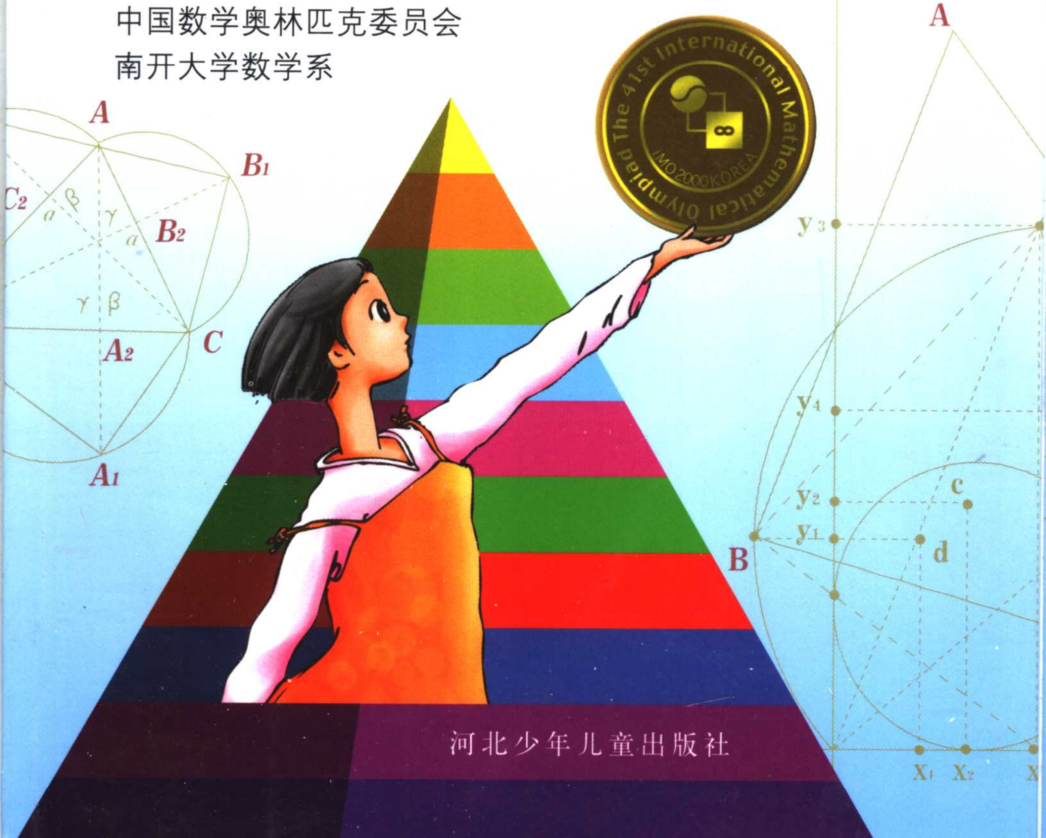
世界数学

奥林匹克解题大辞典

代数卷

中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系



河北少年儿童出版社

世界数学

奥林匹克

解题大辞典 代数卷

本卷主编　黄玉民
夏兴国

河北少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

世界数学奥林匹克解题大辞典．代数卷/黄玉民等编．石家庄：河北少年儿童出版社，2003

ISBN 7－5376－2537－9

Ⅰ．世… Ⅱ．黄… Ⅲ．数学课-中学-竞赛题-解题 Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第058346号

世界数学奥林匹克解题大辞典

代数卷

中国数学奥林匹克委员会　南开大学数学系

河北少年儿童出版社出版

河北新华印刷一厂印刷

新华书店经销

开本850×1168毫米 1/32　印张40.625

2003年1月第1版　2005年8月第2次印刷

印数:1—3000

ISBN 7－5376－2537－9

G·1707　定价:59.80元

世界数学奥林匹克解题大辞典

中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系

序 言

王 元

数学奥林匹克是对青少年极其有益的一项活动.它通过科学与趣味相统一的丰富多彩的题目,使许许多多的优秀学生在中学时期就经受了考验,接受了各种现代数学思想的熏陶,使他们提高了能力,增长了知识,开阔了眼界.数学奥林匹克活动的广泛开展,不仅丰富了中学生的课外活动,促进了中学数学教学的改革,而且发现和培养了一大批有才能的青年,这些青年将成为我国科学界在新世纪赶超世界先进水平的中坚力量.

