高等数学

Gaodeng Shuxue

主编 ◎ 田俐萍　曹思越

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

高 等 数 学

主　编　田俐萍　曹思越
编　委　徐昌贵　张燕洲　熊　学
符　伟　张　静

西南交通大学出版社
·成 都·

内 容 提 要

本书的主要内容包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、空间解析几何、微分方程、级数和数学软件 Mathematica 的使用等内容。

本书可作为大专院校工科学生和应用技术类学生的教材，也可作为其他学科学生学习《高等数学》的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/田俐萍，曹思越主编．—成都：西南交通大学出版社，2005.8
ISBN 7-81104-095-6

Ⅰ.高...　Ⅱ.①田...　②曹...　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 057897 号

高 等 数 学

主编　田俐萍　曹思越

责任编辑	刘娉婷
责任校对	李　梅
封面设计	王　可
出版发行	西南交通大学出版社出版发行 成都二环路北一段 111 号
邮　　编	610031
发行部电话	(028)87600564
网　　址	http://press.swjtu.edu.cn
电子邮箱	cbsxx@swjtu.edu.cn
印　　刷	成都蜀通印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　　张	20.75
字　　数	518 千字
印　　数	1—3 000 册
版　　次	2005 年 8 月第 1 版
印　　次	2005 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7-81104-095-6/O·010
定　　价	28.80 元

图书如有印装问题，本社负责退换

前　言

“高等数学”是理工类和经济类学生必修的基础课程，也是现代科学技术和社会科学中应用最为广泛的一门学科。在现阶段，各高等院校采用的《高等数学》教材，种类繁多，各有特色，但适应工科及应用技术类的高等数学教材并不多见，编写一本适合工科学生及应用技术类学生的《高等数学》教材是我们多年的愿望。

现在，我们集多年执教“高等数学”课程的实践经验，参考国内外各优秀教材，共同努力，形成了此书。书中融入了我们在长期的教学和科研实践中所积累的心得和体会，以飨读者。

本书在结构体系、内容安排、习题选择等方面，努力体现应用技术型及工科教学的特点，本着“打好基础，够用为度”的原则，把握内容的难易程度，注重学生基本运算能力的训练和分析问题、解决问题的能力的培养。在教材中，尽力做到引进基本概念自然、清晰，除学科中的基本定理外，其余理论证明淡化处理，强调应用。尤其在每章最后部分的“应用与提高”内容中，充分体现了高等数学理论应用于实践的作用。教师可根据需要选讲这部分内容。

为了适应现代化教学的需要和新的计算机发展形势的要求，我们专门在第9章介绍了数学软件Mathematica的操作和使用及在“高等数学”课程中的应用，目的是想使学生在掌握数学理论的同时，能够比较轻松地完成计算，这对学生以后的学习和工作都是非常有益的。

本书由叶建军教授主审，由田俐萍、曹思越任主编，编委为徐昌贵、张燕洲、熊学、符伟、张静，薛正庭参与编写了第4章，另外赵先锋参与了前期的校对工作，在此表示衷心的感谢。

本书虽经几次校对，但恐疏落之处仍在所难免，尚祈读者不吝指正。

编　者

2005年7月

目　　录

第 1 章　函数的极限与连续

1.1　函　数

1.1.1　邻域及其表示法

在高等数学中经常要用到两种特殊的数集——区间和邻域,由于在中学数学中,我们已经学习了区间的有关知识,下面只介绍邻域的概念.

设 $a\in\mathbf{R}$,以点 a 为中心的一个开区间称为点 a 的一个邻域,记为 $U(a)$.设 $\delta\in\mathbf{R}$,且 $\delta>0$,开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的邻域,记为 $U(a,\delta)$,δ 称为邻域的半径.在 $U(a,\delta)$ 中去掉中心 a 所成的集合称为点 a 的去心 δ 邻域,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$.如 $U\left(-2,\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$,$\mathring{U}\left(0,\frac{1}{5}\right)=\left(-\frac{1}{5},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{5}\right)$.两个邻域的中心分别是 $-2,0$,邻域半径分别是 $\frac{1}{2},\frac{1}{5}$.邻域还可以表示为 $U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$,$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$.

1.1.2　函　数

1) 函数的概念

微积分学的研究对象是函数,它的学科理论和数学方法是在函数的基础上建立和实施的.在中学数学中已经学习了函数的有关概念和一些常见的、较简单的函数,由于函数的重要性,有必要对函数概念进行较系统的复习和更深入的讨论.

