

主编 徐泽洲 须 功 李金生



IMO

初中数学 奥林匹克读本

(最新修订本)

二年级

★ 源于基础
★ 高于课本
★ 启迪思维
★ 掌握方法



全国优秀畅销书 新增习题详解

江苏教育出版社

初中数学
奥林匹克读本
(最新修订本)
(二年级用)

主 编	编	徐泽洲	须 功	李金生
	写	曹国钧	须 功	周勤保
		王会梅	陶树海	吉 星

江苏教育出版社

初中数学奥林匹克读本

(最新修订本)

(二年级用)

主编 徐泽洲等

责任编辑 眭双祥

出版发行:江苏教育出版社

(南京市马家街 31 号,邮政编码:210009)

网 址:<http://www.edu-publisher.com>

经 销:江苏省新华书店

照 排:南京展望照排印刷有限公司

印 刷:扬州鑫华印刷有限公司

(扬州市运河西路 215 号,邮政编码:225003)

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 10.5 字数 219 000

2000 年 9 月第 2 版 2001 年 7 月第 4 次印刷

印数 196 471 - 221 500 册

ISBN 7-5343-2677-X

G·2417

定价:10.00 元

江苏教育版图书若有印刷装订错误,可向承印厂调换

苏教版图书邮购一律免收邮费。邮购电话:025-3211774, 邮购地址:南京市马家街 31 号,江苏教育出版社发行科。盗版举报电话:025-3300420、3303538。提供盗版线索者我社给予奖励。

修 订 说 明

各级各类数学竞赛以及数学课外活动的蓬勃开展,激发了广大青少年学习数学的兴趣和积极性.为了探索一条既科学又简捷的培训路子,我们约请了有丰富经验的教师编写了这套辅导性的读本.这套读本体现了主编徐泽洲的“渗透现代数学思想,建立三维度的数学体系”的新思路,该书的指导思想是“源于基础,高于课本,启迪思维,掌握方法”.这套读本,在适当提高知识点的同时,注重进一步启迪学生思维,帮助学生掌握更多的数学方法,对提高学生的数学基本功十分有益.全套书分小学一至六年级和初中一、二、三年级共九册,适合相应年级的学生使用.

本书出版后,受到读者的广泛欢迎,被评为全国优秀畅销书.为了进一步提高质量,这次又作了修订再版,以求更加实用和完善.这次修订增加了习题的提示和详解,更加便于辅导和自学.

著名数学家、中科院院士、上海复旦大学研究生院院长李大潜教授为这套读本撰写了序,充分肯定了这套读本.此次出版,得到了顾也慈同志的关心和支持,在此一并致谢.

本册读本由徐泽洲、李金生统稿终审,由冯琴、王会梅、刘海英进行校对并作习题详解.

由于时间急促,在读本中如有不当之处,恳请广大读者指正.

序

数学是一门重要的基础学科,它的重要性,按我自己肤浅的理解,曾经概括为下面三句话:数学是建设四化的武器,数学是其他学科的基础,数学是锻炼思维的体操。

要打好数学的基础,是应该从中、小学抓起的。就中、小学阶段应该掌握的数学知识来说,看起来千变万化,但真正基本的东西其实并不是很多的。对这些基本的内容通过认真而严格的训练,真正做到充分理解,并能熟练运用,就为今后进一步的学习和工作打下了良好的基础,也一定能逐步培养起学生对数学的爱好和兴趣,使他们变得更加聪明起来。既减轻学习负担,又提高学习质量,促进中、小学生生动活泼地全面成长,不仅非常必要,也是完全可能的。舍本求末,不注意基本知识的严格训练和真正掌握,不培养学生主动积极的思维能力,搞题海战术,用大量的难题、偏