数学竞赛中没有失败者.虽然每年参加中国数学奥林匹克的选手百余人,作为国家队出国参加国际数学奥林匹克的选手也只有六人,但是,那些因为运气不佳,培训不足,见识不广或临场发挥不理想等因素而没有获胜的学生也不是失败者.他们在参加竞赛及培训中所培养起来的求解难题的兴趣和欲望,那种永不满足,勇攀高峰的精神,分析问题的严密的逻辑思维,解决问题的灵活多样的应变能力以及对现代数学思想的理解和积累,正是进行成功的科学研究并在将来成为科学家的必要条件.因此说,这远比在一次竞赛中获胜更为宝贵.他们中的许多人进入大学后成为学习尖子,有些人正在攻读硕士和博士学位并成为数学研究队伍中的后起之秀,就是最有力的证明.即使对于那些进入大学后改学其他

专业的学生,他们也将因思维敏捷,头脑灵活,勇于创新和具有较强的数学能力而使自己终身受益.因此,数学奥林匹克必将继续下去.

数学奥林匹克已有一百多年的历史,且越来越受到重视.现在,每年举办数学奥林匹克的国家和地区已超过70个.已有的竞赛题目成千上万,其中构思独特,新颖别致,灵活深邃的题目有几千道之多,而且还在以每年几百道的速度继续增长.这些题目散载于国内外的各种书籍与杂志之中,任何个人手中的资料都很不完整,使用起来极不方便.这次河北少年儿童出版社邀请国内数学奥林匹克界的专家、教授和高级教练员共同精选了国内外数学奥林匹克的试题,并给出精辟、准确的解答,编写了这套《世界数学奥林匹克解题大辞典》.这是一次很有意义的壮举,是一项艰苦而又巨大的工程,是我国数学奥林匹克事业的一项基本建设.本书的出版,必将推动我国的数学奥林匹克事业稳步地向前发展,有助于我国在国际数学奥林匹克中保持优势,立于世界数学强国之林.就此我以兴奋的心情对这套解题大辞典的出版表示热烈的祝贺,并对在此书编写过程中付出辛勤劳动的各位作者和出版过程中做出多方面努力的编辑人员及支持本书出版的各位领导表示衷心的感谢.

近十年来,我国学生在国际数学奥林匹克中不断取得好成绩,我国所提供的候选题也接连被选为试题,这是值得高兴的事情.但是,我们也应清醒地看到,与一些先进国家相比,我国开展数学奥林匹克和参加国际数学奥林匹克的时间毕竟不长,这方面的资料也不很完全.因此,这套辞典的内容也是不很完全的.此外,以后每年新出现的竞赛题目也要补充进来.希望大家继续努力,不断完善这套大辞典的内容,为数学奥林匹克事业做出新贡献.

目 录

第一章　数

第 1 节　数字

1・1　用 $S(n)$ 表示自然数 n 的所有数字之和.

(1) 是否存在自然数 n，使 $n + S(n) = 1980$?

(2) 证明：任何两个连续自然数中能有一个表示成 $n + S(n)$ 的形式，其中 n 是某一个自然数.

(第 14 届全苏数学奥林匹克，1980 年)

[解]　(1) $1962 + S(1962) = 1980$.

(2) 我们将 $S(n) + n$ 记作 S_n，如果数 n 的末位数字为 9，那么 $S_{n+1} < S_n$；如果末位数字不是 9，那么 $S_{n+1} = S_n + 2$. 对于任意自然数 $m > 2$，选取最大的 N，使 $S_N < m$，那么 $S_{N+1} \geqslant m$. 显然，N 的末位数字不是 9. 因此 $S_{N+1} = m$ 或者 $S_{N+1} = m + 1$. 又显然 $S_1 = 2$，于是命题得证.

1・2　证明：对于任意自然数 k，存在无穷多个不含数字 0 的自然数 t(十进制记数法)，使得 t 与 kt 的数字和相同.

(第 4 届全苏数学奥林匹克，1970 年)

[证]　如果把数 k 记为

$$k = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0},$$

不妨设 $a_0 \geqslant 1$，t 表示由 m 个 9 组成的数，

$$t = \underbrace{99\cdots9}_{m个} = 10^m - 1,$$

其中 $m>n$.那么

$kt=a_na_{n-1}\cdots(a_0-1)99\cdots9(9-a_n)(9-a_{n-1})\cdots(9-a_1)(10-a_0)kt$ 的数字之和就是 t 的数字之和,它等于 $9m$.

