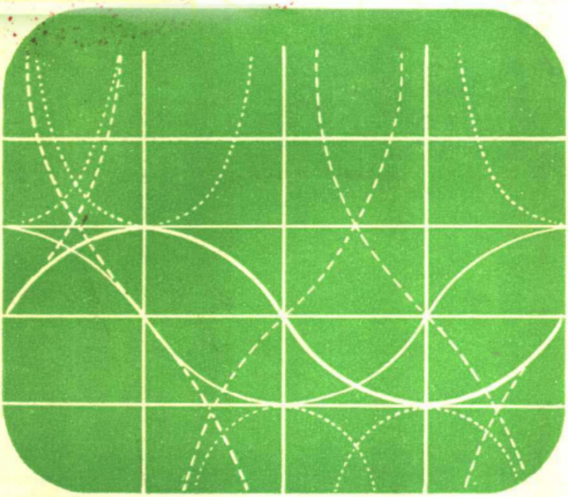

〔苏〕Л. С. 庞特里亚金 著

李万年 译

中学生数学分析

上海教育出版社

中学生数学分析

〔苏〕Л.С. 庞特里亚金 著
李 万 年 译

上海教育出版社

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА», 1980

中学生数学分析
〔苏〕Л.С. 庞特里亚金 著
李 万 年 译
上海教育出版社出版
(上海永福路 123 号)
新华书店上海发行所发行 江苏启东印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张 3 字数 61,000
1982年 6 月第 1 版 1982年 6 月第 1 次印刷
印数 1—76,000本
统一书号：7150·2726 定价：0.23元

序　言

这本五万多字的小册子，估计在成功的情况下将变成中学数学分析的教科书。本书的内容，能够包括同一教学大纲的任何一种不同的版本。本书不从极限的定义和它的计算法则开始。书中把极限解释为明显的自然而然的东西，并在切线和导数的定义中阐明。由此，开始了本书的叙述。继而，计算多项式的导数、三角函数的导数，给出积、商以及复合函数的微分法则，并在其中间证明罗尔定理和拉格朗日公式。在这个基础上研究函数，寻求递增区间和递减区间，极大值和极小值。积分定义为三种不同的说法：微分的逆运算，图形的面积，有穷和的极限。此后，很仔细地研究函数 e^x，把它作为多项式序列 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 当整数 n 趋向于无穷大时的极限。计算函数 e^x、$\ln x$ 的导数，最后给出各节的练习题。题目虽然不多，但有时是相当困难的。书中不强调逻辑上的严密性，但强调计算的方法。作为一本通俗的书，能够供初学数学分析的读者使用。因为我自己无论什么时候都不曾在中学里任教，当写本书的时候，我以有资格的数学家的合理的看法和我在中学期间对分析认识的亲身回忆为指针。虽然当时在中学里并不教授分析，我也是在进入大学以后才对它有了足够认识的。知道了什么是导数，什么是积分，并学会了利用这些工具解题。当时，关于极限理论我还没有任何一点点概念。关于它的存

在我还是在大学里才知道并对这一点曾非常惊奇。在中学里，我认为不应该从极限理论开始讲述分析。必须明白，历史上的极限理论是在已经有了分析之后，作为增添的理论而出现的。仔细研究象极限和连续函数那样的现象，可能引到没有趣味的地步，甚至引起厌恶。记得，当我还是中学生的时候，不知是在哪一节分析课中，我猜透了关于连续函数取得所有中间值定理的证明。这一猜测致使我当时极其莫名其妙，也非常激动。思维健全的人应该领悟到函数的图象，就象没有缺口的金属薄片的装饰边那样好。当对图象的概念有了这样的认识时，在凸起部分的切线应该被认识到象尺子的边缘那样，紧紧靠着薄片边缘凸起的部分。因此，无论是切线的存在，也无论是导数的存在，都不应该产生疑问。正是这样，那个薄片面积的存在不应该产生疑问。因此，其中积分的存在就没有疑问。我想过，当中学生学习几何的时候，领会了由细长的金属薄片做成的三角形，比如能够把它拿在手中，移动到另一位置并翻转一个面。这不是说三角形的定义就应该如此，但是，我觉得对它的感觉应该正是这样的。根据这样的教学见解，我不从极限的定义开始阐述分析，而从切线和导数的定义开始。

