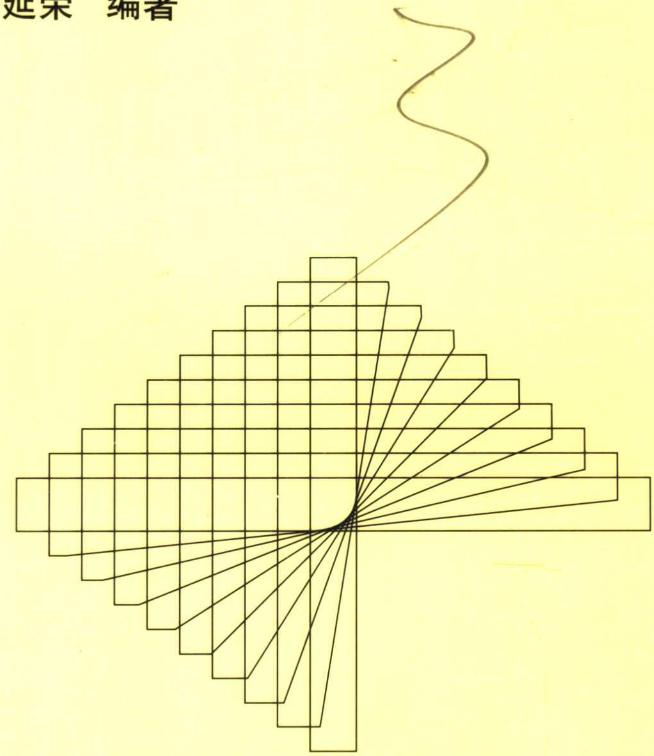
21世纪高等学校规划教材

数学模型与数学建模

陈汝栋　于延荣　编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

21世纪高等学校规划教材

数学模型与数学建模

陈汝栋　于延荣　编著

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书结合作者多年的数学建模竞赛经验和普通工科院校的学生实际，用尽可能小的篇幅，由浅入深地介绍了数学建模的常用方法和相关学数知识，并且简单介绍了三个数学软件的使用。四个附录则给出了概率论基础知识、Mathematica软件的基本命令和 F - 检验、相关系数的临界值表，方便读者查阅。

本书可作为理工科学生学习数学建模的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学模型与数学建模 / 陈汝栋，于延荣编著. —北京：国防工业出版社，2006.1

21 世纪高等学校规则教材

ISBN 7 - 118 - 04159 - 9

Ⅰ. 数...　Ⅱ.①陈...②于...　Ⅲ. 数学模型—高等学校—教材　Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 107407 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码　100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960　1/16　印张 11½　208 千字

2006 年 1 月第 1 版　2006 年 1 月北京第 1 次印刷

印数：1—4000 册　定价：20.00 元

国防书店：(010)68428422　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　发行业务：(010)68472764

前　言

开设数学建模课，是大学教育，特别是数学教育改革的一个重要组成部分。它把我们从只注重知识传授，忽略其应用背景的数学教育带入了一个全新的天地。在这门课程中，稳定的椅子、雨中行走、席位分配、核军备竞赛等，一个个精妙绝伦的例子使同学们不但领略了数学的深奥和神奇，也从中体会了自己运用数学知识解决实际问题的成就感。

作者自1996年开始接触并讲授数学建模课，1998年开始组织数学建模的赛前培训，带领天津工业大学的学生们参加了全国大学生数学建模竞赛、美国大学生数学建模竞赛和全国部分院校研究生数学建模竞赛，并取得了全国一等奖、二等奖（含研究生）和美国大学生数学建模竞赛二等奖以及天津赛区的20余项奖励。在这10年的授课和建模竞赛的实践中，有成功的喜悦，也有辛劳的苦衷。从中深刻地体会着纯理论到应用的转变，感受了数学建模和数学技术的结合（数学科学与计算机结合产生的，已成为当代高新技术的一个重要组成部分）在科学发展的不同领域发挥着巨大的作用。也因看到通过参加数学建模竞赛的学生们一个个带着成功的喜悦奔赴不同岗位，而感到无比的欣慰。

