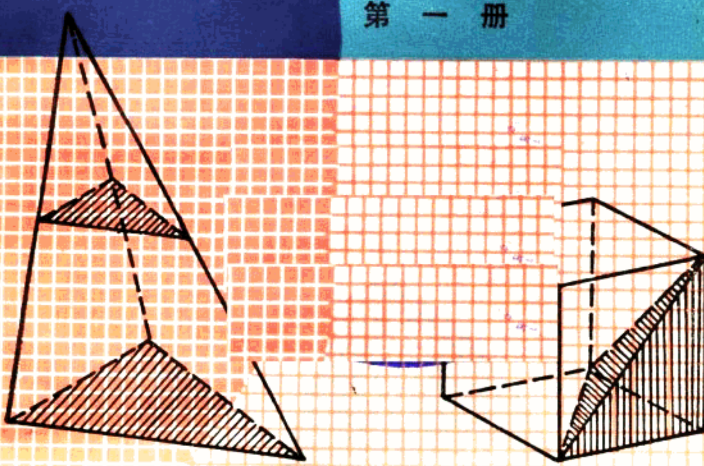
中等师范学校数学课本

几何

第一册



人民教育出版社

封面设计：胡茂林

中等师范学校课本
（试用本）
几　何
第一册
汪述云　曹幼文　方铨　编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
西安新华印刷厂印装
*
开本 787×1092　1/32　印张5.25　字数100,000
1982年1月第1版　　1982年5月第1次印刷
印数 1—212,000
书号 K7012·0286　　定价 0.40 元

引　言

在初中的平面几何里，我们研究了平面图形的一些基本性质和这些性质的应用。本书的一至三章是立体几何部分，它将在平面几何的基础上进一步研究空间图形的一些基本性质和这些性质的应用。第四章是几何中的逻辑知识初步，介绍有关几何中的逻辑知识的一些基本问题。

目　录

第一章　直线和平面

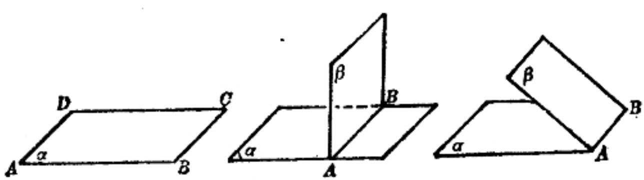
一　平　　面

1.1　平面

桌面、黑板面以及平静的水面等，都给我们以平面的形象，但几何中所说的平面，是在空间无限延展着的。

当我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时，感觉它们象平行四边形。因此，我们通常都画平行四边形来表示平面（图1—1甲）。在用平行四边形表示水平平面时，通常把它的锐角画成 45°，横边画成等于邻边的两倍。如果一个平面的一部分被另一个平面遮住时，把被遮住的线条画成虚线或不画，这样看起来立体感就强些（图1—1乙丙）。

平面可用希腊字母α、β、γ等来表示，写作平面α、β、γ等，也可以用平行四边形两个相对顶点的字母来表示，如平面AC（图1—1甲）。



甲　　　　乙　　　　丙

图　1—1

1.2 平面的基本性质

在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出平面有以下三个基本性质，我们把它当作几何公理，作为进一步推理的基础.

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内（图 1－2）.

这时我们说直线在平面内*，或者说平面过直线.

直线可用小写拉丁字母 a、b、c 等表示. 点用大写拉丁字母 A、B、C 等表示.

点 A 在直线 a 上，可记作 $A\in a$；点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；直线 a 在平面 α 内，记作 $a\subset\alpha$.

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这个点的一条直线（图 1－3）.

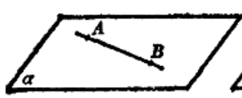


图　1－2

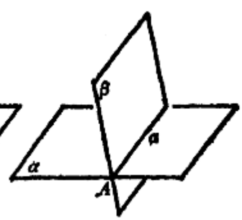


图　1－3

例如，教室内相邻两墙面，在墙角处交于一个点，它们就交于过这点的一条直线.