我觉得，应该列入中学教学大纲的只是从第一节至第七节中所阐述的知识。函数 e^x 的使人信服的描述，费去了从第八节到第十节的篇幅，我好象觉得过分的复杂。虽然如此，根据大纲的要求，我还是给出了它，恰恰也是为了完成中学教学大纲的要求，我引证了关于极限和连续函数的某些知识，但是仅限于在第十三节跋中。

在结束语中，我对 B.P. 捷列斯尼娜表示感谢，在书的写法和编辑中，她给予我很大的帮助。

目　录

§1.

导　数

当研究函数时，它的导数起着重要的作用。如果给定某一函数

$$y=f(x),\tag{1}$$

便能够计算出称为函数 $f(x)$ 的导数的函数 $f'(x)$。$f'(x)$ 的值描述 y 值相对于 x 值的变化而变化的速度。当然，这不是导数的定义，而只是某些导数的直观的描述。考察一个特例就可以确信这一描述。如果依赖关系 (1) 是正比例关系 $y=kx$，那么 y 对于 x 的变化速度自然为 k，即在这种情况下，我们应该有 $f'(x)=k$。这时，导数具有明显的力学意义。如果把 x 理解为时间，而把 y 理解为在这段时间内所通过的路程，那么 k 就表示质点运动的速度。在这里 y 对于 x 的变化速度 $f'(x)$ 是一个常数值，但是当量 y 对于量 x 的依赖关系(1)比较复杂时，导数 $f'(x)$ 本身又是变量 x 的函数。

导数适用于物理过程的研究，其中各物理量变化时，它们的变化速度起着重要的作用。但是，我们还是从导数的几何应用开始，并在这个实例中比较详细地说明导数概念本身。

导数和切线　在笛卡儿平面直角坐标系中，作出函数 $f(x)$（见(1)）的图象。为此，象平常一样，在图形的平面上，作水平轴为横坐标轴，选择由左向右的方向为横坐标的方向，而竖直的轴为纵坐标轴，选择从下往上的方向为纵坐标的方向（图 1）。在这个坐标系中，函数 $f(x)$ 的图象是一条曲线，我们用 L 表示。摆在自己面前的问题是：给出在曲线 L 上

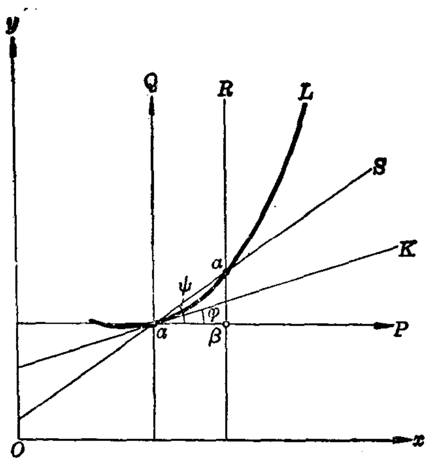

图 1

某一点 a 处的切线的合理的定义，以及计算由这条切线决定的量。为了合理的定义切线，我们选择点 a 附近的点，暂时认为点 a 是不动的，在它附近但与它有区别的动点为 α。通过点 a 和 α 的直线 S 称为曲线 L 的割线，因为直线与曲线相交于两点 a 和 α。属于曲线 L 的点 α 可能处在点 a 的右边，也可能处在点 a 的左边。从现在开始，使点 α 沿着曲线 L 运动，不受限制地趋近于曲线上的点 a。当点 α 这样运动时，通过定点 a 和动点 α 的割线 S，一方面旋转，一方面无限地趋近于通过定点 a 的某一条直线 K。这条直线 K 就叫做曲线 L 在点 a 处的切线。切线 K 通过定点 a，因此对它足够确切的描述是，计算这条直线与横坐标轴的倾角 φ，更确切地说，是计算这条直线与横坐标轴的倾角的正切 $\mathrm{tg}\varphi$。