在7次讲授数学建模课讲稿的基础上，2002年将其印成讲义，在我校选修课和专业学生中又使用了3年，现对讲义进行修改形成本书。本书的特点是：针对普通工科院校学生的特点，由浅入深地介绍了数学建模的方法、所用到的基本数学知识及简单的数学软件知识，试图用较小的篇幅，介绍尽可能全面的内容，使其更适合普通工科院校学生学习数学建模和应用的需要。同时，4个附录给出的数学建模常用的概率论基础知识、Mathematica软件的基本命令、F－检验和相关系数的临界值表，为大学生进行数学建模和数学建模竞赛提供了方便。本书可作为理工科学生学习数学建模的教材或参考书。

鉴于作者水平有限，且数学建模用到的数学知识包罗万象，很难完整地反映于这样一个篇幅的书中，疏漏之处在所难免，诚望读者指正。

陈汝栋　于延荣

2005年10月于天津

目　　录

第一章　数学模型　数学建模　素质教育

数学建模课是近几年为适应大学数学教学改革的需要而开设的一门课程，它是将数学理论知识与应用背景有机结合，为应试教育转向素质教育的创新实践。

一、数学模型概念导入

先看三则故事：

(1) 经常乘电梯的人，有这样的体会：除非是在楼的低层或顶层，否则你等来的第一部电梯差不多总是与你希望去的方向相反。但是，下面的说法似乎也有道理：要下去，必须先上来，因此，等到的电梯是上行还是下行的可能性应该是相等的。那么，这二者哪一个是正确的呢?

(2) 一个纽约人有两个好朋友，一个住在市中心，一个住在郊区。他和这两个人都很好。因此，当想去看望他们时，他总是登上在地铁车站赶上的第一列地铁，而不管它是去市中心还是去郊区。到两个方向去的地铁班次是一样多的。然而尽管他无意厚此薄彼，但结果是：他去一个朋友处的次数远远超过了去另一个朋友处的次数。为什么会这样呢?

(3) 在美国中西部的一个小镇上住着一位退休的铁路工程师 W. Johnson。他工作了大半辈子的那条铁路线正好穿过这个小镇。Johnson 患有失眠症，退休后的这位老工程师经常会在夜里的某个奇数点时间(但不固定)醒来，且再也不能入睡。后来他发现了一个治疗失眠的方法：每当他醒来后，他就沿着小镇上的那条寂静的街道步行。一直走到与铁路的交叉点。他站在那儿，一直等到有一列火车开来。火车的吼叫声撕破了宁静的夜空，这一情景使这位老工程师心境舒畅。然后他走回家，很快就能入睡。

过了一段时间，他意外地发现，他所看到的火车大都是向一个方向的，而他清楚地记得，这条干线上的火车向东和向西的次数是一样的。后来他又观察了一个星期，并且把看到的结果都用一个小本记下来，结果还是一样，这时他想，是否由于自己每天都在同一个时间起来的原因? 于是，他让一个朋友给他拟了一个长长的随机时间表，结果，还是一样，和他开始看到的情形差不多。并且，他询问火车站，是否有些火车改线了，回答是否定的。这一奇怪现象，使这位老铁路

如此沮丧,以致完全失眠,日渐虚弱。

为解释上述现象,应用概率论知识。

在现实生活中,经常遇到一些现象:事情的发生与否,不取决于人们的主观意志。如掷一枚硬币,落到地上,究竟是正面还是反面,谁也难以肯定。这种现象,称为随机现象。讨论这种现象的一门学科,就是概率论。

我们把这种不可预言的现象中的每一个可能发生的结果,称为随机事件。每一个随机事件发生的可能性,称为这个随机事件的概率。

如随机掷一枚硬币,每一次发生的可能性只有正面或反面两种可能,因此,出现“正面”或“反面”的可能性是 1/2,即随机事件“掷到正面”或“掷到反面”的概率均为 1/2。