1·3 给定一正45边形,问能否把0、1、…、9这10个数字放到它的顶点上,使得对于任何两个不同的数字都存在一条边,这条边的两端点用这两个数字标号.

(第3届全俄数学奥林匹克,1963年)

[解] 不能.事实上,任一数字 a 与其他9个数字中的每一个能构成9对数字,如果这些"数字对"都找到用相应数字标号的45边形的边,那么,至少要把 a 放在它的5个顶点上.由于总共10个数字,因此为了摆好它们必须要50个顶点.此与题设矛盾.

所以题目条件中所要求数字的摆法不可能实现.

1·4 证明:存在能被 5^{1000} 整除且在其十进制表示中不包含数字0的数.

(第1届全苏数学奥林匹克,1967年)

[证] 数 5^{1000} 的末位数字是5,如果 5^{1000} 的表示中不包含0,命题得证,否则存在整数 $k>1$,使得在 5^{1000} 的十进制记数法中,从末位数起第 k 位上是0,而其后第1位至第 $k-1$ 位的所有数字都异于0.

把 $5^{1000}\cdot10^{k-1}$ 与 5^{1000} 相加后得到能被 5^{1000} 整除的数,并且这个数的原 k 个数字都不等于0.如果 $5^{1000}\cdot10^{k-1}+5^{1000}$ 的表示中不包含0,命题也得证,否则我们重复上述过程,可以得到后1000位数字都不等于0且能被 5^{1000} 整除的数.现在除后1000个数字,去掉这个数中其余所有的数字,这样所得到的数显然也能被 5^{1000} 整除.于是命题得证.

1·5 n 为固定正整数,求出所有具有以下性质的正整数的和:在二进制中,这个数恰有 $2n$ 个数字,其中 n 个1,n 个0(首位数字不能为0).

(第23届加拿大数学奥林匹克,1991年)

[解] 这种正整数首位数字必须为1,而在其他 $2n-1$ 位中恰有 n 位上是0,因此共有 C_{2n-1}^n 个.自右数起第 k 位($1\leqslant k\leqslant 2n-1$)上的1表示 2^{k-1},出现 C_{2n-2}^n 次(除了从右数起的第 k 位及第 $2n$ 位外,其余的 $2n-2$ 位中恰有 n 个数字为0),所以这种正整数的总和为

$$2^{2n-1}\times C_{2n-1}^n+(2^{2n-2}+\cdots+2+1)\times C_{2n-2}^n$$

$= 2^{2n-1} \times C_{2n-1}^{n} + (2^{2n-1} - 1) \times C_{2n-2}^{n}.$

1·6　设 n 是整数,如果 n^2 的十位数字是 7,那么 n^2 的个位数字是什么?

(第 10 届加拿大数学奥林匹克,1978 年)

[解]　设 $n = 10x + y$,其中 x 和 y 是整数,且 $0 \leqslant y \leqslant 9$,于是,我们有

$$n^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$$
$$= 20(5x^2 + xy) + y^2$$

如果 n^2 的十位数字是奇数 7,那么 y^2 的十位数字是奇数,由此推得

$$y^2 = 16 \text{ 或 } 36.$$

所以,n^2 的个位数字必须是 6.

1·7　设 a_n 是 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的个位数字,$n = 1,2,3,\cdots$ 试证:$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是有理数.

(中国高中数学联赛,1984 年)

[证]　由于 $k^2,(k+10)^2,(k+20)^2,\cdots,(k+90)^2$ 具有相同的个位数字,所以这 10 个数字的和

$$k^2 + (k+10)^2 + (k+20)^2 + \cdots + (k+90)^2$$

的个位数字为 0.

从而

$$\begin{aligned} a_{n+100} &= 1^2 + 2^2 + \cdots + (n+100)^2 \text{ 的个位数字} \\ &= [a_n + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (n+100)^2] \text{ 的个位数字} \\ &= \{a_n + [(n+1)^2 + (n+11)^2 + (n+21)^2 + \cdots + (n+91)^2] + [(n+2)^2 + (n+12)^2 + (n+22)^2 + \cdots + (n+92)^2] + \cdots + [(n+10)^2 + (n+20)^2 + \cdots + (n+100)^2]\} \text{ 的个位数字} \\ &= a_n. \end{aligned}$$

因此 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是循环小数,即为有理数.