定义 1　设 X 是给定的一个非空数集.若有两个变量 x 和 y,当变量 x 在 X 中取某个特定值时,变量 y 依确定的关系 f 也有一个确定的值,则称 y 是 x 的函数,f 称为 X 上的一个函数关系,记为 $y=f(x)$.x 称为自变量,y 称为因变量.当 x 取遍 X 中各数,对应的 y 构成一数集 Y,则 X 称为定义域,Y 称为值域.

20 世纪初,随着数学体系中集合论的引入和发展,函数的概念以更抽象的形式表现出来,被明确地定义为集合间的映射关系.这种定义突出了对应规律,是近代数学的函数模型.

定义 1*　设数集 X 和 Y 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集.若存在一个法则 f,使得对于 X 中的每个元素 x,按法则 f 在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的一个映射,也称 f 为定义在 X 上的一个函数,记作

$$f:X\to Y$$

其中 y 称为 x 在映射 f 下的像,记作 $y=f(x)$.而 x 称为 y 在映射 f 下的一个原像,X 称为函

数 f 的定义域，x 在 f 下的全体像构成的集合称为函数 f 的值域.

例如，$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, y=f(x)=x^2$ 是一个二次函数. $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, y=g(x)=\sin x$ 是正弦函数.

在讨论函数时，为方便起见，常用 $y=f(x)$ 或 $f(x)$ 来表示函数 f，记作

$$y=f(x),\quad x\in X.$$

在有些情况下，函数关系是用算式表达的，通常约定函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，而不必再用"$x\in X$"的形式指出函数的定义域。

例如，$y=\sin x$ 表示定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的正弦函数；$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 表示定义域为 $(-\infty,-1)$ 的一个函数.

2）函数的单调性与有界性

① 函数的单调性. 设函数 $y=f(x)$ 在 I 内有定义，若对任意的 x_1、$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 I 内为一单调增加（或减少）的函数.

从函数图形上看，在 I 上单调增加（或单调减少）的函数图像在 I 内从左至右总是上升的（或下降的）. 单调函数中不同的原像 x 在映射 f 下总对应着不同的像 y.

② 函数的有界性. 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的函数值总介于 -1 与 1 之间，即有

$$|\sin x|\leqslant 1,\quad |\cos x|\leqslant 1,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

它们的图像限定在 $y=-1$ 和 $y=1$ 这两条直线之间，而有些函数的图像却不能限定在与 x 轴平行的两条直线之间. 为区分函数的这两种性态，给出下面的定义.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 I 内有定义，若存在一正数 M，使得对任意 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 内有界，否则称 $f(x)$ 在 I 内无界.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，可取 $M=1$；$y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，可取 $M=\dfrac{\pi}{2}$；$y=\dfrac{1}{x}$ 在其定义域内无界.

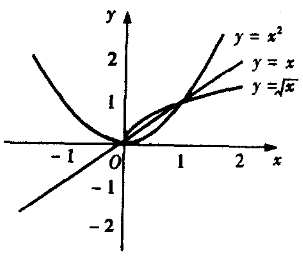
函数是否有界不仅与函数有关，还与自变量的取值范围有关. 如 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0,1]$ 内无界，但在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 内有界.

另外，函数的奇偶性和周期性在中学已经学习过，在这里不再赘述.

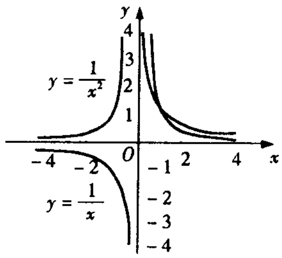
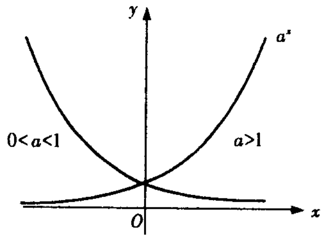
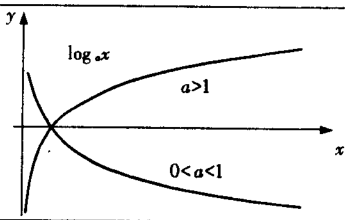
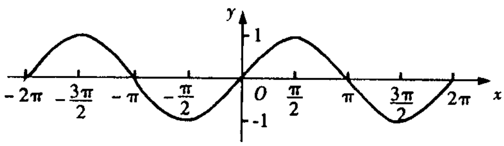
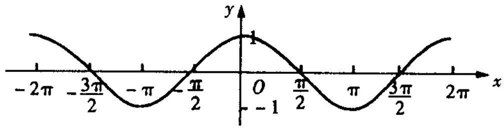
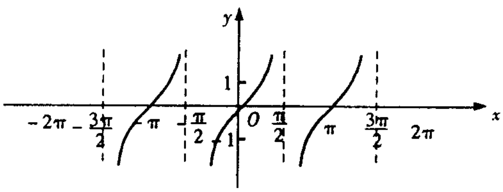
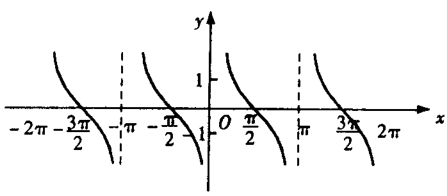
3）基本初等函数