平面 α 与平面 β 相交于直线 a，可记作 $\alpha\cap\beta=a$.

---

* 也说直线在平面上.

公理 3　经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面（图 1—4）。

这时，我们也说"不在同一直线上的三点确定一个平面。"例如，一扇门用两个枢轴和一把锁就可以固定了。过 A、B、C 三点的平面可记作"平面 ABC"。

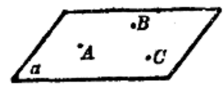


图　1—4

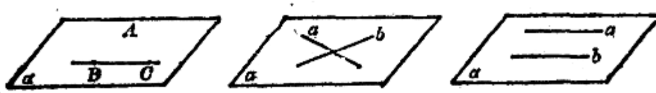
推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面。

如图 1—5 甲，A 是直线 a 外的一点，在 a 上取两点 B、C，经过这三点有且只有一个平面 α，又因 B、C 在 α 内，所以 a 在 α 内，因此，经过 a 和 A 有且只有一个平面。

同样，可以得出下面两个推论：

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面（图 1—5 乙）。

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面（图 1—5 丙）。



甲　　　　乙　　　　丙

图　1—5

注意：在立体几何中，对于同一平面内的图形，平面几何中的定义、公理、定理仍成立。

例　一条直线和两条平行直线相交，求证：这三条直线在同一平面内。

已知：直线 $a \parallel b$，直线 c 和 a 相交于 A，和 b 相交于 B（图 1－6）。

求证：a、b、c 在同一平面内。

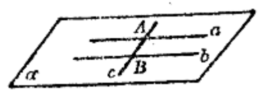


图 1－6

证明：∵ $a \parallel b$，

∴ a、b 确定一个平面 α（推论 3）。

∵ $A \in \alpha$，$B \in \alpha$，

∴ $C \subset \alpha$（公理 1）。

因此，三条直线 a、b、c 在同一平面 α 内。

练　习

1. 画两个水平平面 α 和 β，在平面 α 内画两条相交于点 A 的直线 c 和 d，在平面 β 内画两条平行直线 l 和 m。
2. 画两个相交的平面，并且在图中注上字母。
3. 任意三点能否确定一个平面？任意一点和一条直线呢？

1.3　水平放置的平面图形的直观图

空间图形是由空间的点、线、面所构成的图形。为了研究的需要，这种空间图形常按照某些规则，用画在一个平面内的图形来表示。由于规则的不同，画在平面内的图形也不一样。我们这里介绍一种直观图。如图 1－7，就是正方体的一种直观图，正方体的各个面本来都是正方形，但在直观图上却有一些面画成了平行四边形。

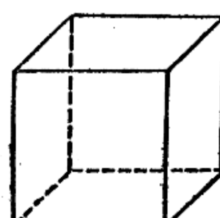


图 1－7

直观图虽然是平面内的图形，不是空间图形的真实形状，但给予我们空间图形的感觉。

要画空间图形的直观图，首先必须掌握水平放置的平面图形直观图的画法，下面学习两种常用的画法——斜二测画法和正等测画法。

一．斜二测画法的规则：

1. **在图形上取互相垂直的 x 轴、y 轴，把它画成对应的 x′ 轴、y′ 轴，使∠x′O′y′＝45°（或135°），两个轴确定的平面表示水平平面。**

2. **图形上平行于 x 轴或 y 轴的线段*，分别画成平行于x′轴或y′轴的线段。**

3. **平行于 x 轴的线段，长度不变；平行于 y 轴的线段，长度变为原来的一半。**

下面举例说明具体画法。

例 1　画正六边形的直观图。

画法： 1)　在正六边形$ABCDEF$上，取对角线 AD 为 x 轴，对称轴GH为 y 轴. 画对应的 x' 轴、y' 轴，使$\angle x'O'y'=45°$（或135°）。