1·8　某个数的偶次方是一个四位数,首位数字是3,末位是5,求此数.

(基辅数学奥林匹克,1946 年)

[解] 所求的数的末位数字应为 5. 它不可能是一位数字也不可能是三位数字. 适合条件的惟一数字为 55.

1·9 在等式 $\overline{x5}\cdot\overline{3yz}=7850$ 中还原数字 x,y,z.

(第 13 届全俄数学奥林匹克,1987 年)

[解] 因为 $300\leqslant\overline{3yz}<400$,由原等式得

$$19<7850\div 400<\overline{x5}\leqslant 7850\div 300<27,$$

所以 $x=2$.

又 $\overline{3yz}=7850\div 25=314$,

所以 $y=1,z=4$.

故 $x=2,y=1,z=4$.

1·10 从1 开 始,依次写自然数,问在第一百万个位置上的数字是几?

(第 2 届友谊杯国际数学竞赛,1988 年)

[解] 因为 1 位数有 9 个,2 位数有 90 个,3 位数有 900 个,…,而 $900000\times 6>1000000$. 所以所求的数字不在某一个七位数上. 又因为 $9+90\times 2+900\times 3+9000\times 4+90000\times 5=488889$,所以所求的数字一定在某一个六位数上.

因为
$$1000000-488889=511111,$$
$$511111=6\times 85185+1,$$

故所求的数字是第 85186 个六位数(即 185185) 的第一个数字,也就是 1.

1·11 整数 a、b、c 成等比数列,在十进制数 $N=a^3+b^3+c^3-3abc$ 中,末位数字为 0,倒数第二位数字为 2,这可能吗?

(第 12 届全俄数学奥林匹克,1986 年)

[解] 若十进数 N 的末两位为 20,则

$$N=100M+20(M\text{ 为整数})$$

它能被 5 整除而不能被 25 整除.

另一方面,我们可以证明,若 N 被素数 p 整除,则它被 p^2 整除.

事实上,因为数列的公比 q 为有理数. 设 $q=\dfrac{m}{n}$(m、n 互素),则 $c=\dfrac{am^2}{n^2}$, 因此 a 被 n^2 整除.

设 $a = kn^2$,则 $b = kmn, c = km^2$,其中 k 为整数.

于是 $N = k^3(n^3 - m^3)^2$.如果 N 被素数 p 整除,那么 k 或者 $n^3 - m^3$ 被 p 整除,从而 N 被 p^2 整除.

所以 N 的末两位数为 20 是不可能的.

1·12　公共汽车票的号码是六位数,如果号码的前三位数字之和等于后三位数字之和,则称有这个号码的票是“幸运”的.证明所有幸运票的号码之和能被 13 整除.

(第 5 届全俄数学奥林匹克,1965 年)

[证]　如果幸运票的号码是 A,那么号码为 $A' = 999999 - A$ 的票也是幸运的.而且 $A' \neq A$.因为

$$A + A' = 1001 \times 999 = 13 \times 77 \times 999$$

能被 13 整除,所以所有幸运票号码的和能被 13 整除.

1·13　给定0 和 1 的有限数列,它具有性质:

(1) 如果在数列的某一处连续抽出 5 个数字并且在另外任何一处同样也连续抽出 5 个数字,那么这些 5 个数字将不相同(它们可以重叠地连接在一起,例如 0110101).

(2) 如果把数字 0 或者 1 添加到数列的右边,那么性质(1) 不再成立.

证明这个数列的前 4 个数字与后 4 个数字相同.

(第 3 届全苏数学奥林匹克,1969 年)

[证]　设 $abcd$ 为最后的四个数字,在数列中一定有连续的 5 个数字 $abcd0$(否则可以添加 0 并保持性质(1),但这又与性质(2) 矛盾) 以及 $abcd1$.所以四数组 $abcd$ 在数列中出现三次.

因为 0 或 1 都在 $abcd$ 之前至多出现 1 次,所以这三个 $abcd$ 中有一个在它之前没有任何数字.这就是说,这个数列的前四个数字与后四个数字相同.

1·14　证明:在任何39 个 连续自然数中存在一个自然数,它的各位数字之和能被 11 整除.

(第 1 届全俄数学奥林匹克,1961 年)

[证]　在已知数的前 20 个数中存在两个数,它们在十进制记数法中末位数等于零.