中学学过的五类函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数，为了便于复习，我们将五类基本初等函数的表达式、图形和简单性质列于表 1－1 中.

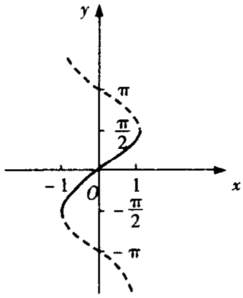
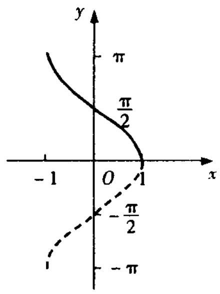
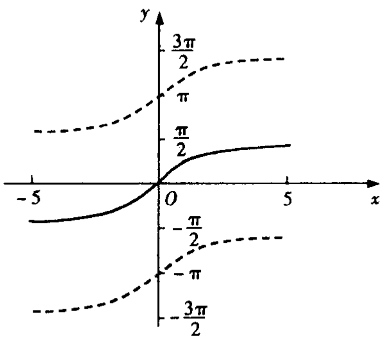
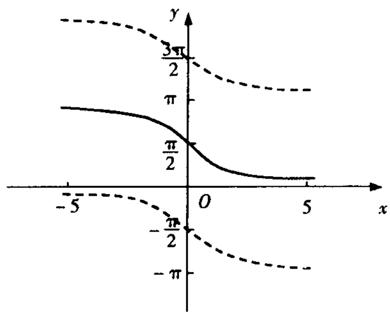
表 1-1

名称	表达式	图　　形	简单性质
幂函数	$y=x^a$		图形都过 (1,1) 点. 当 $x>0$ 时，函数都是单调增加的；α 为偶数时，函数为偶函数；α 为奇数时，函数为奇函数；α 为负数时，函数在 $x=0$ 处断开

续表 1-1

名称	表达式	图　　形	简 单 性 质
			
指数函数	$y=a^x$, $a>0$, $a\neq1$		图形都过(0,1)点. 当 $a>1$ 时函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数在 $(-\infty,+\infty)$ 单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $a>0$, $a\neq1$		图形都过(1,0)点. 当 $a>1$ 时函数在 $(0,+\infty)$ 内单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数在 $(0,+\infty)$ 单调减少
三角函数	$y=\sin x$		以 2π 为周期的周期函数,奇函数,有界,$-1\leqslant\sin x\leqslant1$
	$y=\cos x$		以 2π 为周期的周期函数，偶函数,有界,$-1\leqslant\cos x\leqslant1$
	$y=\tan x$		以 π 为周期的周期函数，奇函数，无界，在 $x=\frac{2k-1}{2}\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处无定义
	$y=\cot x$		以 π 为周期的周期函数，奇函数，无界，在 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处无定义

续表 1-1

名称	表达式	图形	简单性质
反三角函数	$y=\arcsin x$		主值 $y=\arcsin x$ $\left(-1\leqslant x\leqslant 1,\ \frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 函数在$[-1,1]$上单调增加
	$y=\arccos x$		主值 $y=\arccos x$ $(-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\pi)$函数在$[-1,1]$上单调减少
	$y=\arctan x$		主值 $y=\arctan x$, $\left(-\infty<x<+\infty,-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$, 函数在$(-\infty,+\infty)$内单调增加
	$y=\operatorname{arccot} x$		主值 $y=\operatorname{arccot} x(-\infty<x<+\infty$, $0<y<\pi)$, 函数在$(-\infty,+\infty)$内单调减少

4）几种特殊函数

① 常值函数. 函数 $y=C$ 称为常值函数,在这个函数关系中,对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,

其对应的函数值都是 C,这函数的定义域为实数集 $\mathbf{R}$,图像是一条平行于 x 轴的直线.