上述问题均可以转化为概率问题,结论是由于相应位置对应事件发生的概率不同引起的。

在客观世界中,有大量的问题,需要通过建立数学模型加以解决。其他问题诸如:为什么人造地球卫星要用三级火箭?进入迷宫如何走出来?能否将椅子放稳当?如何制定人口政策?如何进行钻井布局?怎样才能使森林获得最大效益等。

二、数学模型概念

模型:为了某个特定的目的,将原型中的某一部分信息减缩、提炼得到原型的替代物。

原型:现实世界中的各种现象。

如飞机模型有:展厅中的飞机模型(为了形象直观)、玩具飞机(形象直观又适宜儿童玩耍)、航模(能飞行)等都是为了不同的目的的飞机的模型。

- 模型
  - 物质模型
    - 直观模型(玩具,照片,沙盘,塔林等)
    - 物理模型(波浪水箱中的舰艇模型、风洞试验、模型地震等)
  - 理想模型(抽象模型)
    - 思维模型(开车,技术工人,画家(特点:模糊性,片面性,主观性))
    - 符号模型(地图,电路图,建筑图等)
    - 数学模型
    - 计算机模拟(电子游戏)

数学模型:对现实世界中的某一特定现象,为了某一特定的目的,做出适当

的简化假设，运用适当的数学工具，得到一个数学结构。

三、应用例子

(1) 稳定的椅子：四条腿的椅子能否放稳当？

(2) 哥尼斯堡七桥问题。

(3) 迷宫问题。

(4) 海湾战争："爱国者"导弹拦截"飞毛腿"导弹(发生在中东，计算在澳大利亚，指挥又在美国白宫，但这一切又要在极短时间内完成，要靠数学)；环境污染(如果将海湾地区的石油全部点燃，是否会造成全球范围的环境污染)。

(5) 朝鲜战争：战争开始一年后，美国数学家给出的研究报告指出：中国将出兵，从而预示着美国的侵朝战争必败。

(6) 天文学：冥王星、海王星的发现，靠的是数学计算，而不是观察。

(7) 金融：有人预言，数学家跳槽金融，将引发金融革命。

(8) 社会、生活：雨中行走、选举问题、田忌赛马、夫妻渡河问题、疯狂的电梯等。

军事、工业、经济中的例子更是比比皆是。

因此人们发现：数学已被广泛应用且无孔不入，数字化、量化的趋势已势不可挡，在这一过程中，数学发挥着无可替代的作用。

四、素质教育新要求

人们深深的感到，仅仅教数学理论，已远不能适应培养符合现代化建设需要的创新型人才的需要。从而导致了以应用数学知识解决实际问题为主要宗旨，培养学生创造性思维能力，全面提高学生素质的一门课程的诞生。

20世纪50年代，我国的数学教育强调完整性，崇尚理论的完美，这种思想的代表是布尔巴基学派，似乎越抽象，越难理解，越像真正的数学。长期以来，纯粹数学像一条鱼的中段，备受青睐，甚至纯粹数学家还看不起搞应用数学的。这种思想严重束缚了人们的思想，也闹出了不少笑话，使得本来来自现实世界、丰富多彩的数学(像一条鱼)变得与世隔绝，放松了(或放弃了)把现实问题抽象成数学问题的能力的培养(鱼头扔掉了)；有时抽象为数学问题后又由于其"太简单"而不屑一顾(把鱼尾也扔掉了)。在强调素质教育的今天，我们的口号应是"烧全鱼"。

学习本课程要认真对待每一个问题，在做模型中培养自己解决实际问题的能力，从而学会如何用数学，掌握使用数学模型解决实际问题的能力。

美国工业与应用数学学会(Society Industry and Applied Mathematics，SIAM)现任主席、美国明尼达大学数学及应用数学研究所所长、著名数学家 Avener Friedman 教授和该所副所长 Willard Miller Jr. 教授说“学习数学建模的惟一方法就是实际去做数学建模”。