题或怪题把学生压得透不过气来,只会束缚学生的聪明才智,带来摧残人才的恶果。

这么说,是不是对一部分学习优秀、对数学有兴趣并且确有余力的中、小学学生,不应该提出较高的要求并进行一些特殊的培养呢?当然不是这样,教师完全有责任根据因材施教的原则,帮助和促进这一部分学生在全面发展的基础上,并在不过分加重课外学习负担的前提下,进一步提高对数学的兴趣,在增进知识和提高能力这两方面都得到进一步的培养。这是学校教育的另一个重要任务,也是一件值得认真探索并总结经验的工作。

现在的这一套书,原先是“南通市青少年数学奥林匹克俱乐部”开展活动时所用的教材,也曾被其他一些地区开展类似的活动时所采用。实践表明它对提高中、小学生的数学思维能力起了积极的作用,一部分学生并已在全国性及国际性的数学竞赛中取得了优异的成绩。参加1989—1990年度美国小学数学邀请赛的70人全部获得一或二等奖,参赛的两个队均获得最高成就奖。刚进入高一的学生参加全国数学竞赛获三等奖,并以满分获江苏省高二数学竞赛一等奖,这就是突出的例子。现在本书在经过好几年的试用并不断修改完善后正式出版,不仅是过去这方面工作成果的一个结晶,也相信会对今后进一步开展有关的活动起到推动作用。

《初中数学奥林匹克读本》的出版,将与《小学数学奥林匹克读本》一起成为《中小学数学奥林匹克读本》丛书,这套丛书将是九年义务教育数学教程的很切合实际的实用性很强的配套读本。

这套由江苏教育出版社出版的书,是由我的故乡南通市的一批有多年实践经验并具有较高水平的中、小学数学教师编写的。主编徐泽洲、李金生两位同志并执教于我的母校南通中学。我为自己的故乡和母校有这样一批立志献身祖国基础数学教育事业的老师和同志们感到光荣和自豪,并预祝他们在已有成绩的基础上,再接再厉,为中、小学数学教育水平的提高作出更多的努力和更大的贡献。

李大潜

于复旦大学

1991.4.23 晚

目 录

代数部分

一	因式分解(一)	1
二	因式分解(二)	9
三	因式分解(三)	17
四	分式有意义及值为零的条件	26
五	分式运算巧解	35
六	部分分式及其应用	45
七	关于分式条件等式的证明	56
八	算术平方根的非负性及应用	65
九	$\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ 型的二重根式的化简	72
十	$\sqrt{a^2} = a $ 的应用	80
十一	根式大小的比较	86
十二	无理数整、小数部分的确定	95
十三	巧用乘方、开方解题	102
十四	分母有理化的技巧	111

几何部分

十五	角的和差倍分	121
十六	造全等	129

十七	尺规作图(初步)	143
十八	等腰三角形和直角三角形	149
十九	勾股定理及其应用	161
二十	几何中的不等量	172
二十一	平行四边形	183
二十二	梯形	196
二十三	等边三角形	208
二十四	正方形	220
二十五	中位线及其应用	233
二十六	对称	247
二十七	黄金分割	259
二十八	相似三角形	268
二十九	射影定理	279
三十	面积和面积法证题	292
三十一	代数法证题	303
三十二	梅氏定理及塞瓦定理	314

· 代数部分 ·

一 因式分解(一)

地位与作用

因式分解是初等代数恒等变形的一种重要的基本的方法之一,它应用广泛,是解方程及代数式、三角式变形的有力工具.因式分解的方法较多,具有一定的技巧性,添拆项法就是其中的一种技巧性较强的方法.在因式分解中,当其他方法不奏效时,添拆项法往往可以“起死回生”.

知识与要点

1. 因式分解就是把一个多项式化为几个整式的积的形式,是多项式乘法的逆向变形.

2. 因式分解常用的方法主要有提取公因式法,公式法,十字相乘法,分组分解法.此外还有添项法和拆项法等.添项就是在原式添上两个符号相反绝对值相同的项;拆项就是将原式中的某些项拆成两项或更多项的代数和.

3. 在进行因式分解时,常需要通过添项或拆项,然后再分组分解,添拆项的目的是为恰当的分组构造条件,以便分解因式.

范例与思考

例 1 分解因式 $x^5 + x + 1$.