② 分段函数.

例 1　某城市人均收取电费的规定为:耗电量在 100 度之内(含 100 度),每度 0.32 元;耗电量在 100 度至 150 度之间(含 150 度),每度 0.50 元;耗电量在 150 度以上,每度 0.80 元.写出人均电费 P 与用电量 w 之间的函数关系.

解:
$$P=f(w)=\begin{cases}0.32w & 0\leqslant w\leqslant 100\\ 0.50w & 100< w\leqslant 150\\ 0.80w & w>150\end{cases}$$

当自变量 w 在不同的范围内变化时,用不同的式子来表示 P 与 w 之间的函数关系,这种函数称为分段函数.

例如,绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0,\\ -x & x<0\end{cases}$ 和符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0,\\ 0 & x=0,\\ -1 & x<0\end{cases}$

都是分段函数,如图 1-1、图 1-2 所示.

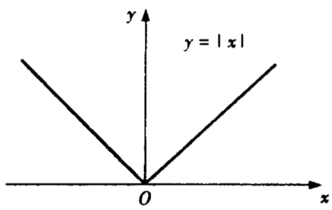


图　1-1

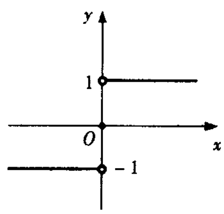


图　1-2

③ 取整函数.函数 $y=[x]$称为取整函数,$[x]$表示不大于 x 的最大整数.

例如,$[-4.5]=-5$,$[0.45]=0$,$[\sqrt{2}]=1$,$[-1]=-1$.函数 $y=[x]$的图像是“阶梯状”的.读者可自己画出.

④ 数列$\{a_n\}$可以看成是定义域为正整数集合 N^+ 的函数,可记为 $a_n=f(n)$,$n\in N^+$.例如,设$\{a_n\}=\left\{\dfrac{1}{2n+1}\right\}$,$f(n)=\dfrac{1}{2n+1}$,$a_5=f(5)=\dfrac{1}{11}$.

5) 反函数

在一个函数关系中,将哪个变量看成自变量,哪个变量看成因变量是由我们人为认定的.如在 $y=f(x)$中,是将 x 作为自变量,用含有 x 的代数式来表达y,认为原像 x 在映射f下的像为 y.如果将 $y=f(x)$恒等变形为 $x=\varphi(y)$,用含有 y 的代数式来表达x,将 y 作为自变量,x 看成是自变量y 的函数,认为原像 y 在映射 φ 下的像为x,则称 $x=\varphi(y)$是 $y=f(x)$的反函数.当然这要求 $y=f(x)$在定义区间 I_x 上是单调的,才能在其值域 I_y 上定义其反函数 $x=\varphi(y)$.

例如,函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上是非单调的,将函数变形为 $x=\pm\sqrt{y}$,当 $y\in(0,+\infty)$时,对应的 x 有两个值,不满足函数关系,不能定义其反函数.但对 $y=x^2$,$x\in[0,+\infty)$,函数在定义域上是单调增加的,可在其值域$[0,+\infty)$上定义其反函数 $x=\sqrt{y}$.

从以上讨论可知 $y=f(x)$与 $x=\varphi(y)$在 xOy 平面内是同一条曲线,只是表示自变量与因变量的数轴不同.由于人们习惯上总是用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以用$y=\varphi(x)$

替代 $x=\varphi(y)$,仍称 $y=\varphi(x)$为 $y=f(x)$的反函数,记作 $y=f^{-1}(x)$.事实上,$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$互为反函数.

例 2 求(1) $y=3x+1$; (2) $y=\ln(x+1)$的反函数.

解:(1) $y=3x+1$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的函数, 值域为$(-\infty,+\infty)$.将 $y=3x+1$ 恒等变形为 $x=\dfrac{y-1}{3}$,所以所求反函数为 $y=\dfrac{x-1}{3}$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) $y=\ln(x+1)$在定义域$(-1,+\infty)$内是单调增加的函数,值域为$(-\infty,+\infty)$,将 $y=\ln(x+1)$恒等变形为 $x=e^y-1$,所求反函数为 $y=e^x-1$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

若定义在 I 上的函数 $y=f(x)$是单调增加(或减少)的,其值域为 I',则它一定具有反函数,且它的反函数 $y=f^{-1}(x)$在 I'上也是单调增加(或减少)的.

