在空间中给定拓扑的不同方法. 可度量性(62)		
§ 6. 紧性			63
1. 紧性概念(63)	2. 紧空间的连续映射(65)	3. 在紧空间上的连续函数与半连续函数(65)	4. 可数紧性(67)
	5. 准紧集(68)		
§ 7. 度量空间的紧性			68
1. 完全有界性(68)	2. 紧性与完全有界性(70)	3. 度量空间中的准紧子集(71)	
	4. 阿尔采拉(Arzelà)定理(71)	5. 佩亚诺(Peano)定理(73)	6. 一致连续性. 度量紧统的连续映射(75)
	7. 拓广的阿尔采拉定理(75)		
§ 8. 度量空间中的连续曲线			76
第三章 赋范线性空间与线性拓扑空间			81
§ 1. 线性空间			81
1. 线性空间的定义及例子(81)	2. 线性相关性(83)	3. 子空间(84)	
	4. 商空间(84)	5. 线性泛函(85)	6. 线性泛函的几何意义(87)
§ 2. 凸集与凸泛函. 哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理			88
1. 凸集与凸体(88)	2. 齐次凸泛函(90)	3. 闵可夫斯基泛函(91)	4. 哈恩-巴拿赫定理(93)
	5. 线性空间中凸集的可分离性(96)		
§ 3. 赋范空间			97
1. 赋范空间的定义与例子(97)	2. 赋范空间的子空间(99)	3. 赋范空间的商空间(99)	
§ 4. 欧几里得空间			101
1. 欧几里得空间的定义(101)	2. 例子(102)	3. 正交基的存在性, 正交化(104)	
	4. 贝塞耳(Bessel)不等式. 封闭正交系(106)	5. 完备的欧几里得空间. 里斯-费希尔(Riesz-Fisher)定理(109)	6. 希尔伯特空间. 同构定理(111)
	7. 子空间. 正交补. 直和(114)	8. 欧几里得空间的特性(117)	9. 复欧几里得空间(119)
§ 5. 线性拓扑空间			122
1. 定义与例子(122)	2. 局部凸性(124)	3. 可数赋范空间(124)	
第四章 线性泛函与线性算子			127
§ 1. 线性连续泛函			127
1. 线性拓扑空间中的线性连续泛函(127)	2. 赋范空间上的线性泛函(128)	3. 赋范空间中的哈恩-巴拿赫定理(131)	4. 在可数赋范空间中的线性泛函(133)

§ 2. 共轭空间.....	134
1. 共轭空间的定义(134) 2. 共轭空间中的强拓扑(134) 3. 共轭空间的例子(136) 4. 二次共轭空间(141)	
§ 3. 弱拓扑与弱收敛	143
1. 在线性拓扑空间中的弱拓扑与弱收敛(143) 2. 赋范空间中的弱收敛(144)	
3. 共轭空间中的弱拓扑与弱收敛(147) 4. 共轭空间中的有界集(148)	
§ 4. 广义函数.....	151
1. 函数概念的推广(151) 2. 基本函数空间(152) 3. 广义函数(153) 4. 广义函数的运算(154) 5. 基本函数范围的充足性(156) 6. 按导数求函数. 广义函数类中的微分方程(157) 7. 某些推广(159)	
§ 5. 线性算子.....	162
1. 线性算子的定义与例(162) 2. 连续性与有界性(165) 3. 算子的和与积(167)	
4. 逆算子,可逆性(168) 5. 共轭算子(173) 6. 欧几里得空间中的共轭算子. 自共轭算子(175) 7. 算子的谱. 预解式(176)	
§ 6. 紧算子	178
1. 紧算子的定义与例(178) 2. 紧算子的基本性质(182) 3. 紧算子的特征值(184) 4. 希尔伯特空间中的紧算子(185) 5. H 中的自共轭紧算子(186)	
第五章 测度,可测函数,积分	190
§ 1. 平面集的测度	190
1. 初等集的测度(190) 2. 平面集的勒贝格(Lebesgue)测度(194) 3. 若干补充与推广(200)	
§ 2. 一般测度概念. 测度从半环到环上的扩张. 加性和 σ 加性	202
1. 测度的定义(202) 2. 从半环到其所生成的环的测度扩张(203) 3. σ 加性(205)	
