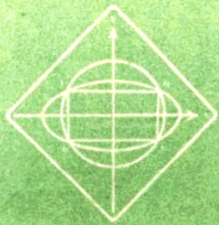
中学生自学丛书



数学习题解

河南人民出版社

中学生自学丛书

数学习题解

忻方达

河南人民出版社

数学习题解

忻方达

河南人民出版社出版
郑州二七印刷厂印刷
河南省新华书店发行

787×1092毫米32开本 $14\frac{5}{8}$印张 210千字
1979年9月第1版 1979年9月第1次印刷
印数1—200，000册
统一书号7105·92 定价 1.15 元

内 容 提 要

本书是一本中学数学的综合性题解，包括有代数、几何（平面、立体、解析）、三角等方面的内容。题目选自解放后全国历年高考和北京、上海等市的数学竞赛中的一些典型例题，并增加一些其它优秀题目。本书在解题方法上，对一般题目力求简明扼要，而对一些难度较大题目，则力求详尽，并加有提示或注解。此外，某些题目采取一题多解，以便帮助读者灵活运用数学基础知识，提高抽象概括能力和解数学综合题能力。

本书可供中学数学教师、中学生学习、研究及毕业复习时参考使用。

目　　录

第一编　代　　数

第一章　因式分解

1．分解因式：$x^4+x^2y^2+y^4$．

解：$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$=(x^2)^2+2x^2y^2+(y^2)^2-(xy)^2$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$

$=(x^2+xy+y^2)\cdot(x^2-xy+y^2)$．

2．分解因式：$18a^3-48a^2b+32ab^2$．

解：$18a^3-48a^2b+32ab^2$

$=2a(9a^2-24ab+16b^2)$

$=2a(3a-4b)^2$．

3．分解因式：$3a^2-6ab+3b^2-12c^2$．

解：$3a^2-6ab+3b^2-12c^2$

$=3(a+b)^2-12c^2$

$=3[(a+b)^2-4c^2]$

$=3[(a+b+2c)(a+b-2c)]$

$=3(a+b+2c)(a+b-2c)$．

4．分解因式：$x^4-2x^2y-3y^2+8y-4$．

解：原式$=(x^4-2x^2y+y^2)-(4y^2-8y+4)$

$=(x^2-y)^2-(2y-2)^2$

$$=(x^2-y+2y-2)(x^2-y-2y+2)$$

$$=(x^2+y-2)(x^2-3y+2).$$

5．分解因式：$x^5y-x^3y+2x^2y-xy$.

解：$x^5y-x^3y+2x^2y-xy$

$$=xy(x^4-x^2+2x-1)$$

$$=xy[x^4-(x-1)^2]$$

$$=xy(x^2+x-1)(x^2-x+1)$$

$$=xy\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot(x^2-x+1).$$

6．分解因式：$(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^5$.

解：$(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3$.

$$=(a-x)y^3+ax(a^2-x^2)-y(a^3-x^3)$$

$$=(a-x)[y^3+a^2x+ax^2-a^2y-axy-x^2y]$$

$$=(a-x)[-y(a^2-y^2)+ax(a-y)+x^2(a-y)]$$

$$=(a-x)(a-y)[-ay-y^2+ax+x^2]$$

$$=(a-x)(a-y)(x-y)(a+x+y).$$

7．分解因式：$ax-bx-cy+cx+by-ay$.

解法一：原式$=(ax-bx+cx)-(ay-by+cy)$

$$=x(a-b+c)-y(a-b+c)$$

$$=(x-y)(a-b+c).$$

解法二：原式$=(ax-ay)-(bx-by)+(cx-cy)$

$$=a(x-y)-b(x-y)+c(x-y)$$

$$=(x-y)(a-b+c).$$

8．分解因式：$ax^2+bx^2-a^2x-b^2x-2abx+a^2b+ab^2$.

解：原式$=(ax^2+bx^2)-(a^2x+2abx+b^2x)+(a^2b+ab^2)$

$$=(a+b)x^2-(a+b)^2x+ab(a+b)$$
$$=(a+b)[x^2-(a+b)x+ab]$$
$$=(a+b)(x-a)(x-b).$$

9. 分解因式：$x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.

解：原式$=x^4+2x^3+2x^2+x^2+2x+1$
$$=x^4+2x^2(x+1)+(x+1)^2$$
$$=(x^2+x+1)^2.$$

10. 分解因式：a^3+3a^2+3a+2.