例如,$y=x^3+1$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的,它的反函数 $y=\sqrt[3]{x-1}$在其值域$(-\infty,+\infty)$也是单调增加的. $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上是单调减少的,它的反函数 $y=\arccos x$ 在$[-1,1]$上也是单调减少的.

函数 $y=f(x)$的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像有什么样的关系呢?

若(x_0,y_0)是曲线 $y=f(x)$上一点,(x_0,y_0)也是曲线 $x=\varphi(y)$上一点,则(y_0,x_0)是曲线 $y=\varphi(x)$即 $y=f^{-1}(x)$上一点.可知曲线 $y=f(x)$与曲线 $y=f^{-1}(x)$关于直线 $y=x$ 对称.

6) **复合函数**

在实际问题中,我们遇到的许多函数都是由五类基本初等函数和常值函数经过有限次的四则运算和"叠置"后构成的.如函数 $y=\ln(x^2+1)$可看成是由两个函数 $y=\ln u$,$u=x^2+1$"叠置"而构成的.通常称两个函数的这种"叠置"为两个函数的"复合",所构成的函数称为复合函数.在复合函数 $y=\ln(x^2+1)$中,变量 u 在 $y=\ln u$ 中是自变量,在 $u=x^2+1$ 中是因变量,称具有这种"双重身份"的变量 u 为中间变量,x 是(最终)自变量,y 是(最终)因变量.

一般地,设有函数 $y=f(u)$,$u\in D_1$ 和函数 $u=\varphi(x)$,$x\in D_2$,则 $y=f[\varphi(x)]$是关于 x 的函数,称此函数是由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,称 u 为中间变量. $y=f[\varphi(x)]$的定义域为 $D=\{x\mid x\in D_2$ 且 $\varphi(x)\in D_1\}$.

注:并不是任意两个函数都可以构成复合函数的,若设 $u=\varphi(x)$的值域为 E,必须有 $D_1\cap E\neq\varnothing$时才能复合.例如,$y=\ln u$,$u=\sin x-2$,$D_1=(0,+\infty)$,$E=[-3,-1]$,这两个函数不能构成复合函数.表达式 $y=\ln(\sin x-2)$不表示函数.

另外,两个以上的函数也可以构成一个复合函数.

例 3 指出下列函数的复合关系:

(1) $y=e^{\sqrt{x}}$; (2) $y=\sin\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$; (3) $y=\arctan\sqrt{e^x-1}$.

解:(1) $y=e^{\sqrt{x}}$;是由 $y=e^u$,$u=\sqrt{x}$复合而成的.

(2) $y=\sin\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$是由 $y=\sin u$,$u=\dfrac{1}{x}+1$ 复合而成的.

(3) $y=\arctan\sqrt{e^x-1}$是由 $y=\arctan u$,$u=\sqrt{v}$,$v=e^x-1$ 复合而成的.

由上例可知,在分析一个函数的复合关系时,往往从"外层"函数开始逐层分解.一般说来,分解过程中各中间变量通常是基本初等函数或是它们经过有限次四则运算后所成的函数.

例 4　求下列函数的定义域：

(1) $y=\ln\sin\sqrt{x}$；　　(2) $y=\arcsin\dfrac{1}{x^2+1}$.

解：(1) 要使函数 $y=\ln\sin\sqrt{x}$ 有意义，必需 $x\geqslant 0$ 且 $\sin\sqrt{x}>0$，即$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ \sin\sqrt{x}>0,\end{cases}$解此不等式组得 $2n\pi<\sqrt{x}<(2n+1)\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$，即

$$(2n\pi)^2<x<[(2n+1)\pi]^2\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

(2) 要使 y 有意义，必须 $\left|\dfrac{1}{x^2+1}\right|\leqslant 1$，即 $x^2+1\geqslant 1$，所以定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$.

例 5　设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(e^x)$；　　(2) $f(\arctan x)$.

解：(1) 要使函数有意义，则需 $0\leqslant e^x\leqslant 1$，解得 $-\infty<x\leqslant 0$.

(2) 要使函数有意义，需 $0\leqslant\arctan x\leqslant 1$，解得 $0\leqslant x\leqslant\tan 1$.

