卡尔曼滤波

宋文尧 张 牙 编著

科 学 出 版 社

卡 尔 曼 滤 波

宋文尧 张 牙 编著

国家自然科学基金资助项目

科 学 出 版 社

1 9 9 1

内 容 简 介

本书是建立在最优估计理论基础上，作为测量数据处理的一种新方法而撰写的.

全书共分七章，重点论述了卡尔曼滤波方法的理论基础，以离散时间系统为主，全面地介绍了各种滤波方法的递推公式，深入地分析了各种方法的特点，理顺了各种方法之间的区别和联系，阐述了卡尔曼滤波方法在动态测量中的应用(列举了海洋船舶动态定位、组合导航、人造卫星定轨计算、弹道计算和目标跟踪以及其他问题实例)，比较全面地反映了当前国内外研究卡尔曼滤波方法的现状.

本书概念明确，条理清楚，举例新颖详尽，俾使读者学以致用，可供海洋大地测量、海洋地球物理勘探以及航天、航空、航海、工业自动化等有关科技人员和大专院校师生自学参考.

卡 尔 曼 滤 波

宋文尧　张　牙　编著

责任编辑　姚岁寒　彭　斌

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

1991年1月第一版　开本:787×1092　1/16

1991年1月第一次印刷　印张:13 3/4

印数:001—600　字数:314,000

ISBN 7-03-001891-5/P·364

定价: 15.80元

前　言

随着近代估计理论的发展和数字电子计算机的普遍应用，测量平差方法和理论有了长足的进展．以陆地静态测量为主的经典平差方法——最小二乘法，逐步发展到用于研究地壳形变监测网并考虑到点位稳定或不稳定基准的拟稳平差、自由网平差，以及为了解决重力异常和垂线偏差的内插计算问题，而提出了最小二乘拟合推估 (least squares collocation)．为了合理处理粗差问题，国内外学者都在研究抗差估计 (robust estimation) 理论．上述方法所利用的观测数据是建立在陆地测量的基础之上，测站和观测目标都处于静态的，一切观测成果都可以后处理的．

随着空间技术的发展，60 年代初，卡尔曼 (Kalman)、布西 (Bucy) 等人提出了一种递推式滤波方法，成为创建现代控制理论的重要里程碑，并被成功地应用于飞行器导航，导弹制导，再入弹道计算以及潜艇、飞机导航、火力控制、工业自动化等诸方面．近几年来，在很多科学技术领域得到应用和推广．

卡尔曼滤波方法的特点是，不要求保存过去的测量数据．当新的数据测得之后，根据新的数据和前一时刻的诸量估计值，借助系统本身的状态转移方程(即动态方程)，按照一套递推公式，即可算出新的诸量的估计值．因此，从某种意义上来说，它与序贯平差是类同的，这种方法十分适合于动态测量，即目标(或测站)是运动的，如飞机、船舶、人造卫星以及导弹等运载体．卡尔曼滤波方法可以根据初始状态的误差估计和有限的观测数据，利用电子计算机，逐步计算出运载体航迹(或称轨道)的实时状态的最优估计，以及预报下一时刻(采样时间间隔)的运动状态，以达到及时最优控制的目的，这是其他处理方法无法比拟的．

卡尔曼滤波方法的主要问题是，由于模型误差和计算误差所引起的发散性，即随着时间的推延，递推状态估计与观测的真实状态之间偏差愈来愈大，以致产生发散现象，为此，本书中介绍了几种克服发散现象的方法．

全书共分七章．它首先论述了卡尔曼滤波方法的理论基础；其次以离散时间系统为重点，系统地介绍了各种方法的递推公式，深入地分析了各种方法的特点，理顺了各种方法之间的区别和联系，比较全面地反映了当前国内外研究卡尔曼滤波方法的现状；最后阐述了卡尔曼滤波方法在动态测量中的应用，诸如船舶动态定位，惯性测量与卫星组合导航，人造卫星定轨计算，弹道测定和目标跟踪，以及在其他科技问题上的应用．试图达到学以致用，抛砖引玉，推广这种方法的目的．

