中学生学习指导丛书

初三代数学习指导

北京西城区教研中心数学教研室 编

北京师范大学出版社

中学生学习指导丛书

初三代数学习指导

北京西城区教研中心数学教研室　编

北京师范大学出版社出版发行
全 国 新 华 书 店 经 销
河北省大厂县印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：7.375　字数：154千字
1988年7月第1版　　1989年5月第2次印刷
印数：20,001—29,100

ISBN7-303-00327-4／G·144
定价：2.35元

前　言

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学．它在现代生活和现代生产中的应用非常广泛，是学习和研究现代科学和技术必不可少的基本工具．在中学阶段，数学是重要的学科之一．怎样使学生爱学数学、学会数学、会学数学，已成为每个学生、教师所经常思考与研究的问题．已成为每个学生家长所关注的问题．为了帮助青少年学生在中学阶段系统牢固地掌握数学基础知识，加深对基本概念、定理、公式、法则的理解，培养运用基础知识解决问题、分析问题的能力，开阔眼界，活跃思维，激发学生对数学学习的兴趣，我们编写了这套"初中数学学习指导"小丛书．

这套小丛书是以国家教育委员会制定的全日制中学数学教学大纲为依据编写的，共五册，初一、初二、初三代数各一册，初二、初三几何各一册，它的特点是，每册书的每章主要包括以下三个方面的内容：(1)每章前言．(2)单元学习指导．(3)全章小结．

每章开始部分：简介本章内容，分析本章知识的重点、难点；指出应注意的问题；介绍必要的学习方法．

单元学习指导部分：介绍数学知识产生的背景；针对知识的重点、难点讲清基本概念、基本思路；从各角度来分析概念、巩固概念，分析知识内在的联系．通过例题介绍典型的解题思路，在例题中尽量采取一题多解、一题多变，并在每单元后配备巩固知识、加强判断分析能力的练习．

每章小结部分：分析一章知识间的联系，总结一章中主

要解题思路、数学方法、以及与以后章节的联系，在每章后配有全章练习.

八、这套小丛书是北京市西城区教研中心数学教研室及西城区部分有经验的教师协同编写的.参加本书编写的有肖淑英、凌为淑、李大贞、康英琴、高秀琴、冼伟强、李松文、欧阳东方、方珊、刘绍贞等十位老师.由于我们水平有限，缺乏经验，如有缺点、错误请批评、指正.我们希望这套小丛书能为贯彻我国九年义务教育法，贡献出它的力量.

编　者

1987. 4.

目　录

第十三章 常用对数

本章知识是“指数”一章知识的延伸，与指数有着紧密的联系．指数和对数是中学代数课程的一个重要组成部份，学完本章以后，就把中学代数课程在实数范围内所包含的各种初等运算全部研究过了．掌握本章的内容，对以后学习指数函数和对数函数起着重要的作用．

对数的概念是从指数运算的推导引出的．学习对数的方法是抓住对数与指数，对数式与指数式之间的关系，透彻理解对数概念，掌握好对数运算的法则，然后利用对数进行计算．

本章重点是对数运算和常用对数．对数运算是一种重要的初等运算，利用对数可以简化运算；常用对数是对数中实际应用广泛的一种，顾名思义，它在解决生产实际问题上，起着重要的作用．

本章难点之一是对数概念．只要抓住对数式与指数式中各数的对应关系，对数式中的对数就是指数式中的指数，本质上一致而且运算上互逆这一要点就能克服这一难点．

本章另一难点是常用对数查表，求真数与求对数容易相混淆．强化对“只有对数才有首数与尾数”的记忆，掌握首数、尾数由什么决定及各自的取值范围，这一难点就较易于逐步克服．

本章包括两个单元：对数、常用对数．

第一单元 对　　数

本单元的内容有对数定义及积、商、幂、方根的对数．本单元学习的要求是正确理解对数的概念、熟悉对数式$\log_a N=b$与指数式$a^b=N$之间的对应关系、掌握对数的运算性质并能熟练正确地运用运算性质简化计算．