解：原式$=(a^3+3a^2+3a+1)+1$
$$=(a+1)^3+1$$
$$=[(a+1)+1][(a+1)^2-(a+1)+1]$$
$$=(a+2)(a^2+a+1).$$

11. 分解因式：$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

解：原式$=[(x+y+z)^3-x^3]-(y^3+z^3)$
$$=(y+z)[(x+y+z)^2+x(x+y+z)+x^2]$$
$$-(y+z)(y^2-yz+z^2)$$
$$=(y+z)[(x+y+z)^2+x(x+y+z)+x^2$$
$$-(y^2-yz+z^2)]$$
$$=(y+z)(3x^2+3xz+3yz+3yx)$$
$$=3(y+z)[x(x+z)+y(x+z)]$$
$$=3(y+z)(x+z)(x+y).$$

12. 分解因式：$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

解：原式$=(a-b)^3+[(b-c)+(c-a)]\cdot[(b-c)^2$
$$-(b-c)(c-a)+(c-a)^2]$$
$$=(a-b)^3+(b-a)[(b-c)^2-(b-c)$$
$$(c-a)+(c-a)^2]$$

$$=(a-b)\{(a-b)^2-[(b-c)^2-(b-c)(c-a)+(c-a)^2]\}$$

$$=(a-b)(3bc-3c^2-3ab+3ac)$$

$$=3(a-b)[c(b-c)-a(b-c)]$$

$$=3(a-b)(b-c)(c-a).$$

13．分解因式：$4(x^2+3x+1)^2-(x^2+x-4)^2-(x^2+5x+6)^2$.

解：原式$=[(2x^2+6x+2)-(x^2+x-4)]\cdot[(2x^2+6x+2)+(x^2+x-4)]-(x^2+5x+6)^2$

$$=(x^2+5x+6)(3x^2+7x-2)-(x^2+5x+6)^2$$

$$=(x^2+5x+6)[3x^2+7x-2-(x^2+5x+6)]$$

$$=(x+2)(x+3)(2x^2+2x-8)$$

$$=2(x+2)(x+3)(x^2+x-4).$$

14．分解因式：$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$

解：由等比数列求和公式得：

$$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=\frac{x^{15}-1}{x^3-1}.$$

(1) 在复数范围内分解：

设 $x^{15}-1=0$，$\therefore$ $x^{15}=1=\cos 0+i\sin 0$.

$$\therefore\quad x=\cos\frac{0+2k\pi}{15}+i\sin\frac{0+2k\pi}{15}$$

$$(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 14)$$

$\therefore$ $x_1=1$;

$$x_2=\cos\frac{2\pi}{15}+i\sin\frac{2\pi}{15};$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{15}+i\sin\frac{4\pi}{15};$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots;$$

$$x_{14}=\cos\frac{26\pi}{15}+i\sin\frac{26\pi}{15},$$

$$x_{15}=\cos\frac{28\pi}{15}+i\sin\frac{28\pi}{15}.$$

$$\therefore\quad x^{15}-1=(x-1)\cdot\left[x-\left(\cos\frac{2\pi}{15}+i\sin\frac{2\pi}{15}\right)\right]$$

$$\cdot\left[x-\left(\cos\frac{4\pi}{15}+i\sin\frac{4\pi}{15}\right)\right]\cdot\left[x-\left(\cos\frac{6\pi}{15}+i\sin\frac{6\pi}{15}\right)\right]\cdots\cdots$$

$$\cdot\left[x-\left(\cos\frac{26\pi}{15}+i\sin\frac{26\pi}{15}\right)\right]\cdot\left[x-\left(\cos\frac{28\pi}{15}+i\sin\frac{28\pi}{15}\right)\right].$$

同理：$x^3-1=(x-1)\cdot\left[x-\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$$\cdot\left[x-\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right].$$

$$\therefore\quad x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=\frac{x^{15}-1}{x^3-1}=\left[x-\left(\cos\frac{2\pi}{15}\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\sin\frac{2\pi}{15}\right)\right]\cdot\left[x-\left(\cos\frac{4\pi}{15}+i\sin\frac{4\pi}{15}\right)\right]\cdot\left[x-\left(\cos\frac{6\pi}{15}\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\sin\frac{6\pi}{15}\right)\right]\cdot\left[x-\left(\cos\frac{8\pi}{15}+i\sin\frac{8\pi}{15}\right)\right]\cdot\left[x-\left(\cos\frac{12\pi}{15}\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\sin\frac{12\pi}{15}\right)\right]\cdot\left[x-\left(\cos\frac{14\pi}{15}+i\sin\frac{14\pi}{15}\right)\right]\cdot\left[x-\left(\cos\frac{16\pi}{15}\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\sin\frac{16\pi}{15}\right)\right]\cdot\left[x-\left(\cos\frac{18\pi}{15}+i\sin\frac{18\pi}{15}\right)\right]\cdot\left[x-\left(\cos\frac{22\pi}{15}\right.\right.$$

$$+i\sin\frac{22\pi}{15}\Big)\Big]\cdot\Big[x-\Big(\cos\frac{24\pi}{15}+i\sin\frac{24\pi}{15}\Big)\Big]\cdot\Big[x-\Big(\cos\frac{26\pi}{15}$$

$$+i\sin\frac{26\pi}{15}\Big)\Big]\cdot\Big[x-\Big(\cos\frac{28\pi}{15}+i\sin\frac{28\pi}{15}\Big)\Big].$$