五、数学建模的要求

(1) 判断模型好坏的原则。所用的数学知识尽可能简单。

(2) 合理假设。既不能太多(实际问题上一个因素相应于数学表述中的一个变量,而随着变量的增多,研究的复杂度将大幅度增加),也不能太少,否则不能反映实际问题的真实本质。如人口问题就与年龄、性别、疾病、卫生、战争、灾荒、观念等有关。

(3) 计算机能力。近几年数学建模竞赛题对使用计算机的能力要求越来越高。

(4) 涉及内容。问题类型:非物理问题;所用数学方法:回归分析、微分方程、线性规划、图论、运筹学、统筹学、计算机模拟等。

第二章　一些简单的例子

例 2－1　稳定的椅子

问题:在不十分平坦的地面上,一把四条腿的椅子能否放稳当? 即椅子的四条腿着地。

假设:

(1) 地面连续(无台阶);

(2) 四条腿视为四个点(即看成四点着地)且一样长,可以连成正方形;

(3) 任何时候三点着地(三点定面)。

数学描述:

设四条腿 A,B,C,D(如图 2－1)连成四边形,O 为正方形中心,正方形 $ABCD$ 绕 O 旋转,转角为 θ。

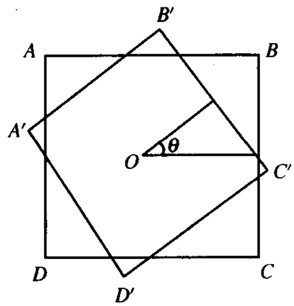


图 2－1

目标:

A,B,C,D 距离地面均为零。

建模:

设 $f(\theta)$表示 A',C'到地面距离之和。

$g(\theta)$表示 B',D'到地面距离之和。

则四条腿着地当且仅当 $f(\theta)=g(\theta)=0$。

由假设(1),$f(\theta),g(\theta)$连续,因此,可利用连续函数的性质。

由假设(3),$f(\theta)g(\theta)=0$,对任意 θ 成立。

若 $f(0)=g(0)=0$,取 $\theta=0$ 即可,否则,应证明,存在 $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

不妨设 $f(0)>0,g(0)=0$,则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$(将正方形绕中心逆时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$),现证明:

$$\exists\,\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),使 f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$$

用连续函数的中值定理:

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，由假设(1)，$h(0)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，且 $h(0)>0$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，于是，由连续函数介值定理，存在 $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使 $h(\theta_0)=0$，即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$。由 $f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$，从而 $f(\theta_0)=0$ 或 $g(\theta_0)=0$，于是 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

讨论：

此问题中，用一元变量 θ 表示椅子的位置是巧妙的，也是解决本问题的关键(θ 未求出，但仍有意义)。

利用正方形的对称性及旋转 90°不是关键，如：可考虑，将椅子的四条腿改为矩形该如何做？

利用介值定理还可以考虑其他问题：

例 2－2　巧分蛋糕

问题：如何将一个不规则的蛋糕 Γ 平均分成两部分。

数学描述：

设 Γ 为平面上任一封闭曲线，则能否找到一条直线将其平均分成两部分。

建模：

设 Γ 为平面上任一封闭曲线，P 为平面上一点(不妨设 P 在 Γ 内)，则存在一过 P 点的直线，将 Γ 所围面积二等分，如图 2－2 所示。

设 l 为过 P 的任一直线，分图形为两部分 S_1,S_2，若 $S_1=S_2$，则得证。

否则，设 $S_1>S_2$，l 与 x 轴夹角 α_0。

让 l 沿逆时针绕 P 旋转，则 S_1,S_2 随 α 的变化连续地变化，记其面积为 $S_1(\alpha),S_2(\alpha)$，则记 $S_1(\alpha_0)=S_1,S_2(\alpha_0)=S_2$，且不妨设 $S_1(\alpha_0)>S_2(\alpha_0)$(若 $S_1(\alpha_0)=S_2(\alpha_0)$，则 l 即将蛋糕平分为二等分)，令