本书承蒙张儒杰教授审阅，并提出很多宝贵意见，在此深表感谢．由于作者水平所限，书中难免存在缺点和错误，恳请读者给予批评指正．

作者序于武昌

1988 年仲夏

目　　录

第一章　总　论

统计滤波方法是一门自然科学和技术科学在各个领域中具有广泛应用的数学方法，早在1795年高斯（Gauss）在研究行星轨道问题就提出最小二乘法，从此最小二乘法的学术思想一直影响着统计理论的发展．直到20世纪以后，由于第二次世界大战期间军事技术等方面的需要，柯尔莫哥罗夫（Колмогоров）和维纳（Wiener）相继提出平稳随机过程的最优线性滤波理论，通常称为维纳滤波理论，这些理论在通讯、控制等技术领域内得到应用并有所发展，但也存在不足之处：首先，它没有能够给出最佳滤波解的直接计算方法，却往往是包含在求解微分方程或代数方程等复杂的计算过程中．其次，这种滤波方法必须把所用到的全部数据保存起来，而且每一时刻都要通过这些数据进行运算，才能得到所需要的各种量的估计值，按照这种滤波方法设置的计算机，其存储量和计算量都是很大的，甚至不能实时计算．第三，该理论是采用频域法以传递函数为其数学工具，以单变量控制与调节为其主要内容，因而不能直接推广到非平稳过程的滤波问题，而给出能用的方法为数不多，这些弱点限制了维纳滤波的广泛应用．

60年代以后，美籍匈牙利数学家卡尔曼（R. E. Kalman）首先提出用一个状态方程和一个量测方程来完整地描述线性动态过程，并在此基础上引入能控性和能观性的概念，这一概念为现代控制论的发展开辟了广阔的领域．卡尔曼滤波理论是采用时域法以状态方程为其数学工具，以多变量控制、最优控制与估计以及自适应控制为主要内容．1961年，卡尔曼、布西（Bucy）把滤波方法推广到连续系统中去，并提出一种递推或滤波方法．一般来说，连续系统与离散系统是平行的，离散型递推方法的优点在于，不要求保存过去的测量数据，当新数据测得以后，根据新的数据和前一时刻诸量的估计值，借助于系统本身的状态转移方程(即动态方程)，按照一套递推公式，即可算出新的诸量的估计值，这样大大减少了滤波装置的存储量和计算量，同时适用于信号为非平稳的，动态系统也可以是时变的．离散型卡尔曼滤波方法的主要缺点是，由于数学模型不能正确反映实际物理过程，对模型噪声和量测噪声的统计特性了解不够，使得两者方差取值不合适，加上计算机有限字长使得计算过程中的舍入误差积累过大，导致计算出来的协方差矩阵不正定，甚至不对称，最后使滤波出现反常现象，即尽管协方差矩阵的计算值看上去不断变小，但状态估计值的实际误差却不断增加，以致得到完全不符合实际的结果，这种现象称为**滤波发散**．为了克服这种现象，现代控制论的学者至今不断从事这方面的研究，并由此派生出了一些滤波方法．

1.1　卡尔曼滤波方法的分类

现代控制论包括着系统辨识和参数估计两个相互关联领域．所谓系统辨识，就是通过试验(或观测)得到系统一组或多组输入、输出数据，根据这些数据在模型类里选择一个模型，按某种最优准则来确定模型参数，从而求得定量描述系统状态和输入、输出关系的

数学模型，这种建模理论就是“系统辨识”．所谓参数估计(即状态估计)，是指在动态系统中，我们不可能直接观测到状态向量的所有分量，而只能通过仪器(或仪表)量测到它们之中某些分量或这种分量的变换形式，所以，我们希望通过对系统输入、输出数据的量测，实时估计状态向量的所有分量，以其实现最佳控制．另外，由于系统控制过程存在着不可避免的随机干扰(即称动态噪声)，用仪器量测的输入、输出数据也会带有量测噪声的影响，因此，应该通过状态向量的递推方法，过滤掉干扰影响，以提高控制精度，两者统称为状态估计．