(2) 在实数范围内分解：

(1) 中所得结果可变为下述形式：

$$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=\frac{x^{15}-1}{x^3-1}$$

$$=\Big[x-\Big(\cos\frac{2\pi}{15}+i\sin\frac{2\pi}{15}\Big)\Big]\cdot\Big[x-\Big(\cos\frac{4\pi}{15}+i\sin\frac{4\pi}{15}\Big)\Big]$$

$$\cdot\Big[x-\Big(\cos\frac{6\pi}{15}+i\sin\frac{6\pi}{15}\Big)\Big]\cdot\Big[x-\Big(\cos\frac{8\pi}{15}+i\sin\frac{8\pi}{15}\Big)\Big]$$

$$\cdot\Big[x-\Big(\cos\frac{12\pi}{15}+i\sin\frac{12\pi}{15}\Big)\Big]\cdot\Big[x-\Big(\cos\frac{14\pi}{15}+i\sin\frac{14\pi}{15}\Big)\Big]$$

$$\cdot\Big[x-\Big(\cos\frac{14\pi}{15}-i\sin\frac{14\pi}{15}\Big)\Big]\cdot\Big[x-\Big(\cos\frac{12\pi}{15}-i\sin\frac{12\pi}{15}\Big)\Big]$$

$$\cdot\Big[x-\Big(\cos\frac{8\pi}{15}-i\sin\frac{8\pi}{15}\Big)\Big]\cdot\Big[x-\Big(\cos\frac{6\pi}{15}-i\sin\frac{6\pi}{15}\Big)\Big]$$

$$\cdot\Big[x-\Big(\cos\frac{4\pi}{15}-i\sin\frac{4\pi}{15}\Big)\Big]\cdot\Big[x-\Big(\cos\frac{2\pi}{15}-i\sin\frac{2\pi}{15}\Big)\Big].$$

可以看出，上式中从两端到中间的各项两两成共轭虚数，而共轭虚数的积或和均为实数．

$$\therefore\quad x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=\Big(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{15}+1\Big)$$

$$\cdot\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{15}+1\right)\cdot\left(x^2-2x\cos\frac{6\pi}{15}+1\right)\cdot\left(x^2-2x\cos\frac{8\pi}{15}\right.$$

$$\left.+1\right)\cdot\left(x^2-2x\cos\frac{12\pi}{15}+1\right)\cdot\left(x^2-2x\cos\frac{14\pi}{15}+1\right).$$

(3) 在有理数范围内分解：

$$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=\frac{x^{15}-1}{x^3-1}=\frac{x^5-1}{x-1}\cdot\frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}$$

$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1).$$

15. 用待定系数法分解因式：

$$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3.$$

解：因为$4x^2-4xy-3y^2=(2x-3y)(2x+y)$

令　原式$=(2x-3y+l)(2x+y+m)$

$$=(2x-3y)(2x+y)+(2x+y)l$$

$$+(2x-3y)m+lm$$

$$=4x^2-4xy-3y^2+2(l+m)x+(l-3m)y+lm$$

（其中 l 、m 为常数）。

根据恒等式对应系数相等，得：

$$\begin{cases} 2l+2m=-4 & (1) \\ l-3m=10 & (2) \\ l\cdot m=-3 & (3) \end{cases}$$

由(1)、(2)解得：$l=1$，$m=-3$，满足(3)。

∴　原式$=(2x-3y+1)(2x+y-3)$。

16. 分解因式：$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$。

解：若 $y=z$

则　原式$=x^2(y-y)+y^2(y-x)+y^2(x-y)=0$。

所以，原式有$(y-z)$的因式.

同理得：当$x=z$，$x=y$时，原式均为零.

故$(z-z)$、$(x-y)$都是原式的因子.

因为原式为三次式，所以可设

$$原式=k(y-z)(x-y)(z-x)$$

令　$x=0$，$y=1$，$z=2$。得$k=-1$

∴　$原式=-(y-z)(x-y)(z-x)$.

17．分解因式：$(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)-280$.

解：
$$\begin{aligned}原式&=[(x^2+7x)+6][(x^2+7x)+12]-280\\&=(x^2+7x)^2+18(x^2+7x)-208\\&=[(x^2+7x)+26][(x^2+7x)-8]\\&=(x^2+7x+26)(x^2+7x-8)\\&=(x^2+7x+26)(x-1)(x+8).\end{aligned}$$

习　　题

分解下列各因式：

1．$(a-b)(a-b-c)+(a+b)(-a+b+c)$.