在这两个数中必有一个数，它的末位数0之前是不等于9的数字，设这个数为N，S为N的数字之和，那么

$$N,N+1,\cdots,N+9,N+19$$

含于已知的39个数之中，且对应的数字和分别为

$$S,S+1,\cdots,S+10.$$

然而在11个相邻数中必有一个能被11整除.故命题得证.

1·15　任取一个能被9整除的1962位的数，它的各位数字之和记为a，a的各位数字之和记为b，b的各位数字之和记为c.问c等于多少？

（第2届全俄数学奥林匹克，1962年）

[解]　因为任何一个数本身以及它的数字和在除以9时有相同的余数，

所以$c \geqslant 9$，且$9 \mid c$.

另一方面，$a \leqslant 1962 \times 9 < 19999$，

因此$b < 1 + 4 \times 9 = 37$，

所以$c \leqslant 11$.故得$c = 9$.

1·16　N是1990位数，并且是9的倍数.N的各位数字之和为N_1，N_1的各位数字之和为N_2，N_2的各位数字之和为N_3.求N_3.

（日本数学奥林匹克代表队选拔试题，1990年）

[解]　若一个数是9的倍数，那么它的各位数字之和也是9的倍数，因为N是9的倍数，所以N_1是不大于9×1990的9的倍数；又因为9×1990是5位数，所以N_2是不大于$9 \times 5 = 45$的9的倍数，于是，我们就得到$N_3 = 9$.

1·17　设A是十进制数4444^{4444}的各位数字之和，而B是A的各位数字之和，求B的各位数字之和（这里所有的数都是十进制数）.

（第17届国际数学奥林匹克，1975年）

[解]　首先进行估位，数10000^{4444}有$4 \times 4444 + 1 = 17777$位数字，而每位数字最大只能是9，并且$4444^{4444} < 10000^{4444}$，所以有

$$A < 17777 \times 9 = 159993.$$

现在把A记为

$$A = a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 10^0,$$

这里$0 \leqslant a_i \leqslant 9 \quad (i = 0,1,2,3,4)$，并且$a_5 \leqslant 1$.因此，有

$B \leqslant 1 + 5 \times 9 = 46.$

又记 $B = b_1 \times 10 + b_0$,这里 $0 \leqslant b_0 \leqslant 9, 0 \leqslant b_1 \leqslant 4$,类似可知,对于 B 的数字和 C,有

$c < 4 + 9 = 13.$

另一方面,有

$$4444^{4444} \equiv 7^{4444} \pmod 9,$$

$$7^{4444} \equiv 7^{4443} \times 7$$

$$\equiv (7^3)^{1481} \times 7$$

$$\equiv (342 + 1)^{1481} \times 7 \pmod 9.$$

$$7^{4444} \equiv 1^{1481} \times 7 \equiv 7 \pmod 9$$

因此 $4444^{4444} \equiv 7 \pmod 9$ ①

由于一个整数与它的数字之和在除以 9 时,总有相同的余数,因此

$4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C \pmod 9$ ②

由 ①、② 得 $C \equiv 7 \pmod 9$

又由于 $c < 13$,故 B 的数字和等于 7.

1·18 求出所有的自然数 n:在十进制中,一切由 $n-1$ 个 1 及 1 个 7 构成的 n 位数都是质数.

(第 31 届国际数学奥林匹克预选题,1990 年)

[解] 设 m 是一个由 $n-1$ 个 1 和 1 个 7 构成的 n 位数,则它可写为如下形式:

$m = A_n + 6 \times 10^k.$

这里 A_n 是一个由 n 个 1 构成的 n 位数,且 $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

若 n 被 3 整除,则 m 的数字和能被 3 整除,从而 m 不是质数.

若 n 不能被 3 整除,设

$A_n \equiv r \pmod 7,$

因为

$10^0 \equiv 1,\ 10^1 \equiv 3,\ 10^2 \equiv 2,\ 10^3 \equiv 6,\ 10^4 \equiv 4,\ 10^5 \equiv 5 \pmod 7.$

及 $A_1 \equiv 1,\ A_2 \equiv 4,\ A_3 \equiv 6,\ A_4 \equiv 5,\ A_5 \equiv 2,\ A_6 \equiv 0 \pmod 7,$
因此,仅当 $6 \mid n$ 时,有

$A_n \equiv 0 \pmod 7.$

现在 $3 \nmid n$,所以 $r \neq 0$.

第一章 数