要掌握卡尔曼滤波方法及其应用，必须明确以下一些概念、分类及其互相间的逻辑联系．

动态系统　许多物理系统的输入作用取决于前面的全面状态．确切地说，这种物理系统的输出响应在某一瞬间 $t=t_1$ 的值取决了输入信号 $t<t_1$ 的全部情况和系统的初始状态，我们称这种系统为动态系统．要得出一组实际的动态系统，就要写出它的状态方程，这种状态方程是根据系统的结构及有关物理特性而写出的，在满足一定精度的前提下，作一些必要的简化，如线性化的处理．动态系统的状态是指确定系统运动状况的最少一组变量，就是说，如果已知 $t=t_0$ 时的这组初始变量和 $t\geqslant t_0$ 时的输入，就可以完全确定系统在任何时间 $t\geqslant t_0$ 的运动状态，这组变量称为状态变量，状态变量所构成的向量称为状态向量，状态向量所形成的空间称为状态空间．

线性系统与非线性系统　动态系统可分为线性系统与非线性系统．凡是一个系统的输入信号和输出响应之间，能够满足迭加性和齐次性，这种系统就是线性系统．例如，单独输入 $x_1(t),x_2(t)$，其相应输出响应分别为 $y_1(t),y_2(t)$，若以 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ 为输入量，则 $x(t)$ 对应的输出响应为 $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$，这就是叠加性．线性系统另一个特征是，输入信号乘以某一系数 α 时，输出响应也乘以同样系数 α，这就是齐次性．迭加性和齐次性成为线性系统的两个本质特性．这种特性合成对应关系为

$$\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\to\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$$

其示意图为 1.1.

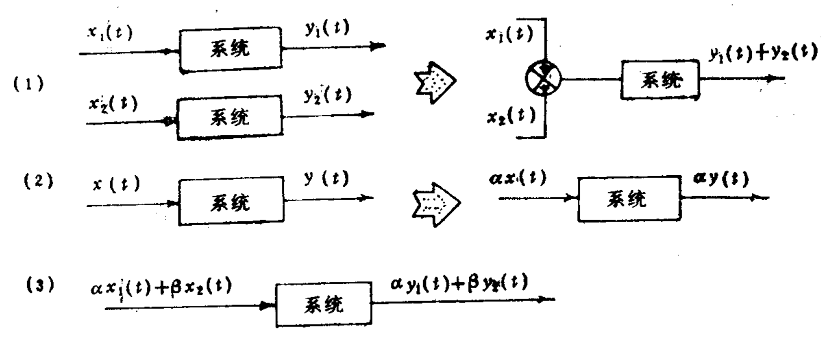

图 1.1

(1)叠加性　(2)齐次性　(3)叠加性和齐次性合成

凡不具有叠加性质的系统，称为非线性系统，因此叠加性成为判断非线性系统的唯一标准．线性系统是动态系统中最基本的一类系统，对它的研究日益完善，与非线性系统相比较，线性系统简单得多，应用起来也比较方便．动态系统如果是非线性的，我们总可以

在允许条件下尽量将系统"线性化"，以期处理简单．因此，线性系统的理论往往是我们研究的重点．

平稳系统和时变系统　线性系统也可分为时变系统和平稳系统（亦称时不变系统或定常系统）．系统的参数随时间变化的称为时变系统，这种系统常用带有时变系数的线性微分方程或差分方程作为它的数学模型．参数不随时变化的则称时不变系统，通常以常系数微分方程或差分方程作为它的数学模型．

连续系统和离散系统　描述系统特性一个十分重要的问题引入时间变量的方式．当系统各个物理量随时间变化的规律可采用连续函数描述时，则称这种系统为连续系统，连续系统的动态特性用微分方程表达．有些系统其物理量不是连续变化的，它只在离散的瞬间给出数值，或者有些系统用连续时间描述太冗长，同时没有必要，只要采取离散的数值就足够正确，则可以将微分方程离散化后求解，这种系统称为离散系统，离散系统的动态特征可用差分方程表达．