一、学习指导

1、对数

1）考察下面的计算

求$100\times10000=?$

解： 按普通乘法$100\times10000=1000000$，

按指数法则$10^2\times10^4=10^{2+4}=10^6$；

求$32\times128=?$

解： 按普通乘法$32\times128=4096$，

按指数法则$2^5\times2^7=2^{5+7}=2^{12}$；

求$0.0000001\div0.001=?$

解： 按普通除法$0.0000001\div0.001=0.0001$，

按指数法则$10^{-7}\div10^{-3}=10^{-7-(-3)}=10^{-4}$；

求$\sqrt[3]{117649}$．

解： 按普通开方$\sqrt[3]{117649}=49$．

按指数法则$\sqrt[3]{117649}=7^{6\div3}=7^2$．

从以上几个例子启发了我们，做乘法、除法、开方运算时，如能将一个数（如乘法中的因数，除法中的被除数和除数，开方运算中的被开方数）化成幂的形式，便可以根据幂的运算法则，转化成它们的指数间的低一级运算，使计算大大

简化.

再看下面两例的计算：

已知$2.5=2^{1.32}$，$3.2=2^{1.68}$，求$2.5\times3.2=?$

解：$2.5\times3.2=2^{1.32}\times2^{1.68}=2^{1.32+1.68}=2^3=8$；

已知$57.54=10^{1.76}$，$17.38=10^{1.24}$，求$57.54\times17.38=?$

解：$57.54\times17.38=10^{1.76}\times10^{1.24}=10^{1.76+1.24}=10^3$

$=1000$.

由此可见简化计算的关键是将一个数写成另一个数为底的幂的形式．前四例中写成幂的形式：1000、0.0000001写成以10为底的幂的形式，指数分别是3、-7；32与128写成以2为底的幂的形式，指数分别是5、7；117649写成7^6，都比较容易．而后两例中2.5写成$2^?$，57.54写成$10^?$，这种运算已不同于我们所学过的加、减、乘、除、乘方、开方中的任一种运算了，我们把要求的"？"叫做对数，如$2.5=2^{1.32}$中的1.32就是对数．因为它是把2.5写成以2为底数时的幂的形式时所得到的，所以说1.32是以2为底，2.5的对数．同理1.76是将57.54写成以10为底的幂的形式时所得到的，所以说1.76是以10为底，57.54的对数．由此可见，说对数时应说明三个问题：①谁是对数；②以什么数为底数；③是哪个数的对数．

2） 同学们会问：任何一个已知正数都可以写成某个正数$a(a\neq1)$的幂的形式吗？回答是肯定的.（这个结论可以证明，但证明过程比较复杂，不属于中学数学的范围）

现在可以给对数下定义了．

定义：如果$a(a>0,\ a\neq1)$的b次幂等于N，就是$a^b=N$，数b就叫做以a为底的N的对数，记作$\log_a N=b$，其中a叫做底数（简称底），N叫做真数.

在这里，底数a是已知的，真数N也是已知的，而对数b是所求的，即

$$\overset{\text{所求}\rightarrow}{} a^{b} = N \Longleftrightarrow \log_a N = b$$

$$\underset{\text{已知}}{\uparrow}\quad\underset{\text{已知}}{\uparrow}$$

这两个式子是等价的，左边的叫指数式，右边的叫对数式，它们可以互换．a、b、N处在不同的式子中，它们的名称也有区别．

	a	N	b
指数式$a^b=N$	底数	幂	指数
对数式$\log_a N=b$	底数	真数	对数

在指数式中的幂就是对数式中的真数，指数式中的指数就是对数式中的对数．

这两个式子既然是等价的，为什么有了指数式，还要学习对数式呢？那就是因为在指数式中已知底a和指数b求幂N，在对数式中已知底数a和真数N求对数b，是针对不同的过程而言的．

正如a^b表示一种运算（乘方运算），“$\log_a N$”也表示一种运算，这种运算叫做对数运算，$\log_a N$表示求以a为底N的对数的对数运算，它的运算结果是b（对数的值），这两种运算在底数确定的前提下，是互逆的两个运算．

