Equations of Mathematical Physics

# 数学物理方程

■ 白艳萍 陆 平 薛亚奎 编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 数学物理方程

白艳萍　陆平　薛亚奎　编著



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

**图书在版编目(CIP)数据**

数学物理方程/白艳萍等编著 .—北京:北京理工大学出版社,2006.1

ISBN 7-5640-0650-1

Ⅰ.数…　Ⅱ.白…　Ⅲ.数学物理方程　Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 153720 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)
　　　　　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱 / chiefeditor@bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京地质印刷厂
开　　本 / 880 毫米×1230 毫米　1/32
印　　张 / 8.125
字　　数 / 210 千字
版　　次 / 2006 年 1 月第 1 版　2006 年 1 月第 1 次印刷
印　　数 / 1~5000 册　　责任校对 / 郑兴玉
定　　价 / 13.00 元　　责任印制 / 刘京凤

# 前　言

随着科学技术的发展,数学的应用更为广泛。在许多科技领域中微积分学及常微分方程已经不够用,数学物理方程理论已成为必须掌握的数学工具。按国家教委关于高等院校本科必修课现行教学计划的规定,数学、物理类各专业均开设这门课程,各工科专业也已开或即将开设这门课程。这门课程是理工科类专业学生学习一些后继专业课程以及未来从事科技工作所必需的数学工具。

数学物理方程是理工科类专业一门应用性较强的基础课程,它对于训练数学思维、应用意识和分析实际问题、解决实际问题的能力有着极为重要的作用。偏微分方程是一门公认的难度较大的课程,内容深、理解难、课时紧、任务重。国内这方面的教材几十年来在体系和内容上几乎没有变化,使得学生学习和掌握数学物理方程非常吃力。为使学生在短时间内掌握数学物理方程的基本理论和方法,提高学习效率,增强学生的独立思考能力,有必要编写一本具有学术性、知识性、实用性和启发性的教学用书。本书从活跃学生思路,启迪学生思维、掌握理论、学会分析和解决问题的方式方法的角度出发,在多年教学丰富素材的基础上,针对现在的教学方式及教材的优缺点,收集了大量的优秀教材,在对学生特点深入了解后编写出本教材。本教材将偏微分方程理论方法与应用有机结合,既保持了现行教材理论性强的特点,又进一步强调了应用的广泛性及对于典型方程各类问题解法的灵活多样和内在关系。本教材适用于高校理工科类教学之需,编排以方法为主线,由浅入深,循序渐进,突出重点,分散难点;力求详细和层次分明,理论体系完整,基本理论和推理脉络清晰。

本教材主要特点:(1)加强教学基础理论训练,突出典型方程理论和各种问题的典型处理方法。(2)广泛介绍求解各种问题的方法、

技巧和思想，如：行波法、分离变量法、微分算子法（第一次引入教材）、试探函数法等。(3)将偏微分方程的理论方法和它们在解决实际问题中的应用紧密结合，根据目前教学改革的特点，加强数学应用意识的培训和数学建模过程的训练。

本书力图反映数学理论的严密性，方法的多样性，应用的广泛性。但由于水平有限，不妥之处恳请批评指正。

作者

2005.8

# 目　　录

# 第一章　典型方程与定解条件

## §1.1　引　言

偏微分方程的出现已有很长的历史了，大约在微积分出现后不久，就开始了有关偏微分方程的研究。与常微分方程情况一样，数学家们并不是自觉地创立偏微分方程这门学科的，当人们更好地掌握了构成某些现象基础的物理原理时，人们就确切阐明了现在包含在偏微分方程中的这些物理现象的数学表达，或者说是物理的、力学的、工程技术中的基本规律的数学模型都是偏微分方程，尤其是流体动力学、弹性力学、热力学(包括粒子扩散)、电磁学、量子力学等的基本定律都是可以用偏微分方程来描述的。这些来自物理的偏微分方程，我们常把它们叫做**数学物理方程**。