根据动态系统的不同性质和存在的问题，卡尔曼滤波方法大致分成三个部分，即

（1）线性滤波方法　可分两类，即白噪声作用下一般线性递推滤波估计和带有相关噪声（亦称有色噪声）线性递推滤波估计，后者细分成动态噪声为有色噪声，量测噪声为有色噪声以及动态噪声和量测噪声皆为有色噪声等三种情况，解决这个问题的方法是状态变量扩维法和量测求差法．

（2）非线性滤波方法　对于一般非线性系统来说，在理论上难于找到严格的递推滤波公式，因此，目前通常采用近似方法来研究．非线性滤波的线性化，是用近似方法来研究非线性滤波问题的重要途径之一．为了解决这类问题，现有推广的卡尔曼滤波、近似条件均值滤波、迭代滤波，非线性最小二乘滤波．

（3）特殊目的的滤波方法　为了克服滤波的发散现象，可采用渐消记忆滤波、限定记忆滤波、自适应滤波．

渐消记忆滤波方法　在进行滤波时，设法增大"新息"量测数据的作用，相对地减小"过老"的量测数据的影响．换句话说，随着时间向前发展，滤波器要逐渐忘掉过老的量测数据，这是符合物理现象的，因为用不正确的模型在长时间内进行滤波，过老的量测数据不应再起作用了，其办法是用指数加权法逐渐消除对"过老"数据的记忆．

限定记忆滤波方法　要求在求 x_k 的滤波时，只利用离时刻 k 最近的前 N 个量测 $z_{k-N+1}, z_{k-N+2}, \cdots, z_k$，而其余的量测完全甩掉，这里 N 是根据实际物理系统预先规定的记忆长度．

自适应滤波方法　它是在利用量测数据进行滤波的同时，不断地对未知的或不确切知道的系统模型参数和噪声统计特性进行估计和修正，以改进滤波的设计，缩小实际的滤波误差．这样把系统辨识和滤波估计两者有机结合为一体．

为了减少计算量，同时保证足够高的滤波精度，可采用简化的卡尔曼滤波方法．归结起来有三种，即分段常增益滤波方法、次优滤波方法和解耦滤波方法．

分段常增益滤波方法　顾及到在利用离散系统的卡尔曼滤波方法来处理状态估计问题时，主要的计算量都集中在求增益矩阵 K_k 的矩阵迭代运算上，尤其是当系统的阶数较高时，待估计的状态变量较多的情况下，就要求计算机有较快的计算速度和较大的存贮，为此提出了分段常增益（亦称分段循环）的卡尔曼滤波方法．这种方法的特点是：既