【分析】 这个三项式既没有公因式提取,也不能应用公式和直接分组分解.我们可以运用添项法,添上 $-x^2$ 和 x^2 来创造分组分解的条件,使问题得到解决.

$$\begin{aligned}
 \text{解: } x^5 + x + 1 &= (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1) \\
 &= x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) \\
 &= x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).
 \end{aligned}$$

【思考】 $x^{5n} + x^n + 1$ 如何分解因式?

例 2 分解因式 $(1 + y)^2 - 2x^2(1 + y^2) + x^4(1 - y)^2$

$$\begin{aligned}
 \text{解: } (1 + y)^2 - 2x^2(1 + y^2) + x^4(1 - y)^2 &= (1 + y)^2 + 2(1 + y)x^2(1 - y) + x^4(1 - y)^2 \\
 &\quad - 2(1 + y)x^2(1 - y) - 2x^2(1 + y^2) \\
 &= [(1 + y) + x^2(1 - y)]^2 - (2x)^2 \\
 &= [(1 + y) + x^2(1 - y) + 2x][(1 + y) + x^2(1 - y) - 2x] \\
 &= (x^2 + 2x + 1 + y - x^2y)(x^2 - 2x + 1 + y - x^2y) \\
 &= [(x + 1)^2 - y(x^2 - 1)][(x - 1)^2 - y(x^2 - 1)] \\
 &= [(x + 1)^2 - y(x + 1)(x - 1)][(x - 1)^2 - y(x + 1)(x - 1)] \\
 &= (x + 1)(x - 1)(x + 1 - xy + y)(x - 1 - xy - y).
 \end{aligned}$$

说明：这道题用的是配方法，配方法是一种特殊的添项法。

例 3 分解因式 $3x^2 - x^4 - 1$.

【分析】 这个三项式不能直接采用提取公因式法、公式法、十字相乘法进行分解，所以只有设法创造条件分组分解。但这个多项式只有三项，我们考虑运用拆项法，将 $3x^2$ 拆成 x^2 和 $2x^2$ ，然后再分组分解。

$$\begin{aligned}\text{解：} \quad & 3x^2 - x^4 - 1 \\ &= x^2 - x^4 + 2x^2 - 1 \\ &= x^2 - (x^4 - 2x^2 + 1) \\ &= x^2 - (x^2 - 1)^2 \\ &= (x + x^2 - 1)(x - x^2 + 1).\end{aligned}$$

例 4 分解因式 $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

【分析】 这道题我们可以将 $6x^2$ 拆成 $2x^2$ 和 $4x^2$ ， $11x$ 拆成 $8x$ 和 $3x$ ，使得分组后每组中两项系数之比相等，即 $1:2=4:8=3:6$ ，然后继续分解。

$$\begin{aligned}\text{解：} \quad & x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\ &= (x^2 + 2x^2) + (4x^2 + 8x) + (3x + 6) \\ &= x^2(x + 2) + 4x(x + 2) + 3(x + 2) \\ &= (x + 2)(x^2 + 4x + 3) \\ &= (x + 2)(x + 1)(x + 3).\end{aligned}$$

【思考】 考虑例 4 的其他解法。

利用添拆项法分解因式，对于一个具体题目，究竟如何添拆，有时不易一下看出，具有一定的灵活性。但对于用 -1 或 1 代替式中字母时，其值为零的一元多项式，还是可以找出一定的规律。

例 5 分解因式 $x^3 - 3x^2 + 4$.