本章将从几个物理模型出发，建立数学物理方程中的三个典型方程——弦振动方程、热传导方程和拉普拉斯方程。这不仅仅是因为它们是简单的偏微分方程，更是因为它们代表了三类不同的方程，理解了它们的性质，在研究一般偏微分方程时，所遵循的推导方法大体上也是相同的，而且适用于其他的经典方程。当我们在后面几章中学习和掌握了它们的一些相关问题的解法后，对进一步学习和掌握后继偏微分方程，具有普遍意义和指导意义。

## §1.2　典型方程的导出

### 1. 弦的微小横振动方程

推导弦振动方程，即为弦振动现象建立数学模型，首先需要了解

它所服从的基本物理规律,同时应该作一些简化假设。弦是一个力学系统,是一个质点组(是连续的而非离散的质点组,进一步说它是一个一维的连续系统),所以它的运动应符合牛顿运动定律,对它的简化假设如下:

设弦在未受扰动时平衡位置是 $x$ 轴而其上各点均以该点之横坐标表示。弦上各点的位移均假设发生在某个平面内垂直于 $x$ 轴的方向上,因此在时刻 $t$,弦的形状是曲线 $u=u(x,t)$。现在设:①弦的扰动是小扰动。这并不是说 $u=u(x,t)$的数值很小,而是设 $u_x$ 很小,$u_x \ll 1$,从而 $u_x^2$ 可以略去不计。② 弦是“柔软”的,弦是一个连续体,之所以能维持其形状是由于其各个部分互相之间有力的作用,这种力称为内力。如果要使弦的形状改变就必须抵抗其内力而做功。所谓“柔软”,是对其内力的性质作的一种规定,即规定内力必须为切线方向的张力,所以如果想把它扭弯即在法向发生形变时,并无内力抵抗,这样就称它是柔软的。为了导出弦的横振动方程,选择如图 1.1 所示的坐标系,弦的平衡位置为 $x$ 轴,两端分别固定在 $x=0$ 及 $x=l$ 处。所谓横振动是指运动发生在同一平面内,且弦上各点沿着垂直于 $x$ 轴的方向移动,所谓微小指的是弦振动的幅变及弦上任意点切线的倾角都很小,$u(x,t)$是弦上横坐标为 $x$ 的点在时刻 $t$ 的位移。

首先证明张力为常数。为此在弦上任取 $M_1M_2$ 为一小段弧,它的长度假定为 $\Delta s$,并且 $\Delta s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+u_x^2}\mathrm{d}x$,其中 $u_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$,由于假定弦只做微小振动,$u_x^2$ 与 1 相比可以忽略不计,从而 $\Delta s \approx x_2-x_1$。这样可以认为这段弦在振动过程中并未伸长,因此由胡克(Hooke)定律知道,弦上每一点所受张力在运动过程中保持不变,即张力与时间 $t$ 无关。我们分别把在点 $M_1$ 和 $M_2$ 的张力记作 $T_1$ 和 $T_2$,由前所述可知它们的方向分别

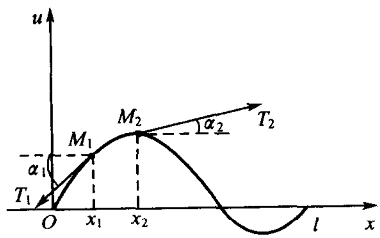


图 1.1　弦振动曲线

是沿着弦在点 $M_1$ 和 $M_2$ 处的切线方向。由于假定弦只做横向振动,因此张力在 $x$ 轴方向分量的代数和为零,即有

$$T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0$$

这里的 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 是曲线 $u(x,t)$的切线与 $x$ 轴所成之角。对于微小振动 $\alpha_1=0$ 和 $\alpha_2=0$,所以,$\cos\alpha_1\approx1$ 和 $\cos\alpha_2\approx1$,于是有 $T_1=T_2$,这就是说,张力也不随地点而异。综上所述可知张力是常数,以 $T_0$(即 $T_1=T_2=T_0$)记之。

现在我们来导出弦的横振动方程,张力在 $u$ 轴方向分量的代数和为

$$f_u = T_0\sin\alpha_2 - T_0\sin\alpha_1 = T_0(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