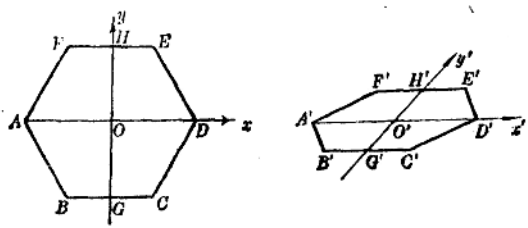


图　1—8

* 包括在轴上的线段。

2） 以O'为中点，取$A'D'=AD$和$G'H'=\frac{1}{2}GH$；以H'为中点画$F'E' \parallel x'$轴，并使$F'E'=FE$，再以G'为中点画$B'C' \parallel x'$轴，并使$B'C'=BC$。

3） 连结$A'B'$、$C'D'$、$A'F'$、$D'E'$，得正六边形$ABCDEF$的直观图$A'B'C'D'E'F'$。

注意：将图画好后，要擦去辅助线。

例 2 画正五边形的直观图。

画法： 1） 在正五边形$ABCDE$内，取对角线BE为x轴，对称轴FA为y轴。过C、D分别作$CG \parallel y$轴，$DH \parallel y$轴，分别交x轴于G和H。画对应的x'轴、y'轴，使$\angle x'O'y'=45°$（或135°）。

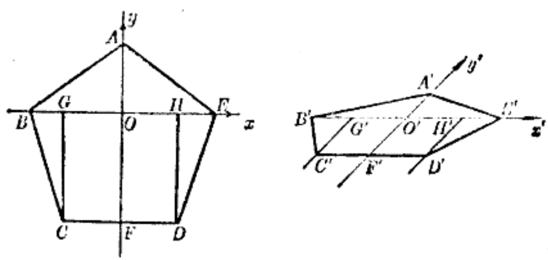


图 1—9

2） 在x'轴上以O'为中点截取$B'E'=BE$、$G'H'=GH$，在x'轴的同侧画线段$C'G' \parallel y'$轴，$D'H' \parallel y'$轴，并使$C'G'=\frac{1}{2}CG$，$D'H'=\frac{1}{2}DH$，在x'轴的另一侧，在y'轴上截取$O'A'=\frac{1}{2}OA$。

3） 连结$A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'E'$、$E'A'$。五边形$A'B'C'D'E'$就是正五边形$ABCDE$的直观图。

二。正等测画法的规则：

正等测画法的规则与前一种所不同的，只是$\angle x'O'y'=60°$（或$120°$）；并且平行于y轴的线段长度不变，其他完全相同。画含有圆的图形的直观图时，常用这种画法。

例3 画圆的直观图。

画法： 1）在圆O上取一对互相垂直的直径AB、CD分别为x轴、y轴，画对应的x'轴、y'轴，使$\angle x'O'y'=60°$（或$120°$）。

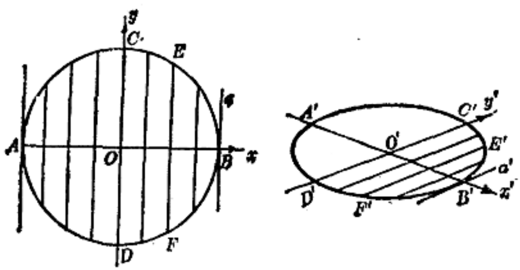


图 1—10

2）将圆O的直径AB分成n等分，过分点画平行于y轴的弦CD、EF、…。在x'轴上以O'为中点画线段$A'B'$，使$A'B'=AB$，将$A'B'$分成n等分，以分点为中点画y'轴的平行线段$C'D'$、$E'F'$、…，使$C'D'=CD$，$E'F'=EF$，…。

3）用平滑曲线连接$A'D'F'B'E'C'$…，就得到圆的直观图，它是一个椭圆。

可以看出，在这种画法中，圆的中心O，变为椭圆的中心O'，圆的一对互相垂直的直径（如AB、CD）变为椭圆的一对直径（如$A'B'$、$C'D'$）。它们叫做**椭圆的共轭直径**。圆的切线（如a）变为椭圆的切线（如a'）。