3）对数式$\log_a N=b$中，底数a的取值范围有明确的规定：$a>0$，且$a\neq1$．为什么要如此规定呢？可从与对数式等价的指数式$a^b=N$中底数a的条件加以对照考虑．

① 当$a<0$时，则N取某些值时b不存在，如$a=-2$，$N=8$时，$(-2)^b=8$，这样的b不存在．即$\log_{-2}8$不存在．

② 当$a=0$时，N不为零时b不存在，如$\log_0 2$不存在．即不存在实数b使$0^b=2$；如$N=0$时，则满足$0^b=N$这样的b不唯一，有无数个值，即$\log_0 0$有无数个值．

③ 如$a=1$时，N不为1，满足$1^b=N$，这样的b不存在，即$\log_1 N$不存在；如$N=1$，则$\log_1 1$有无数个值.

这样规定了$a>0$，且$a\neq 1$.

4) 对数式$b=\log_a N$中，真数N的取值范围有没有限制呢？这也要从指数式$a^b=N$中，N的取值范围加以对照，当底数$a>0$，且$a\neq 1$时，正数a的任何次幂都是正数，(为什么？由指数概念从正整数扩张到实数去考虑.)所以N总是正数，也就是说负数和零没有对数，如$\log_a 0$和$\log_a(-2)$都是无意义的.

对数式与指数式的互化，同学可以自己编几道练习.

例1 读出下列各式，并求出它们的值：

(1) $\log_6 \dfrac{1}{36}$； (2) $\log_{27} 9$；

(3) $\log_\pi \pi$； (4) $\log_{\frac{4}{3}} 1$.

分析：以上各式都是对数，求对数的值，可以根据对数的定义来求. 设对数为x，将对数式化成指数式，问题转化成化同底幂求指数.

解：(1) 设$\log_6 \dfrac{1}{36}=x$，则$6^x=\dfrac{1}{36}$.

$\because$ $\dfrac{1}{36}=6^{-2}$，$\therefore$ $x=-2$，即$\log_6 \dfrac{1}{36}=-2$.

(2) 设$\log_{27} 9=x$，则$27^x=9$.

$\because$ $27^x=3^{3x}$，$9=3^2$，$\therefore$ $3^{3x}=3^2$.

$\therefore$ $3x=2$，$x=\dfrac{2}{3}$，即$\log_{27} 9=\dfrac{2}{3}$.

(3) 设$\log_\pi \pi=x$，则$\pi^x=\pi$.

$\therefore$ $x=1$，即$\log_\pi \pi=1$.

(4) 设$\log_{\frac{4}{3}} 1=x$，则$\left(\dfrac{4}{3}\right)^x=1$.

$\because \quad \left(\frac{4}{3}\right)^0=1, \qquad \therefore \quad x=0,$

即 $\qquad \log_{\frac{4}{3}}1=0.$

说明：$\log_{\pi}\pi=1$，可推广到$\log_a a=1(a>0,\ a\neq 1)$，也就是说底数的对数等于1；$\log_{\frac{4}{3}}1=0$可推广到$\log_a 1=0$ $(a>0,\ a\neq 1)$，也就是说1的对数等于0．这两个结论是对数的性质．

例2 求下列各式中的x：

(1) $\log_4 x=2$； (2) $\log_{\frac{1}{2}}x=-3$；

(3) $\log_x 49=2$； (4) $\log_x 2\sqrt{2}=\frac{3}{4}$；

(5) $10^{-\log_2 x}=\frac{1}{\sqrt{1000}}$； (6) $\log_8\frac{1}{4}=x$．

分析：在对数式中，不论x是底数、真数、或是对数，都可以将对数式化成指数式再求x．但是要注意x是真数时，必须是正数；x是底数时，$x>0$且$x\neq 1$．

解：(1) 将$\log_4 x=2$ 化成$4^2=x$，则$x=16$．

(2) 将$\log_{\frac{1}{2}}x=-3$ 化成$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=x$，则$x=8$．