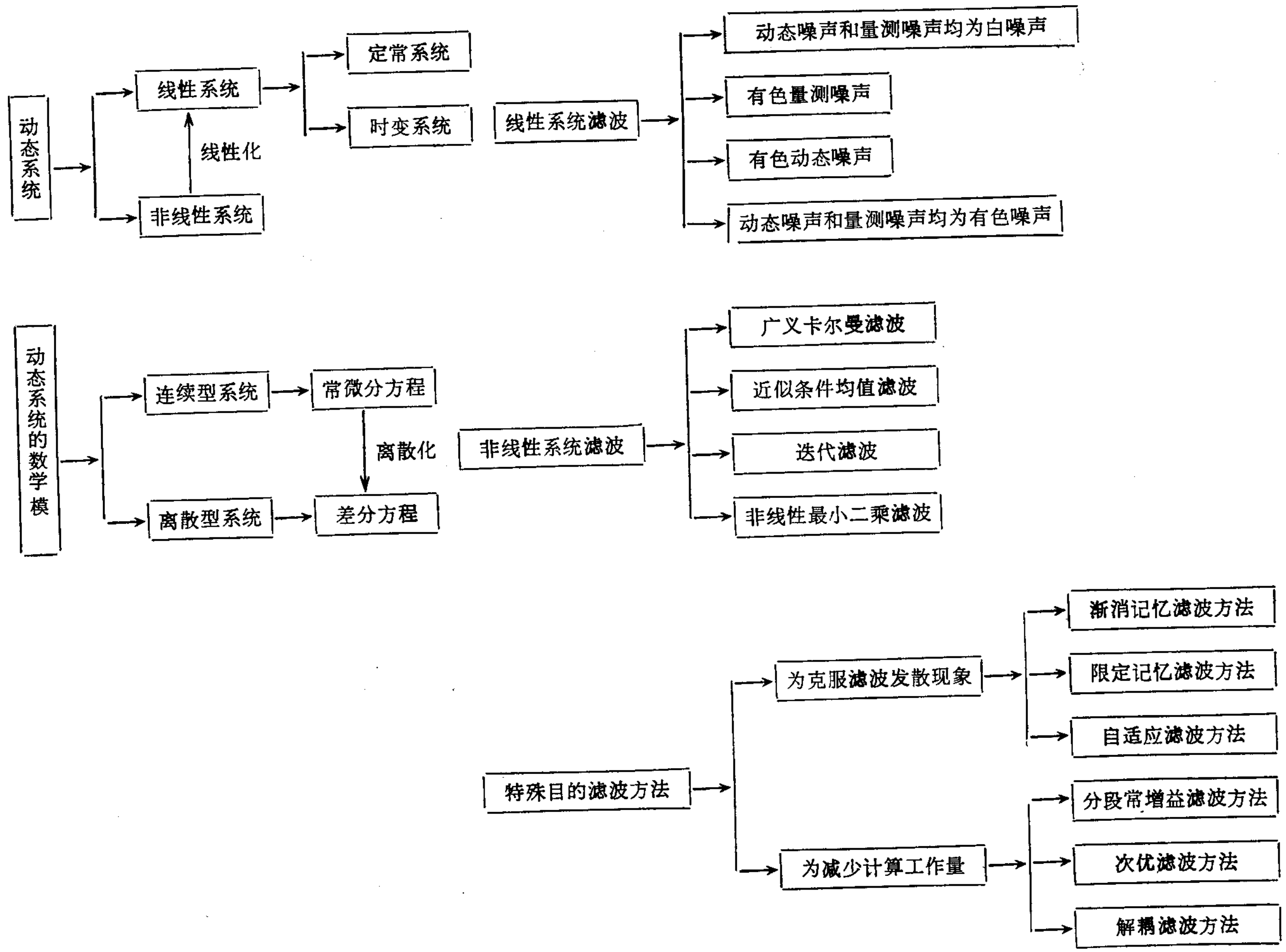

图 1.2　卡尔曼滤波方法分类关系图

不需要降低系统的采样频率(或采样数据),又不需要每一步都进行增益矩阵计算,而是在一段时间间隔之内取一常增益矩阵,各段不同时间间隔所取的常增益矩阵又不相同．这样既照顾到增益矩阵依赖于系统参数的变化,又照顾到在保持较高采样频率情况下减少迭代次数．

次优滤波法　是指寻找一组简化的卡尔曼滤波方程．在估计状态向量中,采用对系统描述起主导作用的若干分量(或称状态变量),而不用细致描述系统的全部分量,同时考虑性能损失不致太大．

解耦卡尔曼滤波　其基本思想是把高维系统(设状态为 n 维,量测为 m 维)解耦为几个低维的子系统．每个子系统状态为 n_i 维,量测为 m_i 维,$\sum_i n_i = n$,$\sum_i m_i = m$,从而把对应于原系统的推广卡尔曼滤波简化为各子系统分别进行解算,以降低计算量．

综上所述,卡尔曼滤波的公式是,平滑(亦称内插)、滤波和预测(亦称外推)的综合递推公式．为了使我们有一个清晰的思路,而不被繁杂的名词所迷惑,下面给出直观的卡尔曼滤波方法分类关系图 1.2．

1.2 卡尔曼滤波的理论基础

在前节中,我们根据不同情况,把现行卡尔曼滤波方法作了系统的分析和分类,使读者了解各种派生的滤波方法和属性.所列举的各种方法都可推导出一套冗长的滤波公式,这些公式都在有关文献中有所介绍,这里仅仅梗概地阐述卡尔曼滤波方法的基本思想．