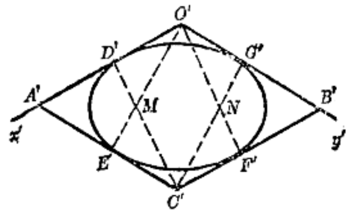


图 1—11

上面圆的直观图画法较繁，在实际画圆的直观图椭圆时，常采用椭圆的近似画法。它的步骤是：

1） 作 $\angle x'O'y'=120°$，分别在$O'x'$ 和$O'y'$ 上取$O'A'$、$O'B'$ 等于圆O的直径。以$O'A'$、$O'B'$为两邻边作菱形$O'A'C'B'$。

2） 取菱形各边中点D'、E'、F'、G'。连结$O'E'$和$C'D'$交于M，$O'F'$和$C'G'$交于N。

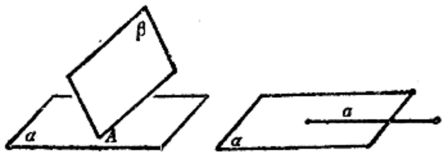
3） 分别以O'、C'为圆心，$O'E'$为半径画弧，再分别以M、N为圆心，MD'为半径画弧，就连接成近似椭圆。

练 习

1. 按什二测画法分别画水平放置的正三角形、正方形的直观图。
2. 用椭圆的近似画法，画半径为2厘米的圆的直观图。

习 题 一

1. 如图所示，说平面α与平面β只有一个公共点A（图甲）；直线a不全在平面α内（图乙）。这样说法对吗？为什么？



甲　　　　　　乙

(第1题)

2. 三角形、梯形是否一定是平面图形？为什么？再举几个平面图形的例子。

3. 1) 不在同一平面内的四个点，并且其中任何三点不在一条直线上，它们可确定几个平面？

2) 三条直线两两平行，但不在同一平面内，可确定几个平面？

3) 过一点的三条直线，不在同一平面内，可确定几个平面？

4. 过已知直线外一点与直线上三个点分别连结三条线段，证明：这三条线段在同一平面内。

5. 四条线段顺次首尾连接，所得封闭图形一定是平面图形吗？为什么？

6. 怎样用两根细绳来检查一张桌子的四条腿的下端是否在同一平面内？

7. 用斜二测画法分别画一个等腰梯形和一个任意四边形的直观图。

二　空间两条直线

1.4　两条直线的位置关系

在平面几何里我们学过，在同一平面内的两条不重合的直线，它们的位置关系只有两种：平行或相交。对于空间的两条直线，它们的位置关系还有另外一种情况。例如图1—12，六角螺母的棱AB与CD所在直线，机械部件蜗轮和蜗杆的轴线，它们都不在同一平面内。

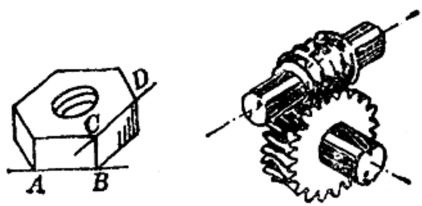


图　1—12

不在同一平面内的两条直线叫做**异面直线**。

因此，空间的两条不重合直线的位置关系有以下三种：

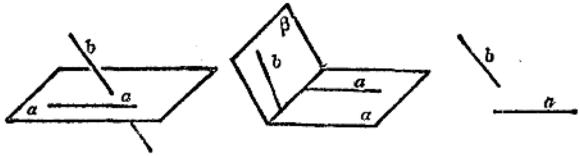
1.　相交直线——在同一平面内，只有一个公共点；

2.　平行直线——在同一平面内，没有公共点；

3.　异面直线——不在同一平面内，没有公共点。

两条异面直线不在同一平面内，没有公共点，因而，不相交也不平行。在画异面直线时，为了显示它们这种特点，常把两条直线画在不同的平面内，如图1—13甲、乙，而不

画成丙图那样。



甲　　　　乙　　　　丙

图　1—13

直线 a、b 相交于点 A，可记作 $a \cap b = A$。

例　平面内一点与平面外一点的连线，和平面内不过该点的直线成异面直线。

已知：平面 α，点 A、B 和直线 a，且 $A \notin \alpha$，$B \in \alpha$，$B \notin a$，$a \subset \alpha$。