为了计算 $\mathrm{tg}\varphi$ 的值，我们预先算出割线 S 与横坐标轴的

倾角 ψ 的 $\operatorname{tg}\psi$。点 a 的横坐标和纵坐标分别用 x 和 y 记为：

$$a=(x, y), \tag{2}$$

其中 x、y 满足关系式(1)，因为点 a 在函数 $f(x)$ 的图象 L 上。类似地，点 α 的横坐标和纵坐标用 ξ 和 η 记为：

$$\alpha=(\xi, \eta), \tag{3}$$

其中 ξ、η 满足关系式

$$\eta=f(\xi), \tag{4}$$

因为点 α 同样是在函数 $f(x)$ 的图象 L 上。现在通过点 a 有两条直线即水平直线 P 和竖直直线 Q。这两条直线分别平行于原来坐标系的横坐标轴和纵坐标轴。我们选取这两条直线的方向为对应的原来坐标轴的方向。把直线 P 和 Q 作为横坐标轴和纵坐标轴，在我们图形的平面上，其本身又确定了以点 a 为原点的某一新的坐标系。割线 S 不能是竖直的，所以很明显，就是说选取割线 S 的方向是由左向右的。由于新的横坐标轴 P 平行于原横坐标轴，那么为了计算角 ψ，我们只要计算直线 P 的正方向和直线 S 的正方向之间的夹角就足够了。这个角 ψ 比直角小，但它可能是正的，也可能是负的。以 P 和 Q 为轴的新的坐标系把平面分为四个象限。如果割线 S 从第三象限到第一象限，角 ψ 是正的；如果割线 S 从第二象限到第四象限，角 ψ 是负的。在新的坐标系中，点 α 的横坐标和纵坐标的值分别等于

$$(\xi-x),(\eta-y)。 \tag{5}$$

为了计算角 ψ，过点 α 引直线 P 的垂线 R，直线 R 与直线 P 的交点记为 β。研究平面直角三角形 $a\beta\alpha$，其中 β 是直角的顶点。如果不顾及角 ψ 的符号，那么它就等于我们的三角形在顶点 a 处的角 $\beta a\alpha$。这个角的正切等于直角边 $\beta\alpha$ 的长 $l(\beta\alpha)$ 除以直角边 $a\beta$ 的长 $l(a\beta)$。这样一来，我们有公式

$$|\mathrm{tg}\psi|=\frac{l(\beta\alpha)}{l(\alpha\beta)}. \tag{6}$$

$l(\beta\alpha)$ 的长是点 α 在新坐标系中纵坐标的绝对值，即等于 $|\eta-y|$（见(5)）。$l(\alpha\beta)$的长等于点 α 在新坐标系中横坐标的绝对值，即等于$|\xi-x|$。这样一来，由(6)式得出

$$|\mathrm{tg}\psi|=\frac{|\eta-y|}{|\xi-x|}. \tag{7}$$

现在我们证明，

$$\mathrm{tg}\psi=\frac{\eta-y}{\xi-x}. \tag{8}$$

为此我们指出：如果点 α 在第一象限或者第三象限，那么它的横坐标和纵坐标具有相同的符号，因而，等式(8)的右端是正的。在这种情况下，因为角 ψ 是正的，所以 $\mathrm{tg}\psi$ 的值也是正的。如果点 α 在第二象限或者第四象限，那么它的横坐标和纵坐标（见(5)）具有不同的符号，所以等式(8)的右端是负的。但是在这种情况下因为角 ψ 是负的，所以 $\mathrm{tg}\psi$ 也是负的。因此，公式(8)得证。现在把其中的 y 和 η 的值用公式(1)和(4)替代。我们就得到

$$\mathrm{tg}\psi=\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}. \tag{9}$$