习题 1－1

1. 求下列各函数的定义域，并表示在数轴上.

(1) $g(t)=\dfrac{2t+1}{\sqrt{t^2-3t+2}}$；　(2) $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$；　(3) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$；

(4) $f(x)=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$；　(5) $F(x)=\log_2(\log_2 x)$；　(6) $g(x)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$　$(a>0,\ a\neq 1)$.

2. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=(0,1)$，求：(1) $f(\sin 2x)$；(2) $f(x+a)+f(x-a)$　$(a>0)$ 的定义域.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$；　(2) $u=\sin(\cos x)$；　(3) $y=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$　$(a>0,\ a\neq 1)$；

(4) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$；　(5) $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1 & x<0,\\ 0 & x=0,\\ 1 & x>0;\end{cases}$　(6) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$.

4. 指出下列函数在指定区间上是否有界.

(1) $y=\operatorname{arccot}x$　$x\in(-\infty,\ +\infty)$；　(2) $y=\arctan x\ \dfrac{1}{x}$　$x\neq 0$；

(3) $y=|x|-x$　$x\in(-\infty,\ +\infty)$；　(4) $y=x^2\sin x$　$x\in(-\infty,\ +\infty)$；

(5) $y=x\cos x$　$x\in[0,\ 10000]$.

5. 求下列函数的反函数.

(1) $y=10^x-1$；　(2) $y=a\sin bx$　$(a\neq 0,b\neq 0)$；

(3) $g(x)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$　$(a>0,a\neq 1)$.

6. 分析下列复合函数的复合关系，指出它们是由哪些函数复合而成的.

(1) $y=\sin^2 x$；　(2) $y=5^{(2x+1)^2}$；　(3) $y=\ln\cos 2x$；

(4) $z=(\arcsin\sqrt{x})^2$；　(5) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$；　(6) $u=e^{\sin(x^2+1)}$.

7. 已知 $y=\ln u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1+\tan x$，将 y 表示成 x 的函数.

8. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

9. 设 $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $g[g(x)]$.

10. 对于定义在$[-a,a]$上的任意函数 $f(x)$，证明：

(1) $f(x)+f(-x)$是偶函数，$f(x)-f(-x)$是奇函数；

(2) $f(x)$可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

1.2 极 限

极限是微积分学中的一个最基本、最重要的概念，微积分理论是在极限概念的基础上展开的，它是微积分学的奠基石.

极限描述的是变量在某一变化过程中的变化趋势.例如，我国古代的哲学名著《庄子》中描述过“一尺之棰，日取其半，万世不竭”.从数学的角度来理解这段话，一尺长的木棒每天截取一半后，所剩之长度依次为$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$这无穷多个数构成无穷数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$.随着天数 n 的增加，此数列的一般项 $a_n=\frac{1}{2^n}$与零日益接近，虽不可能达到零，但当天数 n 无限增大时，a_n 的变化趋势是与零无限接近的.

又如，函数 $y=\frac{1}{x}+1$，当 x 变化时，函数值 y 也在变化之中，随$|x|$无限增大，y 的变化趋势是与确定的常数 1 无限接近；当$|x|$与零无限接近时，对应的 y 的变化趋势是绝对值无限增大.

这种研究变量的变化趋势问题，人们在研究自然科学、客观世界和社会科学中经常遇到，如从市场变化趋势来预测产品的需求状况，从企业的发展趋势来判断其前景，这些都可以看成数学的极限思想的具体应用.

下面我们详细讨论两类极限：数列极限与函数极限.

1.2.1 数列的极限

观察下列各无穷数列$\{a_n\}$：

(1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$；　　(2) $2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots$；

(3) $0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \cdots$；

(4) $1,\ 0,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ -\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ -\frac{1}{6},\ \cdots$；

(5) $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots$.