卡尔曼滤波方法的理论是建立在概率论的基础上,特别应用最多的是,随机变量及其分布、条件均值和条件方差．最优估计理论是以众所熟知的最小方差估计、极大验后估计、极大似然估计和最小二乘估计为基础．在推导卡尔曼滤波的最优估计的递推公式时,通常采用最小方差估计,或者利用正交投影确定最优估计值．除了卡尔曼滤波公式(离散型与连续型)的推导外,还要研究滤波的渐近性质、误差分析和克服发散的方法,这是保证滤波方法达到预期效果的重要步骤,这两部分概括了卡尔曼滤波的基本内容．关于数据预处理工作,即连续系统的离散化和非线性系统的线性化问题,这些工作在决定计算方案以前,予以考虑．

本书重点讨论离散时间系统的卡尔曼滤波方法．全书共分七章,第一章总论,该章阐述了卡尔曼滤波方法形成的历史、基本概念、各类方法的作用与联系,以及卡尔曼滤波的理论基础,使读者有一个清晰的概念和全面地了解．第二章预备知识,介绍了矩阵分析和概率论的基础知识,作为以后推导公式的依据,熟悉这方面知识的读者可以不看．第三章线性滤波,该章详细地推导了递推公式,特别对有色噪声情况下的线性系统滤波作了全面地归纳和分类．第四章滤波的渐近性质、模型误差分析及克服发散的方法,该章在理论分析的基础上,介绍了几种克服发散的滤波方法,其中以自适应方法应用普遍．第五章非线性滤波,在科技问题中经常碰到的是非线性动态和量测方程问题,线性化的方法是,围绕标称(参考)状态变量,采用泰勒展开式,并根据滤波精度要求,可取其 0 阶、1 阶或 2 阶项．选择标称状态不同,就得到不同的滤波公式,比如采用平滑值作为标称状态变量,因而推导出迭代滤波公式．又如动态方程采用已求得的滤波值 $\hat{x}_{k-1}$,量测方程采用预测

值 $\hat{x}_{k/k-1}$ 作为标称变量，线性化后，就可推导出推广的卡尔曼滤波公式．线性化后的公式是一种近似计算公式，因此在滤波结果中存在着线性化误差，在解算实际问题时，必须作出定量的误差分析．第六章简化的卡尔曼滤波，包括了次优卡尔曼滤波、分段常增益卡尔曼滤波和解耦卡尔曼滤波，这些方法在影响滤波精度不大的范围内，是一些简便可行的方法，但采用这些方法必须慎重，一般都应进行模拟计算，才能判断滤波精度损失情况．第七章卡尔曼滤波在动态测量中的应用，作者从一些文献中挑选一些例子，供读者参考．所谓动态测量，就是说一切目标都是运动的，如人造卫星、导弹、航空、航海等运动体，量测动机目标，并实时估计运动的状态变量，比较真实地描述其运动轨迹（或称轨道），起到不断修正和控制的作用．如果读者要详细了解这方面情况，请参阅有关专著．

在撰写本书时，作者翻阅了有关文献，反复思考和比较，理顺各类滤波方法之间的关系，力图做到理论与实践相结合，附上一些算例，供读者在掌握基本理论的前提下，根据研究问题的需要，在实际工作中运用这些滤波方法．

第二章 预 备 知 识

2.1 矩阵分析基础

在滤波公式的表达和证明中,需要用矩阵和向量作为有力工具,特别是有了电子计算机的广泛应用,它显得更加重要,本章将简单介绍一些有关知识,并作为今后推导公式时的参考.

2.1.1 矩阵与向量的定义

方阵　如果取 mn 个实数 a_{ij}, $i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots n$, 排成m行 n 列的一个阵形,则称它为$m\times n$ 矩阵,并用A表示

$$\underset{(m\times n)}{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

或记为 $A=[a_{ij}]$. 当$m=n$时,A称为方阵, 这个相同的行列数称为方阵的阶, 其阶为 $(m\times n)$ 或其维为 $(m\times n)$. 替换记号为 (m,n).

零阵　当矩阵元素 a_{ij} 均为零时,称为零矩阵.