对于小振动,有 $\sin\alpha_2\approx\tan\alpha_2=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_2}$,$\sin\alpha_1\approx\tan\alpha_1=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1}$,应用微分中值定理上式可化为

$$T_0\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_2} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1}\right) = T_0\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\xi}(x_2 - x_1) \qquad (x_1 < \xi < x_2)$$

设弦的线性密度为 $\rho$,由于弦段$(x_1,x_2)$很小,其上每点的加速度相差也不会太大,因此可用其中任一点 $\eta$ 处的加速度$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\eta}$代替,于是该小弦的质量与加速度的乘积为

$$\rho\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\eta}(x_2 - x_1) \qquad (x_1 < \eta < x_2)$$

当弦不受外力作用时,应用牛顿(Newton)第二定律,得

$$\rho\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\eta}(x_2 - x_1) = T_0\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\xi}(x_2 - x_1) \qquad (1.2.1)$$

消去 $x_2-x_1$,并令 $x_2\to x_1$,上式化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1.2.2)$$

式中 $a^2=\frac{T_0}{\rho}$。这个方程称为弦的**自由横振动方程**。

若还有外力作用到弦上,其方向垂直于 $x$ 轴,设其力密度为 $F(x,t)$,由于弦段 $M_1M_2$ 很小,其上各点处的外力近似相等,因此

作用在该段上的外力近似地等于

$$F(\xi,t)(x_2-x_1) \qquad (x_1<\xi<x_2)$$

这样一来,方程(1.2.1)的右端还应添上这一项,于是得平衡方程

$$\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\bigg|_\eta(x_2-x_1)=T_0\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\bigg|_\xi(x_2-x_1)+F(\xi,t)(x_2-x_1)$$

消去 $x_2-x_1$,并令 $x_2\to x_1$,则得弦的**强迫横振动方程**

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{1.2.3}$$

式中 $f(x,t)=F(x,t)/\rho$。

弦振动方程中只含有两个自变量 $x$ 和 $t$,其中 $t$ 表示时间,$x$ 表示位置,由于它们描述的是弦的振动或波动现象,因而称它为**一维波动方程**,类似地可导出**二维波动方程**(例如膜的振动)和**三维波动方程**(例如电磁波、声波的传播)。它们的形式分别为

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \tag{1.2.4}$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \tag{1.2.5}$$

方程(1.2.2)描述的运动是**自由振动**,方程(1.2.3)、(1.2.4)、(1.2.5)描述的运动是**强迫振动**。

现在研究均匀杆的纵振动问题。有一均匀杆,只要杆中任一小段有纵向位移或速度,必定导致邻段的压缩或伸长,这种伸缩传开去,就有纵波沿着杆传播了,用 $u(x,t)$ 表示杆上各点的纵向位移,则杆的纵振动方程和弦的横振动方程一模一样,即为 $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$,虽然其物理过程中的规律完全不同,但数学表达出来却是一样的。只是这里 $a^2=\frac{E}{\rho}$,$E$ 为杨氏模量;$\rho$ 为杆的密度。

**2. 在固体中的热传导方程**

现在研究均匀物体中的热传导。设其密度为 $\rho$、比热容为 $c$、导

热系数为 $k$,它们均是常数。如果记该物体中一点为 $P(x,y,z)$,时刻 $t$ 该点处的温度为 $u(x,y,z,t)$。取物体内包含 $P$ 点的小长方体微元。我们讨论这个微元内的热平衡。

在时刻 $t$ 到 $t+\mathrm{d}t$ 内,该微元内各点的温度变化,以 $P(x,y,z)$ 点为代表则

$$u(P,t+\mathrm{d}t)-u(P,t)=\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t$$

使温度升高 $\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t$,所需的热量是 $c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$(该微元的质量为 $\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$)。这里消耗的热量应该由物体内部的热源与微元外向微元内的热传导来补充。现在只考虑传导现象,热传导服从一个经验定律——傅里叶实验定律:通过面积 $\mathrm{d}s$ 在 $\mathrm{d}t$ 时间内沿着法线 $\boldsymbol{n}$ 方向传导的热量为 $-k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$,这里出现的负号是因为热量由高温处流向低温处。故当 $\frac{\partial u}{\partial n}>0$ 时,热量实际上是向 $-\boldsymbol{n}$ 方向流去。由此在 $\mathrm{d}t$ 时间内通过微元左右两侧(面积 $\mathrm{d}s$ 均为 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$)流入(在左侧是沿 $x$ 方向流入,在右侧是沿 $-x$ 方向流入)微元的热量为

$$k\mathrm{d}t\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\mathrm{d}x,y,z,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z,t)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