考虑当 n 无限增大时（用 $n\to\infty$表示），各数列的一般项 a_n 变化的趋势.在数列(1)、(3)、(4)中，当 $n\to\infty$时一般项 a_n 与一个确定的常数A 无限接近：(1)中，$a_n=\frac{1}{n}$从大于零的方向与零无限接近；(3)中，$a_n=1-\frac{1}{n}$从小于 1 的方向与 1 无限接近；(4)中，a_n 以大于零和小于零、时而达到零的变化状态与零无限接近.它们变化的共有特点就是数列中充分靠后的那些项

的变化逐渐趋于稳定，稳定在一个常数 A 附近．而数列(2)和(5)没有上述特点，当 $n\to\infty$ 时，(2)中，$a_n=2n$ 无限增大；(5)中，$a_n=(-1)^{n-1}$在 1 和 -1 之间不停地跳动．

为了描述这些现象，我们给出以下数列极限的概念：

一般地，给定一个无穷数列$\{a_n\}$，若当 n 无限增大时，一般项 a_n 无限趋近于一个固定的常数A，则称当 n 无限增大时，数列$\{a_n\}$以 A 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \quad 或 \quad a_n\to A \quad (n\to\infty)$$

这时也称 $n\to\infty$ 时，数列$\{a_n\}$收敛于 A．否则，称数列$\{a_n\}$发散．

前面(1)、(3)、(4)中的数列是收敛的，它们分别收敛于 0，1，0；而数列(2)和(5)都是发散的，发散数列没有极限．

例 1　判断下列数列是否收敛，若收敛，求出其极限值 A．

(1) $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots$；　　(2) $\frac{1}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{7},\ \frac{7}{9},\ \cdots$；

(3) $0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.000\,1,\cdots$；　　(4) $\sqrt{1},\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \cdots$．

解：(1) $a_n=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$．当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}$与零无限接近，从而 $1+\frac{1}{n}$与 1 无限接近，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$．

(2) $a_n=\frac{2n-1}{2n+1}=1-\frac{2}{2n+1}$．当 $n\to\infty$ 时，$\frac{2}{2n+1}$与零无限接近，从而 $1-\frac{2}{2n+1}$与 1 无限接近，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$．

(3) $a_n=\frac{1}{10^n}$．当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{10^n}$与零无限接近，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=0$．

(4) 当 $n\to\infty$ 时，$\sqrt{n}$无限增大，a_n 不与任何一个确定的常数无限接近，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在．

下面我们讨论用精确的数学语言来定义数列极限概念．

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，设想在数轴上标出定数 A 和数列的各项$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$．由于随 n 不断增大，a_n 要无限接近于A，从直观上看来，当 n 相当大后，对应的点 a_n 都要落在点A 的附近，与点 A 的距离很小．现任意给定一个正数 ε，作 A 的ε 邻域$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$，凡落在此邻域中的那些点 a_n 与A 的距离必小于ε．对于任意给定的 ε 邻域，$\{a_n\}$中的各项或者落在邻域内，或者落在邻域外．如果假设有无穷多项落在邻域之外，就是数列中无论多么靠后的项中，总存在这样的项 a_n，它与 A 的距离大于ε，这时当然不能说 a_n 无限接近于A．所以只能是数列中的有限项落在邻域之外．设这有限项中的最大下标是 N，于是下标大于 N 的所有项，亦即第 N 项之后的各项a_n 统统落在$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$中，所有这些 a_n 与点A 的距离小于ε(见图1-3)，用数学式子表示就是$|a_n-A|<\varepsilon$(当 $n>N$)，若要 a_n 能无限接近于A，就不能仅对某一固定的ε 找到如上所描述的N，而应该对任意的正数 ε，都能找到相应的 N．

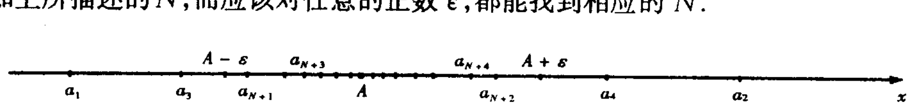


图　1-3

综上所述,所谓数列$\{a_n\}$无限接近于A,就是对于任意给定的正数ε,都能找到这样一个下标N(它通常与ε有关)使a_N以后的所有项全部落在区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$之内.

定义1 如果数列$\{a_n\}$与常数A有下列关系:对于任意给定的正数ε(无论它多么小)总存在正整数N,使得对于$n>N$时的一切a_n,不等式$|a_n-A|<\varepsilon$都成立,则称常数A是数列$\{a_n\}$的极限.或称数列$\{a_n\}$收敛于A,记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

这个定义是用严格的数学逻辑语言叙述的,称为数列极限的"$\varepsilon-N$"定义.

定理1 若数列$\{a_n\}$有极限,则极限唯一.

证:用反证法.假设同时有$a_n\to A$和$a_n\to B$,不妨设$A<B$,取$\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}$,由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$可知存在正整数$N_1$,当$n>N_1$时,有$|a_n-A|<\dfrac{B-A}{2}$,即

$$\frac{3A-B}{2}<a_n<\frac{B+A}{2} \tag{1}$$

成立.