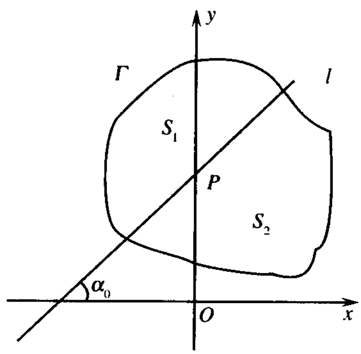


图 2－2

$$f(\alpha)=S_1(\alpha)-S_2(\alpha)$$

则

$$f(\alpha_0)=S_1(\alpha_0)-S_2(\alpha_0)>0$$

$$f(\alpha_0+\pi)=S_1(\alpha_0+\pi)-S_2(\alpha_0+\pi)=S_2-S_1<0$$

且 $f(\alpha)$ 连续，故由连续函数介值定理知，$\exists\bar{\alpha}\in(0,\pi)$，使 $f(\bar{\alpha})=0$ 即 $\alpha=\bar{\alpha}$ 对应的直线即为所求。

例 2－3　上山问题

问题：一人早 6:00 从山脚 A 上山，晚 18:00 到山顶 B；第二天，早 6:00 从 B

下山，晚 18:00 到 A。问是否有一个时刻 t_0，这两天都在这一时刻到达同一点？

数学描述：

如图 2-3 所示，设 $S_1(t), t\in[0,12]$，表示上山运动函数；$S_2(t), t\in[0,12]$，表示下山运动函数，而 S 表示 A 到 B 的距离。问是否存在一时刻 t_0，使 $S_1(t_0)=S-S_2(t_0)$。

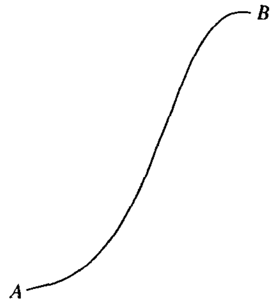


图 2-3

建模：

设 $S_1(t), t\in[0,12]$，表示上山运动函数；$S_2(t)$，$t\in[0,12]$，表示下山运动函数，而 S 表示 A 到 B 的距离。则 $S_i(0)=0, S_i(12)=S$。

令

$$S(t) = S_1(t) - S_2(t) - S$$

则

$S(0)=-S, S(12)=S>0$。于是，由连续函数的介值定理，$\exists\, t_0\in[0,12]$ 使 $S(t_0)=0$，即 $S_1(t_0)=S-S_2(t_0)$。

例 2-4　人员疏散

问题：在发生意外事件时，考虑一座教学楼内 n 个教室内学生的疏散问题。

假设：

(1) 均匀疏散，即人与人间距为 d（常数）；

(2) 匀速疏散，即速度为 vm/s（常数）；

(3) 第 i 个教室有 n_i+1 人；

(4) 第 i 个教室门口到第 $i-1$ 个教室门口的距离为 L_im；

(5) 疏散时，第一个人到门口需 t_0 秒。

建模：

如图 2-4 所示。

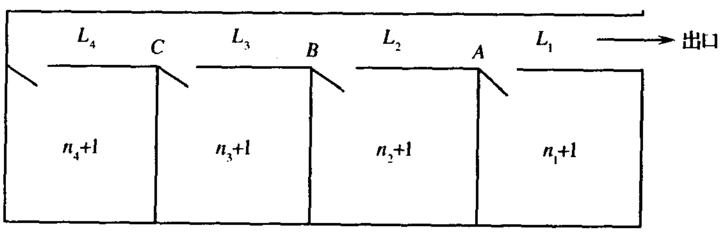


图 2-4

第一个教室撤空需时间

$$t_0 + (n_1 d + L_1)/v$$

则第二个教室撤空需时间

$$t_0 + (n_2 d + L_1 + L_2)/v$$

若第一个教室人员未撤完,第二个教室已到 A,则为避免拥挤,需等待。此时,两个教室完全撤离所花时间为(相当于在 A 处集结 $n_1 + n_2 + 2$ 个人)

$$T = \frac{(n_1 + n_2 + 2)d}{v} + \frac{L_1}{v} + t_0$$

若第一个教室人员已撤完,第二个教室人员还未到 A,则所花时间恰为第二个教室完全撤出所需时间

$$T = t_0 + (L_1 + L_2 + n_2 d)/v$$

检验:

取 $L_1 = 10, L_2 = 12, v = 2, t_0 = 3, d = 1, n_1 = L_2/d = 12$(即第一个教室 13 人),$n_2 = 30$,则

$$T = (10 + 12 + 30)/2 + 3 = 29(\mathrm{s})$$

讨论:

(1) $i = 3,4$ 如何?