答案：$-2b(a-b-c)$.

2．$x^5+3x^4+x^3+3x^2+x+3$.

答案：$(x+3)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

3．$xyz-yz-zx-xy+x+y+z-1$.

答案：$(x-1)(y-1)(z-1)$.

4．$a^2b-ab^2+a^2c-ac^2-2abc+b^2c+bc^2$.

答案：$(a-b)(a-c)(b+c)$.

5．$(x+y+z)^2+yz(y+z)+xyz$.

答案：$(x+y+z)(x+y+z+yz)$.

6. $x^2+\frac{1}{4}x-x^3$

答案：$-x(x-\frac{1}{2})^2$.

7. $a^2+4b^2+\frac{1}{4}c^2+4ab-ac-2bc$

答案：$\left(a+2b-\frac{c}{2}\right)^2$.

8. $x^2-y^2+x^3-y^3$.

答案：$(x-y)(x^2+xy+y^2+x+y)$.

9. $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$.

答案：$(a+b+c-d)(a+b-c+d)$
$(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$.

10. $72x^4-50x^2y^2+8y^4$.

答案：$2(3x+2y)(3x-2y)(2x+y)(2x-y)$.

11. $30x^{2m}+11x^m-30$.

答案：$(5x^m+6)(6x^m-5)$.

12. $(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15$.

答案：$(x-1)(x+1)(x-3)(x-5)$.

13. $x^3-y^3-x(x^2-y^2)+y(x-y)^2$.

答案：$xy(x-y)$.

14. $(a-a^2)^3+(a^2-1)^3+(1-a)^3$.

答案：$3a(a+1)(a-1)^3$.

15. $yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)$.

答案：$-(x-y)(y-z)(z-x)$.

16. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

答案：$-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

17. $(x^2+11x+24)(x^2+14x+24)-4x^2$.

答案：$(x+4)(x+6)(x^2+15x+24)$.

18. $(x-a)(x-2a)(x-3a)(x-4a)-120a^4$.

答案：$(x+a)(x-6a)(x^2-5ax+16a^2)$.

19. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$.

答案：$(x+y+z)(x+z-y)(x-z-y)(x-z+y)$.

20. $6x^4-x^3+16x^2-3x-6$.

答案：$(2x+1)(3x-2)(x^2+3)$.

21. $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$.

答案：$(a+b)(b+c)(c-a)$.

第二章　分式与根式

1. 化简：$\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2+2ab+b^2}\right)\div\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$.

解：原式$=\dfrac{a^2+ab-a^2}{(a+b)^2}\div\dfrac{a^2-ab-a^2}{a^2-b^2}$

$$=\frac{ab}{(a+b)^2}\times\frac{a^2-b^2}{-ab}=-\frac{a-b}{a+b}.$$

2. 化简：(1) $\dfrac{2a}{a-3b}-\dfrac{6ab-24b^2}{a^2-7ab+12b^2}$.

解：原式$=\dfrac{2a}{a-3b}-\dfrac{6b(a-4b)}{(a-3b)(a-4b)}$

$$=\frac{2a}{a-3b}-\frac{6b}{a-3b}=\frac{2a-6b}{a-3b}=2.$$

(2) $\dfrac{\left[a^{\frac{8}{5}}b^{-\frac{6}{5}}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{b^3}}$.

解：原式$=\dfrac{a^{-\frac{4}{5}}b^{\frac{3}{5}}a^{\frac{4}{5}}}{b^{\frac{3}{5}}}=1$.

3．化简：$\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3-1}+\dfrac{x(x-2)-2(x-2)}{x^2-3x+2}$.

解：原式$=\dfrac{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}+\dfrac{(x-2)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

$$=\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1.$$

4．化简：$\dfrac{(a^2-b^2)^3}{a^3+b^3}\div\dfrac{(b+a)^2}{a^2-ab+b^2}\times\dfrac{1}{(b-a)^3}$.

解：原式$=\dfrac{(a^2-b^2)^3}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\times\dfrac{a^2-ab+b^2}{(a+b)^2}$

$$\times\frac{-1}{(a-b)^3}$$

$$=\frac{(a+b)^3(a-b)^3}{a+b}\times\frac{1}{(a+b)^2}\times\frac{-1}{(a-b)^3}$$

$$=-1.$$

5．化简：$\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

解：原式$=\dfrac{a^2}{(a-c)(a-b)}-\dfrac{b^2}{(b-c)(a-b)}+\dfrac{c^2}{(a-c)(b-c)}$

$$=\frac{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$