(3) 将$\log_x 49=2$ 化成$x^2=49$，则$x=\pm 7$．

$\because \quad x>0$，且$x\neq 1$，$\therefore \quad x=-7$舍去，$\therefore \quad x=7$．

(4) 将$\log_x 2\sqrt{2}=\frac{3}{4}$ 化成$x^{\frac{3}{4}}=2\sqrt{2}$，即$x^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{2}}$．

$\therefore \quad x=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}=2^2=4$．

(5) 将$10^{-\log_2 x}=\frac{1}{\sqrt{1000}}$ 化成同底幂$10^{-\log_2 x}=10^{-\frac{3}{2}}$，

$\therefore \quad \log_2 x=\frac{3}{2}$，$\therefore \quad x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$．

(6) 将 $\log_8 \frac{1}{4} = x$ 化成 $8^x = \frac{1}{4}$.

$\because$ $8^x = 2^{3x}$, $\frac{1}{4} = 2^{-2}$, $\therefore$ $3x = -2$, $x = -\frac{2}{3}$.

$\therefore$ $\log_8 \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$.

例3 下列各式中，x取什么范围内的数才有意义?

(1) $\log_2(x+1)$; (2) $\log_3(-x)$;

(3) $\frac{1}{\log_2(x+4)}$; (4) $\log_5 x^2$.

解: (1) 在$\log_2(x+1)$中真数$x+1>0$, $\therefore$ $x>-1$;

(2) 在$\log_3(-x)$中真数$-x>0$, $\therefore$ $x<0$;

(3) 在$\frac{1}{\log_2(x+4)}$中真数$x+4>0$, 且$x+4\neq 1$.

$\therefore$ $x>-4$ 且$x\neq -3$.

(4) 在$\log_5 x^2$中真数$x^2>0$, $\therefore$ $x\neq 0$.

5) 对数恒等式$a^{\log_a N}=N$.

这个等式的证明如下:

设 $\log_a N = x$, 则 $a^x = N$.

将 $x=\log_a N$ 代入 $a^x = N$,

得$a^{\log_a N}=N$.

应用时，要注意条件$a>0$, 且$a\neq 1$, $N>0$.如 $5^{\log_5(-3)}=(-3)$是不成立的.

例4 计算:

(1) $5^{\log_{25}4}$; (2) $5^{\log_5 8+1}$; (3) $9^{1-\log_9 4}$;

(4) $4^{-\log_{1/2}5}$; (5) $25^{\frac{1}{3}\log_5 27+4\log_{125}3}$.

解: (1) $5^{\log_{25}4} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{25}4} = 25^{\frac{1}{2}\log_{25}4} = \left(25^{\log_{25}4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=4^{\frac{1}{2}}=2;$$

(2) $5^{\log_5 8+1}=5^{\log_5 8}\times 5^1=8\times 5=40;$

(3) $9^{1-\log_3 4}=9\times 9^{-\log_3 4}=9\times 3^{-2\log_3 4}=9\times(3^{\log_3 4})^{-2}$

$$=9\times 4^{-2}=\frac{9}{16};$$

(4) $4^{-\log_{\frac{1}{2}}5}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-\log_{\frac{1}{2}}5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\log_{\frac{1}{2}}5}$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}5}\right]^2=5^2=25;$$

(5) $25^{\frac{1}{3}\log_5 27+4\log_{125}8}=25^{\frac{1}{3}\log_5 27}\times 25^{4\log_{125}8}$

$=(5^2)^{\frac{1}{3}\log_5 27}(125)^{\frac{2}{3}\cdot 4\log_{125}8}$

$=(5^{\log_5 27})^{\frac{2}{3}}(125^{\log_{125}8})^{\frac{8}{3}}=(27)^{\frac{2}{3}}\cdot(8)^{\frac{8}{3}}$

$=9\times 2^8=2304.$

2. 积、商、幂、方根的对数

积、商、幂、方根的对数，即对数的运算法则．不仅要记住这些法则，还要会用语言叙述，并且要注意公式中各字母的取值范围．

在底数$a>0$且$a\neq 1$的前提下：

$\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n$　　(m、n为正实数)．

$\log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$　　(m、n为正实数)．

$\log_a m^n=n\log_a m$　　($m>0$，n为任意实数)．

$\log_a\sqrt[n]{m}=\frac{1}{n}(\log_a m)$　　($m>0$，$n\neq 0$的任意实数)．

利用上面几个公式可以把高一级运算(乘、除、乘方、开方的对数)转化为低一级的运算(加、减、乘、除)，简化了

计算方法，加快了计算速度.