由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=B$,应存在正整数$N_2$,当$n>N_2$时,有$|a_n-B|<\dfrac{B-A}{2}$,即

$$\frac{B+A}{2}<a_n<\frac{3B-A}{2} \tag{2}$$

成立.

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,当$n>N$时,(1)和(2)两式同时成立,这是不可能的,所以定理结论成立.

例2 证明数列$0,\dfrac{3}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{4},\dfrac{4}{5},\cdots,\dfrac{n+(-1)^n}{n},\cdots$以1为极限.

证:$|a_n-1|=\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$.对任意给定的$\varepsilon>0$,要使$|a_n-1|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,只要$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当$n>N$时,就有$|a_n-1|<\varepsilon$恒成立,由定义1可知,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}=1.$$

例3 证明:当$0<|q|<1$时,$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

证:对任意给定的正数ε(不妨设$\varepsilon<1$),要使

$$|a_n-0|=|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon,$$

只要$n\ln|q|<\ln\varepsilon$,即$n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.选取$N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$,只要$n>N$,就有$|a_n-0|=|q|^n<\varepsilon$恒成立,所以

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0.$$

根据定义1,对于有极限的无穷数列$\{a_n\}$,可以认为若任意的正数ε给定,找到与ε有关的N后,数列中的项分为两部分:前有限项N项及第N项之后的无穷多项.这无穷多项所对应的点都落在区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$之内,最多只有前$N$项所对应的点落在区间之外.

若取$\varepsilon=1$和$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|A|+1\}$,则对任意项$a_n$有$|a_n|\leqslant M$,所

以有以下结论:

定理 2　有极限的数列是有界数列.

但注意,有界数列不一定收敛.如数列 $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots$有界,但无极限.即数列有界是数列收敛的必要条件.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,且 $A>0$,在上述讨论中,由 ε 任意给定的特点,可选取某个 ε,使区间 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)\subset\mathbf{R}^+$,则有定理 3 的结论.

定理 3　若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则存在正整数 N,当 $n>N$ 时,都有 $a_n>0$(或 $a_n<0$).

定理 3 说明,在有极限的数列$\{a_n\}$中,总存在自然数 N,N 项之后的无穷多项中的每一项的正负与极限值的正负保持一致.这个性质也称为数列极限的保号性.

1.2.2　函数极限

对于函数的极限,我们主要讨论以下两种情况:

1) 自变量趋于无穷时函数的极限

若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,从函数的角度可认为当自变量 n 在正自然数集 $\mathbf{N}^+$ 中取值,且 $n\to\infty$时,对应的一系列函数值 a_n 无限地趋于常数A.对于一般的函数 $y=f(x)$,我们也需要考虑类似的情况.

设函数 $y=f(x)$,若当$|x|$无限增大时,对应的函数值 $f(x)$都存在,且无限趋近于一个确定的常数 A,则称当 x 趋于无穷时,$f(x)$以 A 为极限.

例如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$,当自变量$|x|$无限增大时,对应的函数值的变化趋势是与常数零无限接近(见图 1-4).则当 x 趋于无穷时,$\dfrac{1}{x}$以零为极限.这里$|x|$无限增大,包括 x 可取正值而无限增大,以及 x 可取负值,其绝对值无限增大两种情况.

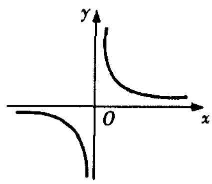


图　1-4

定义 2　如果函数 $f(x)$与确定的常数 A 有如下关系:对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在着正数 X,使得当$|x|>X$ 时对应的函数值$f(x)$都存在且满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数$f(x)$当 $x\to\infty$时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\quad 或\quad f(x)\to A\quad (x\to\infty).$$

当 $x>0$ 而$|x|$无限增大,可记为 $x\to+\infty$;当 $x<0$ 而$|x|$无限增大,可记为 $x\to-\infty$.

例如,观察基本初等函数的图像可知:$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$($n$ 为正整数);$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在;

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2};\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2};\ \lim_{x\to-\infty}2^x=0;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0.$$

2) 自变量趋于有限值 x_0 时函数的极限

考虑函数 $f(x)=2x+1$ 当自变量 x 与 1 无限接近时,对应的函数值 $f(x)$的变化趋势.