解：用 -1 代替 x ，得 $-1 - 3 + 4 = 0$ ，由此推出三个关

系式:

$$1 = -3 + 4, \quad \text{①}$$

$$-3 = 1 - 4, \quad \text{②}$$

$$4 = 1 + 3. \quad \text{③}$$

按照这三个关系式,可得出三种拆项法:

① 拆三次项 x^3 为 $-3x^3$ 和 $4x^3$,

$$\begin{aligned} & x^3 - 3x^2 + 4 \\ &= -3x^3 - 3x^2 + 4x^3 + 4 \\ &= -3x^2(x+1) + 4(x^3+1) \\ &= -3x^2(x+1) + 4(x+1)(x^2-x+1) \\ &= (x+1)(-3x^2+4x^2-4x+4) \\ &= (x+1)(x^2-4x+4) \\ &= (x+1)(x-2)^2. \end{aligned}$$

② 拆二次项 $-3x^2$ 为 x^2 和 $-4x^2$,

$$\begin{aligned} & x^3 - 3x^2 + 4 \\ &= x^3 + x^2 - 4x^2 + 4 \\ &= x^2(x+1) - 4(x^2-1) \\ &= x^2(x+1) - 4(x+1)(x-1) \\ &= (x+1)(x^2-4x+4) \\ &= (x+1)(x-2)^2. \end{aligned}$$

③ 拆常数项 4 为 1 和 3,

$$\begin{aligned} & x^3 - 3x^2 + 4 \\ &= x^3 + 1 - 3x^2 + 3 \\ &= (x+1)(x^2-x+1) - 3(x^2-1) \\ &= (x+1)(x^2-x+1) - 3(x+1)(x-1) \\ &= (x+1)(x^2-x+1-3x+3) \\ &= (x+1)(x^2-4x+4) \end{aligned}$$

$$= (x+1)(x-2)^2.$$

【思考】 (1) 分解因式 $3x^2 + 2x - 5$, 用 1 代替式中的 x 得 $3 + 2 - 5 = 0$, 由此推得

$$3 = -2 + 5 \quad \text{①}$$

$$2 = -3 + 5 \quad \text{②}$$

$$-5 = -3 - 2 \quad \text{③}$$

你能根据上面的三个关系式, 用三种不同的拆项方法分解因式吗?

(2) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ 能否按上述规律用拆项法分解因式?

例 6 分解因式 $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$.

解: $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$

$$= (x^4 + x^3 - 2x^2) - (x^2 + 4x + 4)$$

(将 $-3x^2$ 拆成 $-2x^2$ 和 $-x^2$)

$$= x^2(x^2 + x - 2) - (x + 2)^2$$

$$= x^2(x + 2)(x - 1) - (x + 2)^2$$

$$= (x + 2)(x^3 - x^2 - x - 2)$$

$$= (x + 2)[(x^3 - 2x^2) + (x^2 - 2x) + (x - 2)]$$

(将 $-x^2$ 拆成 $-2x^2$ 和 x^2 , $-x$ 拆成 $-2x$ 和 x)

$$= (x + 2)[x^2(x - 2) + x(x - 2) + (x - 2)]$$

$$= (x + 2)(x - 2)(x^2 + x + 1).$$

训练与习题

将下列多项式分解因式:

① $x^4 + 4$;

② $5x^3 + 2xy^2 + 7y^3$;

③ $x^3 - 9x + 8$;

- ④ $x^3 + 3x^2 + 3x - 26$;
 ⑤ $a^4 - 27a^2b^2 + b^4$;
 ⑥ $x^9 + x^6 + x^3 - 3$;
 ⑦ $x^6 - y^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4$;
 ⑧ $x^8 + x^4 + 1$;
 ⑨ $a^3b - ab^3 + a^2 + b^2 + 1$;
 ⑩ $a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$;
 ⑪ $2x^4 - 15x^3 + 38x^2 - 39x + 14$;
 ⑫ $x^4 + 2x^3y - 3x^2y^2 - 4xy^3 - y^4$.