(2) 允许双行如何?

例 2-5 价格竞争

问题:两个加油站位于同一条公路旁,为在公路上行驶的汽车提供同样的汽油,彼此竞相降价,竞争日趋激烈。现在甲加油站开始降价,试站在乙加油站立场上,组建模型,为乙站提供决策依据(降价幅度)使乙站获利最高。

假设:

P:汽油的正常销价(元/L);

L:降价前乙销量(L/日);

W:汽油成本(元/L);

x:乙加油站的销价(元/L);

y:甲加油站的销价(元/L)。

主要相关因素:

(1) 甲站降价幅度 $P - y$

(2) 乙站降价幅度 $P - x$

(3) 二站价格之差 $y - x$

假设乙站销量与三者为线性关系,即

$$Q = L - a(P - y) + b(P - x) + c(y - x)$$

(注:若将 $y - x$ 合并入前两项,系数不好估计,如:$-a(P-y)+cy=-a(P-y(1+\frac{c}{a})))$

则乙站的利润函数为

$$R(x,y) = (x - W)Q$$

固定 y,求最大值点(注:固定 y,考虑 $R(x,y)$才有意义)

$$\frac{\partial R}{\partial x} = L - a(P - y) + b(P - x) - c(x - y) + (x - W)(-b - c) = 0$$

解得

$$x_* = \frac{L + y(a + c) + P(b - a) + W(b + c)}{2(b + c)}$$

即甲加油站确定价格为 y 时,乙加油站价格定为 x_* 能获最大利润。

注意:

(1) 经济学中,价格与销量关系通常认为是线性关系。

(2) $\frac{\partial R}{\partial x}$经济学中称为边际利润。

讨论:假设 $L=2000, P=4, W=3$。如取 $y=3.9$,

$$R(x,y) = (x - 3)(21500 - 5000x)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 36500 - 10000x$$

$$\because \frac{\partial R}{\partial x} \approx \frac{R(x + \Delta x) - R(x)}{\Delta x}$$

故其意义是当 x 增加一个单位($\Delta x = 1$)时,R 的增加值。

特别,当 $x=3.65$ 时,$\frac{\partial R}{\partial x}=0$,表明价格不能再降。参数 a,b,c 的值较难估计。

一般地,可在 y 取不同值时(固定),对 x 取不同值时,得到销量值,然后用回归分析的方法得到。但这是不现实的,因为要频繁调价。

常用的办法是,按给定数据给出 a,b,c 的数量级,从而得到估计值(或称虚拟参数)。

$a=b=1000, c=4000$

y	x	R
3.9	3.65	2112.5
3.8	3.6	1800
3.7	3.55	1512.5

也可用线性回归方法：

根据经验，选定 3.8 及一组 $\{x, Q\}$，如

$\{3.78, 2050\}$，$\{3.75, 2100\}$，$\{3.9, 1900\}$，$\{3.6, 2300\}$，$\{3.55, 2400\}$，$\{4, 2000\}$。

用线性回归，可得

$$Q = -1410.38x + 7390.99$$

解得

$$a = 1252.65 - c, b = 1410.28 - c$$

取

$$c = 252$$

得

$$a = 1000.65, b = 1158$$

关于边际问题的其他例子：

(1) 某企业利润 P 与产量 x 的关系为

$$P(x) = 250x - 5x^2$$

边际利润

$$P'(x) = 250 - 10x$$

(2) 某乳酸厂收入函数

$$R(x) = 12x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$$

成本函数

$$C(x) = 3x^{\frac{1}{2}} + 4, x \in [0,5]，\text{单位为 L。}$$

R，C 以千元计，边际收入 $R'(x)$，边际成本 $C'(x)$。

利润函数

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

边际利润

$$P'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{3 - x}{\sqrt{x}}$$

例 2－6　包扎管道

问题:在包扎水管管道时,如何包扎可以使管道全部包扎,且无重叠。

显然,本问题与参数带宽 W(cm),圆管周长(管道)C(cm)及缠绕角度有关。

假设:

(1) 管道是圆的,直的(无交叉);

(2) 粗细一样;

(3) 带子宽度一样。

求:

(1) θ 多大时,最省带子?