当点 α 无限趋近于点 a 时，它的横坐标 ξ 也无限趋近于点 a 的横坐标 x。最终记为：

$$\xi\to x. \tag{10}$$

为了求出 $\mathrm{tg}\varphi$ 的值，需要计算当 $\xi\to x$ 时 $\mathrm{tg}\psi$ 所达到的值。这一点可用公式的形式记为：

当 $\xi\to x$ 时， $\mathrm{tg}\psi\to\mathrm{tg}\varphi$. (11)

在高等数学中，由两个公式组成的最后的关系，记为一个公式

$$\lim_{\xi\to x}\mathrm{tg}\psi=\mathrm{tg}\varphi, \tag{12}$$

或者把公式(9)代入上式替代 $\mathrm{tg}\psi$，把最后的等式重记为公式

$$\mathrm{tg}\varphi=\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}. \tag{13}$$

lim 是拉丁语 limit 的缩写，它的中文意思是极限。

为了严格描述(13)式的运算，引进分式

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}, \tag{14}$$

我们需要准确地定义符号→，即说明变量对某一个常数的趋向。但是，在这里我们应当直观地理解这一过程。必须指出，在公式(14)中，不能简单地取 $\xi=x$，因为当 $\xi=x$ 时，我们得到的分式的分子和分母都等于零，所以必须研究值 ξ 趋近于常数 x 的过程，并注意这时量(14)的性质。

为了阐明在简单的例子中极限变化的概念，我们研究当函数 $f(x)$ 以公式

$$y=f(x)=x^2 \tag{15}$$

给出时的情况。

在这种情况下分式(14)记为

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=\frac{\xi^2-x^2}{\xi-x}=\xi+x. \tag{16}$$

上式的右边已经能够用 x 的值替代 ξ 的值，并且我们不会得到无意义的关系式 $\frac{0}{0}$。因此，在这种特殊的情况下，我们有

$$\lim_{\xi\to x}\frac{\xi^2-x^2}{\xi-x}=\lim_{\xi\to x}(\xi+x)=2x. \tag{17}$$

因此，我们确定

$$\text{当 }\xi\to x\text{ 时，}\frac{\xi^2-x^2}{\xi-x}\to 2x, \tag{18}$$

或者，同样的，

$$\lim_{\xi \to x} \frac{\xi^2 - x^2}{\xi - x} = 2x. \tag{19}$$

值

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \tag{20}$$

称为任意函数 $f(x)$ 在点 x 处的导数，并用 $f'(x)$ 标记。所以，按定义我们有

$$f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}. \tag{21}$$

这样一来，公式(19)表明对函数(15)

$$f'(x) = 2x. \tag{22}$$

应该注意到在公式(21)中，我们没有单独地研究 α 从右边趋近于 a 和 α 从左边趋近于 a 时的两种情况。在第一种情况下，ξ 逐渐减少地趋近于 x，而在第二种情况下，ξ 逐渐增加地趋近于 x。当 ξ 按这些方式趋近于 x 时，导数的计算结果应当是一样的，仅仅当在点 x 的导数被认为是存在时才是这样。然而，能够轻易地指出那样的函数，对这样的函数从左边和从右边趋近给出不同的结果。作为例子，我们研究由方程

$$y = f(x) = |x| + x^2 \tag{23}$$

所给出的函数 $f(x)$。我们计算当 $x = 0$ 时这个函数的导数。在这种情况下我们有

$$\frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{|\xi| + \xi^2}{\xi} = \frac{|\xi|}{\xi} + \xi. \tag{24}$$