例5　判断正误：

(1) $\log_a(-3)^2=2\log_a(-3)$；　(×)

(2) $\log_a 5^{-3}=-\frac{1}{3}\log_a 5$；　(×)

(3) $\log_a x=\log_a m+\log_a n$，则$x=m+n$；　(×)

(4) $\frac{\log_a m}{\log_a n}=\log_a(m-n)$；　(×)

(5) $\log_a[(-5)\cdot(-4)]=\log_a(-5)+\log_a(-4)$.　(×)

说明：上列各式错误的原因是什么？请你指出来.

例6　x、y为何值时，下列式子有意义，

(1) $2\log_{3x}x=\log_{3x}x^2$；

(2) $\log_a xy-\log_a x^2=\log_a\frac{y}{x}$；

(3) $\log_a(-xyz^2)=\log_a(-x)+\log_a y+2\log_a z$.

解：(1) 应满足条件$\begin{cases}x>0\\3x>0\end{cases}$，且$3x\neq 1$，

$\therefore$　$x>0$，且$x\neq\frac{1}{3}$；

(2) x、y应同号；

(3) $x<0$，$y>0$，$z>0$.

例7　求下列各式中的x：

(1) $\log_3 x=\frac{1}{3}\log_3 a+2\log_3 b$；

(2) $\log_3 x=\frac{2}{3}(\log_3 a+\log_3 b)$；

(3) $\log_a x=2\log_a m-\log_a n+\frac{1}{3}\log_a p$.

分析：积、商、幂、方根的对数的运算法则逆向应用，

就能把等式两边化成$\log_a x=\log_a(\quad)$的形式，底和对数分别相等，则真数相等．

解：(1) $\log_3 x=\frac{1}{3}\log_3 a+2\log_3 b=\log_3\sqrt[3]{a}+\log_3 b^2$

$$=\log_3(\sqrt[3]{a}\cdot b^2),$$

$\therefore\quad x=\sqrt[3]{a}\cdot b^2.$

(2) $\log_3 x=\frac{2}{3}(\log_3 a+\log_3 b)=\frac{2}{3}\log_3 ab$

$$=\log_3\sqrt[3]{a^2b^2},$$

$\therefore\quad x=\sqrt[3]{a^2b^2}.$

(3) $\log_a x=2\log_a m-\log_a n+\frac{1}{3}\log_a p$

$$=\log_a m^2-\log_a n+\log_a\sqrt[3]{p}$$

$$=\log_a\frac{m^2\cdot\sqrt[3]{p}}{n},$$

$\therefore\quad x=\frac{m^2\sqrt[3]{p}}{n}.$

例8　计算：

(1) $\log_{10}8+\log_{10}125$；(2) $(\log_{10}5)^2+\log_{10}2\cdot\log_{10}50$；

(3) $(\log_6 3)^2+\log_6 3\cdot\log_6 4+(\log_6 2)^2$.