§ 3. 测度的勒贝格扩张	208
1. 给定在一个含有单位集的半环上的测度的勒贝格扩张(208) 2. 给定在不含单位集的半环上的测度扩张(210) 3. 在 σ 有限测度的情形下可测性概念的扩充(212) 4. 按约当(Jordan)意义的测度扩张(214) 5. 测度扩张的单值性(216)	
§ 4. 可测函数.....	217
1. 可测函数的定义及其基本性质(217) 2. 可测函数的运算(218) 3. 等价性(220) 4. 几乎处处收敛性(221) 5. 叶果洛夫(Егоров)定理(221) 6. 按测度收敛(222) 7. 鲁金(Лузин)定理. C 性质(225)	
§ 5. 勒贝格积分	225
1. 简单函数(226) 2. 简单函数的勒贝格积分(226) 3. 具有有限测度的集上的勒贝格积分的一般定义(228) 4. σ 加性和勒贝格积分的绝对连续性(230) 5. 勒贝格积分号下取极限(234) 6. 无穷测度集上的勒贝格积分(237) 7. 勒贝格积分同黎曼积分之比较(238)	
§ 6. 集族及其测度的直积. 富比尼(Fubini)定理	241

1. 集族的乘积(241) 2. 测度积(242) 3. 用截线的线性测度之积分表示平面测度之表达式. 勒贝格积分的几何意义(244) 4. 富比尼定理(247)	
第六章 勒贝格不定积分. 微分论	250
§ 1. 单调函数. 积分对上限的可微性	251
1. 单调函数的基本性质(251) 2. 单调函数的可微性(253) 3. 积分对上限求导数(259)	
§ 2. 有界变差函数	260
§ 3. 勒贝格不定积分的导数	264
§ 4. 用函数的导数求原函数. 绝对连续函数	266
§ 5. 作为集函数的勒贝格积分. 拉东 - 尼柯迪姆 (Radon-Nikodým) 定理	274
1. 荷·哈恩分解和约当分解(274) 2. 荷的基本类型(276) 3. 绝对连续荷. 拉东 - 尼柯迪姆定理(277)	
§ 6. 斯蒂尔切斯 (Stieltjes) 积分	279
1. 斯蒂尔切斯测度(279) 2. 勒贝格 - 斯蒂尔切斯积分(281) 3. 勒贝格 - 斯蒂尔切斯积分在概率论中的某些应用(282) 4. 黎曼 - 斯蒂尔切斯 (Riemann - Stieltjes) 积分(284) 5. 斯蒂尔切斯积分号下取极限(287) 6. 连续函数空间中线性连续泛函的一般形式(289)	
第七章 可和函数空间	294
§ 1. 空间 L_1	294
1. 空间 L_1 的定义与基本性质(294) 2. L_1 中处处稠密的集合(296)	
§ 2. 空间 L_2	299
1. 定义与基本性质(299) 2. 无穷测度的情形(301) 3. 在 L_2 中处处稠密的集合. 同构定理(303) 4. 复空间 L_2 (304) 5. 均方收敛及它与其他类型的泛函序列收敛性的联系(304)	
§ 3. L_2 中的正交函数系. 按正交系展开的级数	306
1. 三角函数系. 傅里叶三角级数(306) 2. 在闭区间 $[0, \pi]$ 上的三角函数系(308)	
3. 复形式的傅里叶级数(309) 4. 勒让德 (Legendre) 多项式(310) 5. 乘积正交系. 多重傅里叶级数(312) 6. 关于给定权正交的多项式(314) 7. 空间 $L_2(-\infty, \infty)$ 与 $L_2(0, \infty)$ 中的正交基(315) 8. 关于离散权的正交多项式(316) 9. 哈尔 (Haar) 系与拉德马赫 - 沃尔什 (Rademacher - Walsh) 系(318)	
第八章 三角级数. 傅里叶变换	321
§ 1. 傅里叶级数收敛的条件	321
1. 傅里叶级数在一点收敛的充分条件(321) 2. 傅里叶级数一致收敛的条件(326)	
§ 2. 费耶 (Fejér) 定理	328
1. 费耶定理(328) 2. 三角函数系的完备性. 魏斯特拉斯定理(331) 3. 空间 L_1 中的费耶定理(332)	
§ 3. 傅里叶积分	332
1. 基本定理(332) 2. 复形式的傅里叶积分(334)	