当 ξ 为正数时 $|\xi| = \xi$，当 ξ 为负数时 $|\xi| = -\xi$。因此，我们有

当 $\xi > 0$ 时，
$$\frac{|\xi|}{\xi} = +1 \tag{25}$$

和当 $\xi < 0$ 时，
$$\frac{|\xi|}{\xi} = -1. \tag{26}$$

于是，

当 $\xi>0$ 时，有
$$\lim_{\xi\to 0}\frac{|\xi|+\xi^2}{\xi}=+1, \tag{27}$$
当 $\xi<0$ 时，有
$$\lim_{\xi\to 0}\frac{|\xi|+\xi^2}{\xi}=-1. \tag{28}$$
因而，量(24)的极限依赖于 ξ 趋近于 0 的方向：是从右边或是从左边。在这种情况下认为在点 $x=0$ 处给定的函数 $f(x)$ (见(23))没有导数，而相应的图象也没有切线。当公式(21)没有确定的值 $f'(x)$ 时，常出现更复杂的情况。但是，在以后我们具有的仅是这样的函数问题，对于这种函数公式(21)确定 $f'(x)$ 的值，即函数 $f(x)$ 的导数是存在的。

求出函数 $f(x)$ 的导数的运算（见(21)）通常称为函数 $f(x)$ 的微分法。所以，具有导数的函数称为是可微的。今后我们所研究的所有的函数都是可微的。

§2.

多项式导数的计算

在这里我们计算函数

$$y=f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \tag{1}$$

的导数，即具有常系数 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 的 x 的任意多项式的导数。这时，对函数 $f(x)$的导数 $f'(x)$，利用某些记号的变换有时是比较方便的。也就是说，我们有时用 $(f(x))'$ 标记这个导数，即

$$f'(x)=(f(x))'. \tag{2}$$

利用这些符号，现在我们能够把 §1 中的(15) 和 (22) 这两个公式记入一个公式

$$(x^2)'=2x.$$

首先，我们计算缩减为一项的最简单的 n 次多项式的导数。就是

$$y=f(x)=x^n. \tag{3}$$

为了计算函数(3)的导数，我们利用一个很简单但是又很重要的代数公式，在这里导出它的证明。

为了写出并证明这个代数公式，我们观察以公式

$$\varphi_k(u,v)=u^k+u^{k-1}v+\cdots+uv^{k-1}+v^k \tag{4}$$

给出的两个变量 u 和 v 的多项式 $\varphi_k(u, v)$。这样一来，多项式 $\varphi_k(u,v)$就表示所有形如 u^iv^j 的单项式的和，其中 i 和 j 为满足条件 $i+j=k$ 的非负整数。

多项式 $\varphi_k(u,v)$乘以值 u，即组成多项式

$$\varphi_k(u,v)\cdot u. \tag{5}$$

这个多项式表示所有形如 $u^{i+1}v^j$ 的单项式的和，其中 i 和 j 是满足关系式 $i+j=k$ 的非负整数。这样，多项式(5)就表示所有形如 $u^p v^q$ 的单项式的和，其中 p 和 q 是满足关系式

$$p \geqslant 1, \quad p+q=k+1$$

的非负整数。由此可见，多项式(5)包含属于多项式 $\varphi_{k+1}(u, v)$ 的除去单项式 v^{k+1} 以外的所有的项。因此，我们有等式

$$\varphi_k(u, v) \cdot u = \varphi_{k+1}(u, v) - v^{k+1}. \tag{6}$$

同样地，多项式 $\varphi_k(u, v)$ 乘以 v，我们得到公式

$$\varphi_k(u, v) \cdot v = \varphi_{k+1}(u, v) - u^{k+1}. \tag{7}$$

由等式(6)减去等式(7)，得

$$\varphi_k(u, v)(u-v) = u^{k+1} - v^{k+1}. \tag{8}$$

在这个等式中用 n 代替 $k+1$，并把得到的关系式除以 $u-v$，我们便得到重要的公式

$$\frac{u^n - v^n}{u-v} = \varphi_{n-1}(u, v), \tag{9}$$

其中 $\varphi_{n-1}(u, v)$ 由公式

$$\varphi_{n-1}(u, v) = u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1} \tag{10}$$

确定。应该着重指出，在这里 $n \geqslant 1$，因为 $n=k+1$，其中 $k \geqslant 0$。记住，多项式 $\varphi_{n-1}(u, v)$ 含有的项数等于 n。