分析：因为$\log_{10}8$和$\log_{10}125$等的数值用初等的方法无法求出，利用对数运算法则化成$\log_a a$或$\log_a a^n$或$\log_a 1$的形式，就可求值．

解：(1) $\log_{10}8+\log_{10}125=3\log_{10}2+3\log_{10}5$

$$=3(\log_{10}2+\log_{10}5)=3\log_{10}10=3.$$

(2) $(\log_{10}5)^2+\log_{10}2\cdot\log_{10}50$

$$=(\log_{10}5)^2+\log_{10}2(\log_{10}10+\log_{10}5)$$

$$=(\log_{10}5)^2+\log_{10}2+\log_{10}2\cdot\log_{10}5$$

$$=\log_{10}5(\log_{10}5+\log_{10}2)+\log_{10}2$$

$=\log_{10}5+\log_{10}2$

$=1.$

(3) $(\log_6 3)^2+\log_6 3\cdot\log_6 4+(\log_6 2)^2$

$=(\log_6 3)^2+2\log_6 3\cdot\log_6 2+(\log_6 2)^2$

$=(\log_6 3+\log_6 2)^2$

$=(\log_6 6)^2$

$=1.$

例9 （1）已知 $\log_{35}5=a$，求 $\log_{35}\dfrac{49}{25}$；

（2）已知 $48^a=24$，用a表示$\log_{48}2$和$\log_{48}3$；

（3）已知 $\log_{10}64=a$，用a表示 $\log_{10}\sqrt[3]{25}$.

（4）已知$\log_{10}\dfrac{8}{7}=a$，$\log_{10}\dfrac{50}{49}=b$，求$\log_{10}2$和$\log_{10}7$.

分析：（1）$\log_{35}\dfrac{49}{25}=2\log_{35}7-2\log_{35}5$，又$\log_{35}5$已知，$\log_{35}7=\log_{35}\dfrac{35}{5}=\log_{35}35-\log_{35}5$，这样就可以求出．要记住利用$\log_a a=1$，在解这类题目中是一重要途径．

解：（1）$\because\ \log_{35}\dfrac{49}{25}=2(\log_{35}7-\log_{35}5)$，

而 $\log_{35}5=a$，$\log_{35}7=\log_{35}\dfrac{35}{5}=1-a$

$\therefore\ \log_{35}\dfrac{49}{25}=2(1-2a)$；

（2）$\because\ 48^a=24$，$\therefore\ \log_{48}24=a$，

$\log_{48}2=\log_{48}\dfrac{48}{24}=\log_{48}48-\log_{48}24=1-a$，

$\log_{48}3=\log_{48}\dfrac{48}{16}=\log_{48}48-4\log_{48}2=1-4(1-a)$

$=4a-3.$

$\therefore\quad \log_{48}2=1-a,\quad \log_{48}3=4a-3;$

(3) $\because\quad \log_{10}64=a$，即 $\log_{10}2^6=a$，

$\therefore\quad \log_{10}2=\dfrac{a}{6}.$

$$\log_{10}\sqrt[3]{25}=\frac{2}{3}\log_{10}5=\frac{2}{3}\left(\log_{10}\frac{10}{2}\right)=\frac{2}{3}(\log_{10}10-\log_{10}2)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{a}{6}\right)=\frac{12-2a}{18}=\frac{6-a}{9};$$

(4) $\because\quad \log_{10}\dfrac{8}{7}=a,\quad \therefore\quad 3\log_{10}2-\log_{10}7=a,$

$\because\quad \log_{10}\dfrac{50}{49}=b$，而 $\log_{10}\dfrac{50}{49}=\log_{10}\dfrac{100}{7^2\cdot 2}$，

$\therefore\quad 2-2\log_{10}7-\log_{10}2=b.$

得 $\begin{cases}3\log_{10}2-\log_{10}7=a,\\ \log_{10}2+2\log_{10}7=2-b.\end{cases}$

解方程组得 $\log_{10}2=\dfrac{2a-b+2}{7}$，

$$\log_{10}7=\frac{-a-3b+6}{7}.$$

二、单元练习

1． 判断正误，正确的在（ ）内划“√”号，错误的在（ ）内划“×”号，划“×”号的说明理由．

(1) 一切正数的对数都是正数； （ ）

(2) $\dfrac{\log_{10}12}{\log_{10}4}=\log_{10}8$； （ ）

(3) $(\log_a x)^2=2\log_a x$； （ ）

(4) $\log_2 x=4$，则 $x=8$． （ ）

2． 求下列各式中 x 的值：