中学数学奥林匹克丛书

初等数论

高中册

ZHONGXUESHUXUE AOLINPIKECONGSHU

主　编：梅向明
副主编：张君达

北京师范学院出版社

中学数学奥林匹克丛书

初等数论

（高中册）

主　编　梅向明　副主编　张君达
作　者　米道生　吴建平

北京师范学院出版社
1988年·北京

前　言

在悠久的数学史册之中，记载着人们由于企图解一些数学难题而使基础理论得到突破性发展的光辉业绩。无论是无理数的引入，非欧几何的诞生，还是群论的发展等，都毋庸置疑地证明了这一点。反过来，基础理论的发展又为数学家们提出了诱人涉猎的难题。

奥林匹克运动起源于古希腊(公元前776年)，这是力量、灵活与美的竞赛。"数学是思维的体操"，解数学难题的竞赛同样被称为数学奥林匹克。

1959年，罗马尼亚向东欧七国提议举办第一届"国际数学竞赛"，简称IMO (International Mathematical Olympiad)，以后每一年举行一次，参加的国家逐渐增多。这便是沿袭至今的"国际中学生数学奥林匹克"。

1956年在我国北京，上海等地开始举办省、市一级的高中数学竞赛。1978年开始举行全国性高中数学竞赛；1983年开始举行全国性初中数学竞赛，以后每年举行一次。同时，我国中学生还参加了其他国家举办的一些中学生数学竞赛的通讯比赛。

多年的数学竞赛实践证明，广泛与深入地开展中、小学的数学课外活动，科学与合理地举办各级数学竞赛是促进数学教育的发展，提高我国青少年数学素质的一个积极因素。

面临高难度的国际中学生数学竞赛，为使我国中学生在IMO中能跻身于世界数学强国之列，我们尤为突出地感到亟须研究与探讨IMO选手的培训方式、教材以及相应的教育手段。

1985年4月北京数学会创办了北京数学奥林匹克学校。三年来，在全体教师和工作人员的努力下，在教育部门与家长的大力支持下，北京数学奥林匹克学校为提高青少年的数学素质，培养数学优秀人才作出了一定的贡献。学校的学生在“华罗庚金杯”少年数学邀请赛，高、初中全国数学联赛以及IMO中取得了一定的成绩。

然而，这仅仅是开始！当我们踏上攀登数学奥林匹克高峰的征途时，我国的中学生以及他们的教练员将肩负着光荣而艰巨的任务。

为进一步探讨数学业余学校的教材建设问题，在对三届学生施教实验的基础上，我们编写了《中学数学奥林匹克丛书》。希望《丛书》能为数学业余学校提供选读教材，能为老师与家长辅导学生提供参考资料，能成为中学生课余数学学习的良师益友。

由于我们水平有限，教学实践经验又不很充足，这套《丛书》一定会有许多欠缺之处，希望各省、市数学奥林匹克教练员和学生们，以及广大的专家和读者批评指正。

梅向明　张君达

1988年2月2日

目　　录

第一章　整除性理论

整除性理论是初等数论的基础，其它内容都与之有着直接或间接的联系。在初等数论（初中册）中，大家已经较为系统地学习了整除的有关概念和性质，因此在这一章我们将采用分专题的办法，着重围绕解题方法、题目类型，特别是素数、互素和特殊数等内容，介绍有关整除性问题。

§1　整　除

两个整数的和、差、积仍然是整数，但是用一个不等于零的整数去除另一个整数，其商就不一定是整数了。

定义 1　设 a,b 是任意整数，其中 $b\neq 0$，如果能找到一个整数 q 使得

$$a=bq,$$

那么我们就称 a 能被 b 整除，或 b 整除 a，记作 $b|a$。此时 b 称为 a 的因数，a 称为 b 的倍数。如果不存在 q，就说 b 不整除 a，记作 $b\nmid a$。

整除具有许多非常重要的性质。

定理 1　（1）$a|a$；

（2）如果 $a|b$，$b|a$，则 $a=b$ 或 $a=-b$；

（3）如果 $a|b$，$b|c$，则 $a|c$。

定理 2　如果 $c|a$，$c|b$，则对任意的整数 m,n，有

$$c|ma+nb.$$

定理 3　设 b 是非零的任意整数，a 是任意整数，则唯一存在整数 q 和 r，使得

$$a=bq+r,\ 0\leqslant r<|b|.$$

其中 q 和 r 分别称为 b 除 a 的商及余数。

定义 2　设 a,b 是不全为零的整数。若整数 d 是 a 和 b 的因数，则称 d 为 a 和 b 的一个公因数。公因数中最大的一个称为最大公因数，记作 (a,b)。如果 $(a,b)=1$，则称 a 和 b 互素。