利用公式(9)，我们将不费力地计算出函数 x^n 的导数。为此，依据§1(见§1(21))中阐明的法则，我们能够建立初步的关系式

$$\frac{\xi^n - x^n}{\xi - x} \tag{11}$$

并求出当 $\xi \to x$ 时这个关系式的极限。由代数公式(9)我们有

$$\frac{\xi^n - x^n}{\xi - x} = \xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \cdots + \xi x^{n-2} + x^{n-1}, \tag{12}$$

其中右边的项数等于 n。当 $\xi \to x$ 并过渡到极限时，我们应当

在等式(12)的右边用 x 代替 ξ。这时，每一项 $\xi^i x^j$ 都变为项 x^{n-1}，其中 $i+j=n-1$。这样，我们得到

$$(x^n)'=\lim_{\xi\to x}\frac{\xi^n-x^n}{\xi-x}=nx^{n-1}$$

并且最后有

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \tag{13}$$

在公式(13)的证明中，我们不会研究 $n=0$ 的情况，因为公式(9)仅当 $n\geqslant1$ 时是正确的。由此可见，函数 $x^0=1$ 的导数没有被我们计算。计算函数 $f(x)=C$ 的导数是比较简单的，其中 C 为常数。对于这个函数我们有

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=\frac{C-C}{\xi-x}=0。$$

这样就有

$$C'=0, \tag{14}$$

即常数的导数等于零。

为了由最简单的多项式 x^n 变为一般的多项式(1)，我们应该引出两个普通的求导法则。即求两个函数的和的导数和求常数乘以函数的积的导数。这些法则如下，如果 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是两个函数，那么我们有

$$(f_1(x)+f_2(x))'=f_1'(x)+f_2'(x). \tag{15}$$

用文字叙述为：两个函数的和的导数等于各被加项的导数的和。其次，如果 C 是常数，而 $f(x)$ 是某个函数，那么有

$$(Cf(x))'=Cf'(x). \tag{16}$$

用文字叙述为：常数乘以函数的积的导数等于常数乘以函数的导数的积。

我们首先证明法则(15)，有

$$(f_1(x)+f_2(x))'=\lim_{\xi\to x}\frac{f_1(\xi)+f_2(\xi)-(f_1(x)+f_2(x))}{\xi-x}$$

$$=\lim_{\xi\to x}\left[\frac{f_1(\xi)-f_1(x)}{\xi-x}+\frac{f_2(\xi)-f_2(x)}{\xi-x}\right]$$

$$=\lim_{\xi\to x}\frac{f_1(\xi)-f_1(x)}{\xi-x}+\lim_{\xi\to x}\frac{f_2(\xi)-f_2(x)}{\xi-x}$$

$$=f_1'(x)+f_2'(x).$$

这样，法则(15)被证明．类似地证明法则(16)，我们有

$$(Cf(x))'=\lim_{\xi\to x}\frac{Cf(\xi)-Cf(x)}{\xi-x}$$

$$=\lim_{\xi\to x}C\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}$$

$$=C\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=Cf'(x).$$

这样，法则(16)也被证明．

由法则(15)和(16)可以推出一个总的法则．假设我们给出函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 和常数 $C_1, C_2, \cdots, C_m$，那么有下列法则：

$$(C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\cdots+C_mf_m(x))'$$
$$=C_1f_1'(x)+C_2f_2'(x)+\cdots+C_mf_m'(x). \tag{17}$$

归纳地进行这个法则的证明．当 $m=1$ 时，它与法则(16)相一致．其次，由法则(15)得

$$(C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\cdots+C_mf_m(x))'$$

$$=(C_1f_1(x)+\cdots+C_{m-1}f_{m-1}(x))'+(C_mf_m(x))'$$

$$=C_1f_1'(x)+\cdots+C_{m-1}f_{m-1}'(x)+C_mf_m'(x).$$

这里我们利用了归纳法，即假设数为 $m-1$ 时对于函数法则是正确的．因此，法则(17)得证．

利用法则(17)、(13)和(14)，我们能够求出多项式(1)的导数．我们有