(2) 若管道长为 l(cm),问需多少带子 L?

建模:

对于问题(1),如图 2－5 易知 $W = C\sin\theta \Rightarrow \theta = \arcsin\frac{W}{C}$

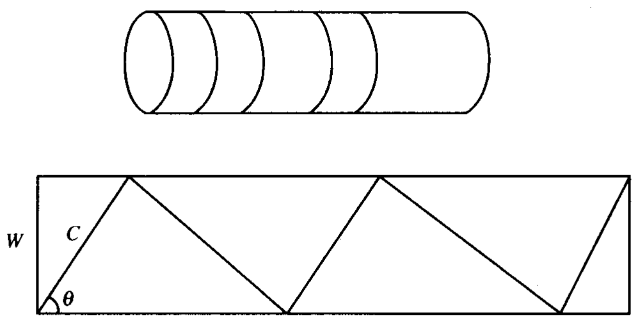


图 2－5

对于问题(2),管道表面积与带子总面积相等,管道表面积为 $l \cdot C$,带子总面积为 $L \cdot W$

$$LW - lC = W\sqrt{C^2 - W^2}$$

即

$$L = \frac{W\sqrt{C^2 - W^2} + lC}{W}$$

讨论:

(1) 若包扎时有重叠,情况怎样?为什么要重叠?

(2) 若管道截面积为正方形,如何建模?

(3) 在第(1)种情况下,若带子误差为 ε 时,价格相差 $P(\varepsilon)$,将怎样选择带子?

例 2-7　席位分配

问题:美国宪法第一条第二款指出:众议院议员名额将根据各州人口比例分配,但在落实这一条款内容时,从 1788 年美国第一部宪法生效以来,对方案的"公正合理性"一直在争争吵吵。

数学描述:

设众议院名额 N,共有 S 州,各州人口 $P_i(i=1,2,\cdots,S)$,问题是如何找出一组 $n_1,n_2,\cdots,n_S$,使 $n_1+n_2+\cdots+n_S=N$,n_i 为各州分配的名额,并且 n_i 尽可能接近 $\dfrac{P_i}{\sum\limits_{i=1}^{S}P_i}N$。

讨论:

下面用具体例子说明这一问题。

某校 200 名学生,甲系 100 名、乙系 60 名、丙系 40 名。

若选 20 名学生会代表,公平又简单的方法是甲系给 10 席,乙系给 6 席,丙系给 4 席(无异议)。

若丙系有 6 名同学转到甲系、乙系各 3 名,则席位分配如下:

按照惯例也即按下面提到的 H 方法,20 个席位应按如下表中分法:甲系:10 席;乙系:6 席;丙:4 席,即先按整数分配,再按余数较大者分配。

但由于考虑到 20 席表决可能出现平局,故增加一位代表变成 21 席,仍按这种分法,则甲系:11 席;乙系:7 席;丙系:3 席。

			20 席		21 席	
系别	学生数	所占比例(%)	按比例分配	按惯例 H 法	比例	H 法
甲	103	51.5	10.3	10	10.815	11
乙	63	31.5	6.3	6	6.615	7
丙	34	17	3.4	4	3.57	3
总和	200	100	20	20	21	21

显然,对丙系不公平。问题出在哪里呢?

历史上,这种先按整数分配,再按余数较大者分配的方法是美国乔治·华盛顿时代财政部长 Halmilton 在 1790 年提出的。但由于其政敌 Jefferson 的阻挠,1851 年才正式使用,而 1880 年又开始争论,它产生于下述悖论。