定理 4　设 $(a,c)=1$，（1）如果 $a|bc$，则 $a|b$；（2）如果 $a|b$，$c|b$，则 $ac|b$。

定义 3　大于 1 且除了 1 和它自身外无其它因数的整数称为素数（或质数）。1 以外的非素数的正整数称为合数。

定理 5　设 p 是素数，如果 $p|ab$，则 $p|a$ 或 $p|b$。

在处理某些与整除性有关的问题时，下面的公式是十分有用的。

定理 6　（二项式定理）设 n 是正整数，则对所有的 a 和 b，有

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ia^{n-i}b^i+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n.$$

其中

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots2\times1},$$

在$0\leqslant k\leqslant n$时，C_n^k是整数。

定理 7　对于自然数 n，有

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1});$$

对于奇数 n，有

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+(-1)^k a^k b^{n-k-1}+\cdots+b^{n-1}).$$

例 1 设 n 是自然数，证明：

$$n(n^2-1)(n^2-5n+26)$$

可以被 120 整除。

分析：通过观察发现，

$$n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$$

恰好是三个连续自然数的乘积。这启发我们想到二项式系数，由定理 6 知道，C_n^k $(0\leqslant k\leqslant n)$ 是整数，这样其展开式的含义就变为：任意k个连续自然数的乘积一定能被$k!$整除。而题目中的 120 恰好等于5!

证明 记 $f(n)=n(n^2-1)(n^2-5n+26)$。当 n 为最初几个自然数时，$f(n)$是能被 120 整除的，即$f(1)=0$，$f(2)=120$和 $f(3)=480$。当$n>3$时，

$$f(n)=(n-1)n(n+1)(n-2)(n-3)+20(n-1)\cdot n\cdot(n+1).$$

$f(n)$的第一部分是五个连续自然数的乘积，它能被 $5!=120$ 整除；第二部分中，$(n-1)\cdot n(n+1)$是三个连续自然数的乘积，能被$3!=6$整除，所以 $20(n-1)n(n+1)$可被$20\times6=120$整除。

从而$f(n)$能被 120 整除。

例 2 设 n 是正奇数，试证明

$$1^n+2^n+\cdots+9^n-3(1^n+6^n+8^n)$$

能被 18 整除。

分析：注意到$18=2\times9$，而$(2,9)=1$，所以只要分别能证明原式既被2整除，同时也被9整除即可。在证明原式是9的倍数时，要借助因式分解公式。

证明 显然

$$1^n+2^n+\cdots+9^n \text{ 和 } 3(1^n+6^n+8^n)$$

均是奇数，从而其差必为偶数，可知原式是2的倍数。根据定理7，由于n是奇数，则有

$$1^n+8^n,\ 2^n+7^n,\ 3^n+6^n \text{ 和 } 4^n+5^n$$

都是9的倍数。故原式可以变形为

$$9^n+(1^n+8^n)+(2^n+7^n)+(3^n+6^n)+(4^n+5^n)$$
$$-3(1^n+8^n)-3\times6^n,$$

可见每一项都是9的倍数。

命题成立。

例3 试证明当n为自然数时，$\frac{(3n)!}{6^n\cdot n!}$是整数。

分析：本题还可以换一种提法，$(3n)!$是$6^n n!$的倍数，与阶乘有关的整除问题比较多，处理这种问题的办法就是恰当地约分。

证明 分子是$3n$个连续自然数的乘积，最大的是$3n$。而分母也是一些自然数的乘积，最大的要超过$3n$。我们先从$3n$考虑，令$N=3^n\times n!$，则

$$N=3^n\times1\times2\times3\times\cdots\times n=3\times6\times9\times\cdots\times(3n).$$

而$(3n)!=1\times2\times3\times\cdots\times(3n-2)(3n-1)(3n)$，可知$N$是$(3n)!$中一部分数的乘积。于是从$(3n)!$中消去$N$后，必然还含有$n$个偶数，所以

$$\frac{(3n)!}{6^n\cdot n!}=\frac{(3n)!}{2^n\cdot N}$$

必是整数。

例 4 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是一组数，它们中的每一个都取 1 或 -1，而且$a_1a_2a_3a_4+a_2a_3a_4a_5+\cdots+a_na_1a_2a_3=0$，证明 n 必须是 4 的倍数。