沿前后两侧和上下两侧方向流入微元的热量,可以同样计算。最后,由热的平衡可得

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

或者

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\tag{1.2.6}$$

式中 $a^2=\frac{k}{c\rho}$。这里设 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为拉普拉斯算子(这是一个很重要的算子),此方程称为热传导方程,即式(1.2.6)可记作 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u$。

在以上过程中,基本的物理规律是热平衡——即能量守恒。我们可以认为傅里叶实验定律是一种简化假设,因为它只是在一定情

况下适用的近似的经验定律。当它不适用时，得到的数学模型可能大不相同。参数 $c$、$k$ 与 $u$ 无关也是重要的简化假设。当然参数 $c$、$k$ 与 $\rho$ 的均匀性也是一种简化，但是这并不重要，去掉这一假设并不会导致比方程(1.2.6)更为复杂的方程。

如果在物体内还有热源，则需要一个物体内部的热源函数来标志其强度。记这个函数为 $F(x,y,z,t)$，表示在 $\mathrm{d}t$ 时间内，在该微元中产生的热量是 $F(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$。$F$ 是由实验给出的，或者由其他物理规律导出，则热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \tag{1.2.7}$$

式中 $a^2=\frac{k}{c\rho}$，$f(x,y,z,t)=\frac{F(x,y,z,t)}{c\rho}$。方程(1.2.6)称为**齐次热传导方程**，方程(1.2.7)称为**非齐次热传导方程**。上述热传导方程中，描述空间坐标的独立变量为 $x$、$y$ 和 $z$，所以又称为**三维热传导方程**。但是当考察的物体为均匀细杆时，如果它的侧面绝热且在同一截面上的温度分布又是相同的，则易得到**一维热传导方程**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.2.8}$$

同样，如考虑一个薄片的热传导，并且薄片的侧面绝热，则可得**二维热传导方程**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1.2.9}$$

当考察如气体的扩散、液体的渗透、半导体材料中杂质扩散等物理过程时，若用 $u$ 表示所扩散物质的浓度，则浓度 $u$ 所满足方程的形式与热传导方程完全一样。由于它所描述的是物质的扩散现象，所以这样的方程又叫作**扩散方程**。

### 3. 拉普拉斯(Laplace)方程和泊松(Poisson)方程

当研究物理上的各种现象(例如：振动、热传导、扩散等)的稳定过程时，由于表征该过程的物理量 $u$ 不随时间而变化，因此$\frac{\partial u}{\partial t}=0$。

现在考虑静电场中的电位 $u(x,y,z)$,并设场中有电荷分布,其密度为 $\rho(x,y,z)$,如果 $E(x,y,z)$,则由定义可知 $E=-\mathrm{grad}u$。按高斯定律 $\mathrm{div}E=\rho$,这里高斯定律采取这样简单的形式是因为采用了特定的单位制,将 $E=-\mathrm{grad}u$ 代入就得到 $u$ 所适合的方程

$$-\mathrm{divgrad}u=-\Delta u=\rho$$

即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\rho(x,y,z) \tag{1.2.10}$$

方程(1.2.10)称为**三维泊松(Poisson)方程**。

特别是在自由电场(即 $\rho=0$ 的情况)中,电位适合方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1.2.11}$$

方程(1.2.11)称为**三维拉普拉斯方程或调和方程**。方程(1.2.11)通常表示成 $\Delta u=0$ 或 $\nabla^2 u=0$。凡具有二阶连续偏导数并满足方程(1.2.11)的连续函数称为**调和函数**。