向量　$m\times 1$ 矩阵称为m维向量,记为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

也称为m维列向量.

m维向量的转置 x^τ 是 $1\times m$ 矩阵

$$x^\tau=[x_1,x_2,\cdots x_m]$$

为m维行向量, x_i 称为向量 x 的分量.

转置矩阵　如果将矩阵A的行列互换,则得转置矩阵, 并用 A^τ 表示,有些文献记为 A^T、A^t 或 A'.

$$A^\tau=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵的转置也是一种运算,满足下述运算规律:

$$(A+B)^\tau=A^\tau+B^\tau$$

$$(AB)^\tau=B^\tau A^\tau$$

$$(\alpha A)^\tau=\alpha A^\tau$$

$$(A^\tau)^\tau = A$$

对角矩阵　　如果 A 方阵的主对角线以外的元素都为零，则称 A 为对角阵，$A^\tau = A$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{mm} \end{bmatrix}$$

单位矩阵　　这个方阵的特点是：从左上角到右下角的直线(叫做主对角线)上的元素都是 1，其他元素都是 0.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} a_{ij} = 0, & 对于\ i \neq j \\ a_{ij} = 1, & 对于\ i = j \end{cases}$$

有的文献中用 E 表示单位矩阵.

对称矩阵　　如果 A 是一个方阵，且 $a_{ij} = a_{ji}$，则 A 为对称矩阵，这里 $A^\tau = A$. 若 $A^\tau = -A$ 称为反对称矩阵，或称斜对称矩阵.

三角矩阵　　三角阵是一个方阵，其主对角线上面(或下面)的元素(但不含主对角线的元素)都为零，即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = 上三角阵 \quad \begin{matrix} a_{ij} = 0 \\ i > j \end{matrix}$$

或

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = 下三角阵 \quad \begin{matrix} a_{ij} = 0 \\ i < j \end{matrix}$$

正交矩阵　　若矩阵 A 满足 $A^\tau = A^{-1}$，则称矩阵 A 为正交矩阵. 因 $A^\tau = A^{-1}$，则 $(A^{-1})^\tau = (A^\tau)^\tau = A = (A^{-1})^{-1}$

即正交方阵的逆矩阵仍为一正交方阵.

如两个同阶的正交方阵

$$A^\tau = A^{-1},\ B^\tau = B^{-1}\ 则$$

$$(AB)^\tau = B^\tau A^\tau = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

即两个正交方阵的乘积仍为一正交方阵.

2.1.2 矩阵的运算

矩阵相等　　同阶的两个矩阵 A 和 B，若对于所有的 i 和 j 都有 $a_{ij} = b_{ij}$，则它们是相等的. 不同阶矩阵不可能相等. 下列性质成立：

$A = A$　　对于所有的 A

若　$A = B$ 则 $B = A$　对于所有的 A 和 B　　(自反律)

若　$A = B$ $B = C$ 则 $A = C$　对于所有的 A, B, C　　(对称律)

矩阵加法　同阶的A和B两矩阵之和为一同阶的矩阵 C，对所有的 i 和 j，其元素都为 $C_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. 不同阶的矩阵不能相加. 矩阵加法满足下列运算规律：

$$A+B=B+A \text{ (交换律)}$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C \text{ (结合律)}$$

采用零矩阵 0,则

$$A+0=0+A=A$$

$$A+(-A)=0$$

其中 $(-A)$ 是以 $(-a_{ij})$ 为元素组成的矩阵.

矩阵减法　假设A和B有相同阶,则

$$\underset{(r\times s)}{A}-\underset{(r\times s)}{B}=\underset{(r\times s)}{C}$$

其中

$$a_{ij}-b_{ij}=c_{ij}$$

矩阵乘法　$\underset{(r\times s)}{A}\cdot\underset{(s\times t)}{B}=\underset{(r\times t)}{C}$，其中 $c_{mn}=\sum_{i=1}^{s}a_{mi}b_{in}$（第一个矩阵的第$m$行乘以第二个矩阵的$n$列）. 矩阵的乘法不满足交换律,即在一般情况下，$AB\neq BA$. 不过矩阵的乘法仍满足下列运算规律：

$$(AB)C=A(BC)$$

$$A\cdot(B+C)=AB+AC$$

$$(B+C)A=BA+CA$$

标量乘法　一个矩阵A与一标量α相乘的结果为另一矩阵 B,其元素 $b_{ij}=\alpha a_{ij}$,于是

$$B=\alpha A \quad [b_{ij}]=[\alpha a_{ij}]$$

标量乘法有如下性质：

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$

$$\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$$

α、β 为标量.