提示与详解

- ① 解: $x^4 + 4$

$$= (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2$$
$$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$
$$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2).$$
- ② 解: $5x^3 + 2xy^2 + 7y^3$

$$= 5x^3 - 5xy^2 + 7xy^2 + 7y^3$$
$$= 5x(x^2 - y^2) + 7y^2(x + y)$$
$$= 5x(x + y)(x - y) + 7y^2(x + y)$$
$$= (x + y)(5x^2 - 5xy + 7y^2).$$
- ③ 解: $x^3 - 9x + 8$

$$= x^3 - 9x + 9 - 1$$
$$= (x^3 - 1) - (9x - 9)$$
$$= (x - 1)(x^2 + x + 1) - 9(x - 1)$$
$$= (x - 1)(x^2 + x - 8).$$
- ④ 解: $x^3 + 3x^2 + 3x - 26$

$$= (x^3 - 2x^2) + (5x^2 - 10x) + (13x - 26)$$

$$\begin{aligned}
 &= x^2(x-2) + 5x(x-2) + 13(x-2) \\
 &= (x-2)(x^2 + 15x + 13).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{⑤ 解: } & a^4 - 27a^2b^2 + b^4 \\
 &= (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) - 25a^2b^2 \\
 &= (a^2 - b^2)^2 - (5ab)^2 \\
 &= (a^2 + 5ab - b^2)(a^2 - 5ab - b^2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{⑥ 解: } & x^9 + x^6 + x^3 - 3 \\
 &= (x^9 - 1) + (x^6 - 1) + (x^3 - 1) \\
 &= (x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) + (x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^3 - 1) \\
 &= (x^3 - 1)[(x^6 + x^3 + 1) + (x^3 + 1) + 1] \\
 &= (x^3 - 1)(x^6 + 2x^3 + 3) \\
 &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + 2x^3 + 3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{⑦ 解: } & x^6 - y^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 \\
 &= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) + (x^4 + x^2y^2 + y^4) \\
 &= (x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^2 - y^2 + 1) \\
 &= [(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2](x^2 - y^2 + 1) \\
 &= [(x^2 + y^2)^2 - (xy)^2](x^2 - y^2 + 1) \\
 &= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^2 - y^2 + 1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{⑧ 解: } & x^8 + x^4 + 1 \\
 &= (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 \\
 &= (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 \\
 &= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\
 &= [(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2](x^4 - x^2 + 1) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{⑨ 解: } & a^3b - ab^3 + a^2 + b^2 + 1 \\
 &= (a^3b - a^2b^2 + ab) + (a^2b^2 - ab^3 + b^2) + (a^2 - ab + 1) \\
 &= ab(a^2 - ab + 1) + b^2(a^2 - ab + 1) + (a^2 - ab + 1) \\
 &= (a^2 - ab + 1)(b^2 + ab + 1).
 \end{aligned}$$

$$\text{⑩ 解: } a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$$

$$\begin{aligned}
&= (a^4 + a^3 + a^2) + (a^3 + a^2 + a) + (a^2 + a + 1) \\
&= a^2(a^2 + a + 1) + a(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1) \\
&= (a^2 + a + 1)(a^2 + a + 1) \\
&= (a^2 + a + 1)^2.
\end{aligned}$$

⑪ 解: $2x^4 - 15x^3 + 38x^2 - 39x + 14$

$$\begin{aligned}
&= 2x^4 - 4x^3 - 11x^3 + 22x^2 + 16x^2 - 32x - 7x + 14 \\
&= 2x^3(x - 2) - 11x^2(x - 2) + 16x(x - 2) - 7(x - 2) \\
&= (x - 2)(2x^3 - 11x^2 + 16x - 7) \\
&= (x - 2)[(2x^3 - 7x^2) - (4x^2 - 14x) + (2x - 7)] \\
&= (x - 2)[x^2(2x - 7) - 2x(2x - 7) + (2x - 7)] \\
&= (x - 2)(2x - 7)(x - 1)^2.
\end{aligned}$$

⑫ 解: $x^4 + 2x^3y - 3x^2y^2 - 4xy^3 - y^4$

$$\begin{aligned}
&= (x^4 - y^4) + (3x^3y - 3xy^3) - x^3y - 3x^2y^2 - xy^3 \\
&= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) + 3xy(x^2 - y^2) - xy(x^2 + 3xy + y^2) \\
&= (x^2 - y^2)(x^2 + 3xy + y^2) - xy(x^2 + 3xy + y^2) \\
&= (x^2 + 3xy + y^2)(x^2 - xy - y^2).
\end{aligned}$$