求证：直线 AB 和 a 是异面直线。

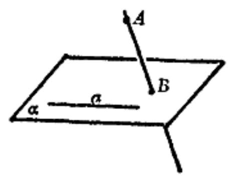


图　1—14

证明：假设直线 AB 与 a 在同一平面内。

$\because$　$B \in AB$，

$\therefore$　这个平面经过点 B 和直线 a。

根据公理 3 的推论 1，这个平面就是平面 α。

$\therefore$　$A \in \alpha$。

这与已知 $A \notin \alpha$ 矛盾，所以直线 AB 与 a 异面。

练　习

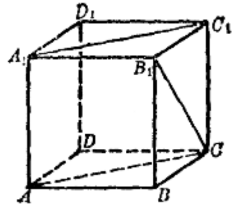
1. 举出几个异面直线的例子。
2. 分别在两个平面内的两条直线，一定是异面直线吗？为什么？

3. 如图所示的正方体里，指出下列各对直线的位置关系。

1) AB和CC_1；

2) A_1A和B_1C；

3) A_1C_1和CB_1。



（第3题）

1.5 平行直线

在平面几何里，我们已经知道，在同一平面内，平行于同一直线的两条直线互相平行。对于空间的三条直线，也有这个性质，我们把它当作公理。

公理 4 平行于同一直线的两条直线互相平行。

例如三棱镜的三条棱或长方体的三条棱 $AA' \parallel BB'$，$CC' \parallel BB'$，这时$AA' \parallel CC'$（图 1—15）。

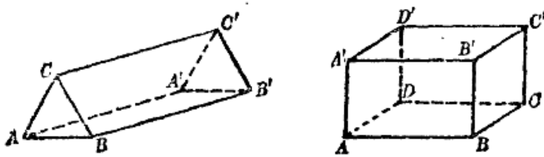


图 1—15

例 已知：四边形 $ABCD$ 是空间四边形（四个顶点不在同一平面内的四边形），E、H分别是边 AB、AD 的中点，F、G分别是边BC、CD上的点，且 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$。

求证：四边形$EFGH$是梯形。

证明： 如图 1—16，连结 BD，EH是$\triangle ABD$的中位线，

$\therefore \quad EH \parallel BD,$

$$EH=\frac{1}{2}BD.$$

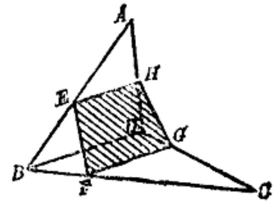


图 1—16

又在$\triangle BCD$中，

$$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}.$$

$\therefore \quad FG \parallel BD，FG=\frac{2}{3}BD.$

根据公理 4，$EH \parallel FG$.

又$\because \quad FG \neq EH$,

$\therefore$ 四边形$EFGH$是梯形.

下面我们研究一个与平面几何相同的定理：

定理　如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

已知：如图1—17，$\angle BAC$和$\angle B'A'C'$的边$AB \parallel A'B'$，$AC \parallel A'C'$，并且方向相同.

求证：$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

证明：在AB、$A'B'$、AC、$A'C'$上分别取$AD=A'D'$，$AE=A'E'$，连结AA'、DD'、EE'.

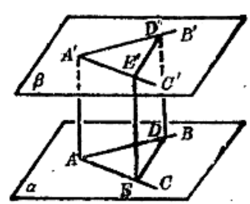


图 1—17

$\because \quad AB \parallel A'B', AD=A'D'$,

$\therefore \quad AA'D'D$是平行四边形,

$\therefore \quad AA' \mathrel{\underline{\parallel}} DD'$.

同理$AA' \mathrel{\underline{\parallel}} EE'$,

$\therefore \quad DD' \mathrel{\underline{\parallel}} EE'$.

$EE'D'D$是平行四边形,