2.1.3　方阵的迹和逆

方阵的迹　已知方阵 $\underset{(n\times n)}{A}$，取$A$的对角线元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 之和称为矩阵A的迹（trace），记为 $\mathrm{Tr}(A)$，即

$$\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

矩阵的迹有如下性质：

$$\mathrm{Tr}(A^{\tau})=\mathrm{Tr}(A)$$

$$\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B)$$

$$\mathrm{Tr}(kA)=k\mathrm{Tr}(A) \text{ （}k\text{ 为常数）}$$

$$\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA) \text{ （}AB\text{ 和 }BA\text{ 是方阵）}$$

$$\mathrm{Tr}(A^{\tau}B)=\mathrm{Tr}(AB^{\tau})\ (A^{\tau}B\ 和\ AB^{\tau}\ 是方阵)$$

方阵的逆　　给定一 n 阶方阵 A，若存在一同阶方程 B，使得

$$AB=BA=E$$

则称 B 为 A 的逆矩阵，记为

$$B=A^{-1}$$

显然零矩阵没有逆矩阵，因为任何矩阵与零矩阵的积仍然为零矩阵. 方阵 A 存在逆矩阵的充分必要条件是 A 的行列式不等于零，即

$$|A|\neq 0$$

此时称方阵 A 为非奇异矩阵或非退化方阵. 反之，若方程 A 不可逆，则称 A 为奇异矩阵或退化方阵. 方阵的逆有如下性质:

乘积的逆矩阵，等于分别求逆后的反序乘积，即

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

$$(A_1A_2A_3\cdots A_p)^{-1}=A_p^{-1}\cdots A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$$

对方阵的逆矩阵再求逆，则等于其本身，即

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

单位矩阵的逆仍为单位阵.

$$E^{-1}=E$$

转置矩阵的逆，等于逆矩阵的转置矩阵.

$$(A^{\tau})^{-1}=(A^{-1})^{\tau}$$

对称矩阵的逆仍为对称矩阵.

常数 α 与矩阵 A 乘积的逆为 α 分之一与 A 逆的乘积.

$$(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}$$

一般可逆方阵求逆的方法很多，现主要介绍几种:

(1) 由方阵 A 的伴随矩阵求 A 的逆

设 A_{ij} 为方阵 A 的第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 的代数余子式，则由 $n\times n$ 个代数余子式所构成的矩阵的转置矩阵 A^* (有时用 $\mathrm{adj}A$ 表示)称为 A 的伴随矩阵，即

$$A^*=\mathrm{adj}A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

则方阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 为

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{|A|}\mathrm{adj}A$$

上述方法比较繁琐，它需要计算 n^2 个 $n-1$ 阶行列式的值.

例

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

推算余子式

$$c_{11}=(-1)^2(-1)=-1$$
$$c_{12}=(-1)^3(3)=-3$$
$$c_{21}=(-1)^3(3)=-3$$
$$c_{22}=(-1)^4(2)=2$$

及

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-2-9=-11$$

$$C=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{adj}A=C^{\tau}=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}A}{|A|}=-\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{11} & \frac{3}{11}\\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11}\end{bmatrix}$$

（2）利用初等变换求矩阵的逆

若给定 n 阶可逆方阵 A

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

则可将 n 阶单位阵 E 附加在矩阵 A 的右边，构成新的矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right]$$

然后对上面新矩阵施行一系列初等变换，使之变成

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{array}\right]$$

则变换后的右侧 n 阶方阵就是 A 的逆阵，即

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}$$

（3）几个特殊矩阵求逆方法

对角矩阵的逆阵仍是对角阵