分析：本题只需借助奇偶数的分析。

证明 由于每个a_i均为 1 或 -1，从而每一个 $a_ia_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}$也只能取 1 或 -1，而这 n 个数的和等于零，故取 $+1$ 和 -1 的个数是相等的，因此 n 必是偶数。设 $n=2m$。

再考虑这 n 项的乘积，有

$$(a_1a_2\cdots a_n)^4=1,$$

于是这 n 项中取 -1 的项(m项) 也一定是偶数，即 $m=2k$，从而 n 是 4 的倍数。

说明：本题可以进一步推广为：设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是一组仅取 $+1$ 或 -1 的数，而且 $a_1a_2\cdots a_{2m}+a_2a_3\cdots a_{2m}a_{2m+1}+\cdots+a_na_1\cdots a_{2m-1}=0$ $(2m<n)$，证明 n 是 4 的倍数。

例 5 设 n 和 k 均是正整数，k 是奇数，记

$$S_k=1^k+2^k+\cdots+n^k,$$

求证：$S_1|S_k$。

分析：本题所采用的办法将与例 2 有类似之处。首先要注意到$S_1=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，要证明$S_1|S_k$，只要证明$n(n+1)|2S_k$即可。而$(n, n+1)=1$，所以只须分别证明$n|2S_k$和$(n+1)|2S_k$即可。此外还要用到因式分解公式。

证明 由于

$$\begin{aligned}2S_k&=1^k+2^k+\cdots+n^k+n^k+(n-1)^k+\cdots+1^k\\&=[1^k+n^k]+[2^k+(n-1)^k]+\cdots+[n^k+1^k],\end{aligned}$$

而 k 是奇数，所以由因式分解公式可知$2S_k$是 $n+1$ 的倍数。同理

$$2S_k=0^k+1^k+2^k+\cdots+n^k+n^k+(n-1)^k+\cdots+0^k$$
$$=[0^k+n^k]+[1^k+(n-1)^k]+\cdots+[n^k+0^k],$$

所以 $2S_k$ 也是 n 的倍数，从而

$$S_1|S_k.$$

例6 设 n 是大于 1 的自然数，证明

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

不是整数。

分析： 令原数为M，若M是整数，则对任意的整数A，AM也一定是整数。于是我们就要想办法找到这样一个A，使得$\frac{A}{i}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 中只有一项不是整数，而其余的项都是整数，这样就会导致矛盾。

证明 很显然，每一个自然数都可以表示成$2^k\cdot l$的形式，其中 k 为非负整数，l 是奇数。设$1,2,\cdots,n$分别等于$2^{\lambda_i}\cdot l_i$，$\lambda_i\geqslant 0$，l_i是奇数，$i=1,2,\cdots,n$。由于$n>1$，所以 $1,\cdots,n$ 中至少有一个是偶数，即至少有$\lambda_i>0$。设λ是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$中最大的数，我们先来证明，在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中只有一个与 λ 相等。否则设$1\leqslant k<j\leqslant n$，$\lambda_k=\lambda_j=\lambda$，$k=2^{\lambda_k}\cdot l_k$，$j=2^{\lambda_j}l_j$。因为$k<j$，所以$l_k<l_j$。于是就有偶数 h 在 l_k 和 l_j之间，故在 k 和 j 之间有 $2^\lambda\cdot h$，而 $2|h$，就有 $h=2m$，$2^\lambda\cdot h=2^{\lambda+1}\cdot m$。这与 λ 是最大数矛盾。

令 $A=2^{\lambda-1}l$，其中 $l=l_1\cdot l_2\cdots l_n$，这个 A 就是我们所要找的。此时

$$AM=\frac{L}{2}+N,$$

其中$\frac{L}{2}=\frac{A}{2^{\lambda}\cdot l_0}$，$l_0$是奇数，是$l_1,l_2,\cdots,l_n$中使2的指数为$\lambda$的那一个。$N$是整数。显然$\frac{L}{2}$不会是整数，故原来设$M$是整数是错误的，即原数不是整数。

说明：本题所涉及的知识不多，但方法是比较特殊的，下面的题目也可以考虑用类似的办法。

问题1　设m和n是自然数，证明

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1},$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+m}$$

都不是整数。

问题2　设$m>n\geqslant 1$，$a_1<a_2<\cdots<a_s$是不超过m且与n互素的全部正整数，记

$$S_m^n=\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_s}$$

则S_m^n不是整数。由此可直接推出$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}$ $(n\geqslant 0)$不是整数。