这是从一些物理定律推导出的方程。如果分析一下这些定律导出的过程,仍可看到采用了微元的分析和对一些实验事实的概括。例如库仑(Coulumb)定律就是一个实验定律,而高斯定律是依据于它的。凡实验定律都包含了对实际情况的某些简化和理想化,或只是某些近似。这在性质上和前两个例子中的假设是一样的。

拉普拉斯方程不仅出现在静电场问题中,在其他问题中也常出现。例如设热传导方程(1.2.6)的解与时间无关——这种温度场称为定常温度场,则方程(1.2.6)中 $\Delta u=0$,所以,拉普拉斯方程也可以描写定常温度场。不但如此,它还可以描写引力场等。概括地说,它所描写的自然现象常是稳恒的、定常的,即与时间无关的。拉普拉斯方程和泊松方程不仅描述稳定状态下温度的分布规律,而且也能描述诸如稳定的浓度分布及静电场的电位分布等种种不同的物理现象。其他方程也是如此:如热传导方程可以描述扩散现象,弦振动方程可以描述传输线中的电流或电压(当参数符合一定条件时),还可以描述轴的扭转振动等。这种情况正是数学物理方程作为描述自然

现象的工具的力量所在。实际上，这三个方程各是一类方程的典型，各反映一类自然规律。尤其是这三类方程的数学性质，各取决于一个二次型的性质。本书将依据这个二次型将方程分类，并逐类进行讨论。

## §1.3 定解条件

### 1. 定解条件(一)——初始条件

对于一个确定的物理过程，仅有表征该过程的物理量 $u$ 所满足的方程还是不够的，还要附加一定的条件，这些条件应该恰恰足以说明系统的初始状态以及边界上的物理情况，所提出的具体条件多了不行，少了也不行。

先谈**初始条件**。表征某过程初始时刻状态的条件称为**初始条件**。对于**热传导问题**来说，一个特定的传热过程，仅仅知道温度 $u$ 所满足的方程是远远不够的，还需要知道物体在初始时刻的温度分布和物体在边界上的温度状况(或热交换状况)，这样才可以完全确定物体在以后时刻的温度。
初始条件的提法显然为

$$u(x,y,z,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x,y,z) \tag{1.3.1}$$

其中，$\varphi(x,y,z)$为已知函数，表示 $t=0$ 时物体内温度的分布。

对于弦振动问题来说，初始条件指的是弦在初始时刻的位移和速度。若以 $\varphi(x)$、$\psi(x)$分别表示弦的初位移和初速度，则初始条件可以表达为

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \tag{1.3.2}$$

## 2. 定解条件(二)——边界条件

(1) 弦振动问题的边界条件

再谈**边界条件**,表征某过程的物理量在系统的边界上所满足的物理条件称为**边界条件**,常见而又比较简单的边界条件有三种基本类型。

对于弦振动问题而言,弦的一端(例如 $x=0$)的运动规律已知,若以 $\mu_1(t)$表示其运动规律,则边界条件可以表示为

$$u\Big|_{x=0} = \mu_1(t) \tag{1.3.3}$$

若 $x=0$ 端被固定,则相应的边界条件为 $u\Big|_{x=0}=0$,式(1.3.3)这种类型的边界条件称为**第一类边界条件**。

若弦的一端(例如 $x=0$)在垂直于 $x$ 轴的直线上自由滑动,且不受到垂直方向的外力,这种边界称为**自由边界**。根据边界微元右端的张力沿垂直方向的分量是 $T_0\dfrac{\partial u}{\partial x}$,得出在自由边界时$\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$ 成立。

若边界张力沿垂直方向的分量是 $t$ 的一个已知函数,则相应的边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu_2(t) \tag{1.3.4}$$

这种类型的边界条件称为**第二类边界条件**。

若将弦的一端(例如 $x=l$) 固定在弹性支承上,并且弹性支承的伸缩符合胡克定律,如果支承的位置为 $u=0$,则在端点的值表示支承在该点的伸长。弦对支承拉力的垂直方向分量为 $-T_0\dfrac{\partial u}{\partial x}$,由胡克定律得

$$-T_0\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = ku\Big|_{x=l}$$

因此,在弹性支承的情况下,边界条件归结为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\right)\Big|_{x=l} = 0$$