例7　设p和q均为自然数，使得

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319},$$

证明p可被1979整除（第21届IMO）。

分析：讨论有限项和的整除问题，在前面我们已有所接触，其中一个重要的解题途径是将有限个加项进行适当地调整，重新组合，以发现一些隐藏的规律。

证明

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1319}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1319}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{659}\right)$$

$$=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$

$$=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)$$

$$=1979\times\left(\frac{1}{660\times1319}+\frac{1}{661\times1318}+\cdots+\frac{1}{989\times990}\right).$$

将等式两边同乘以1319!，得

$$1319!\times\frac{p}{q}=1979\cdot N,$$

其中N是自然数。由此可见 1979 整除 $1319!\times p$，但是注意到 1979 是一个素数，同时 1979 显然不能整除 1319!，所以 p 能被 1979 整除。

说明：题目中的1979只是为了与当年的年份一致而已。一般地，可以将 1979 换成一个形如 $3k+2$ 的素数，相应地将 1319 换为 $2k+1$（k 为自然数）。

例 8 设自然数 a,b 的末位数字是 3 或 7，试证对任意自然数 n 和 m，$a^{4n+2m}-b^{2m}$ 能够被 20 整除。

分析：既然 a 的末位数字是 3，那么它就可以写成 $10a_1+3$ 的形式，再利用二项式定理进行分析。

证明 不妨先设 $a=10a_1+7$，$b=10b_1+3$，则

$$a^{4n+2m}-b^{2m}$$
$$=(10a_1+7)^{4n+2m}-(10b_1+3)^{2m}$$
$$=[10(10a_1^2+14a_1+4)+9]^{2n+m}-[10(10b_1^2+6b_1)+9]^m$$
$$=[10a_2+9]^{2n+m}-[10b_2+9]^m,$$

其中 $a_2=10a_1^2+14a_1+4$，$b_2=10b_1^2+6b_1$ 均是偶数。由二项式定理知道，只要能证明 $9^{2n+m}-9^m$ 能被 20 整除，那么原数就一定是 20 的倍数了。而 $9^{2n+m}-9^m=9^m(9^{2n}-1)=9^m(81^n-1)$，其中 81^n-1 是能被 20 整除的。

对于其它情况，类似于上述讨论同样可以得到相同的结果。故 $a^{4n+2m}-b^{2m}$ 能被 20 整除。

例 9 如果 $m=3n+1$，n 为自然数，求证 $1+3^m+9^m$ 能被 13 整除。

分析：绝大多数整除问题，是与自然数有关的，因此数学归纳法也是处理这类问题的一种重要手段，而选择归纳的对象是证明的关键。

证明 （1）当 $n=1$ 时，原式 $=9^4+3^4+1=6643$ 是 13 的倍数。

（2）假设当 $n=k$ 时，命题成立，即 $1+3^{3k+1}+9^{3k+1}$ 能被 13 整除，现在考虑 $n=k+1$ 时的情况。由于

$$1+3^{3(k+1)+1}+9^{3(k+1)+1}$$
$$=1+3^{3k+4}+9^{3k+4}$$
$$=1+27\times3^{3k+1}+729\times9^{3k+1}$$
$$=27+27\times3^{3k+1}+27\times9^{3k+1}+702\times9^{3k+1}-26$$
$$=27(1+3^{3k+1}+9^{3k+1})+702\times9^{3k+1}-26$$

显然上式是能被 13 整除的，这就证明了 $n=k+1$ 时成立。所以原命题对任意的自然数都成立。

练 习 一

1. 试证：若自然数a不是 9 的倍数，则a与 ka($k=2$ 或 5)的各位数字之和是不相同的。

2. 设$n>0$，$a\geqslant 2$，则n^a能够表示成 n 个连续的奇数的和。

3. 证明：没有一个形如2^n(n为任意自然数) 的数可以表示成两个或两个以上连续自然数之和（波兰1960～1961年竞赛题)。

4. 数1978^n和1978^m的最后三位数相等，试求出正整数m和n，使得$m+n$取最小值 (这里$n>m\geqslant 1$)(第20届IMO)。

5. 若p是一个素数，那么

$$2^p+3^p$$

不能表示为n^k的形式，其中n和k均为自然数，而且$k>1$ (西德1981年竞赛题)。

6. 证明：大于 $(\sqrt{3}+1)^{2n}$ 的下一个整数能被 2^{n+1} 整除 (第 6 届美国普特南试题)。

§2 综 合 题

解决与整除有关的问题往往需要较强的解题技巧，这一点在§1 中已经有所反映。本节将围绕整系数多项式与整值多项式，组合数与阶乘数，数列等内容讨论。虽然在初等数论（初中册）中已经出现了整值多项式的内容，但是本节我