大学课程
辅导与应试
系列丛书

●南北名校联合 ●四方名师打造 ●天下名品荟萃

概率论与数理统计
课程学习及考研辅导

田铮 主编

- 知识要点
- 例题精解
- 考点研究
- 强化训练
- 点拨与答案

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

概率论与数理统计
课程学习及考研辅导

田　铮　主编

田铮　肖华勇　温显斌　编

天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是为本科生学好概率论与数理统计课程，帮助考研人员复习好概率论与数理统计所编的辅导书，内容包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验八章. 每章均有知识要点、例题精解、考点研究、强化训练、点拨与解答五部分.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计课程学习及考研辅导/田铮主编.
—天津:天津大学出版社,2005.8
ISBN 7-5618-2174-3

Ⅰ.概...　Ⅱ.田...　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 080377 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨　欢
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话　发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址　www.tjup.com
印　　刷　昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　170mm×240mm
印　　张　12.5
字　　数　277 千
版　　次　2005 年 8 月第 1 版
印　　次　2005 年 8 月第 1 次
印　　数　1-3 000
定　　价　18.00 元

大学课程辅导与应试系列丛书
编纂指导委员会

(按姓氏笔画排列)

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的科学.作为一门数学课程,它是高等院校理工科、经济学、管理学等非数学专业的重要基础课;作为考查硕士研究生所应必须具备的数学知识和能力,它是工学、经济学、管理学等门类各学科专业的硕士研究生入学必考的科目.随着科学技术的发展,概率论与数理统计是学习现代科学技术必须具备的重要的随机数学基础知识之一,它的重要性越来越为人们所认识.

为了帮助本科生学好概率论与数理统计这门课程,帮助考研人员复习好概率论与数理统计,并为工程技术人员提供一本适用的参考书,编者依据国家教育部制定的《高等学校工科概率论与数理统计课程教学基本要求》(1995年修订版)、国家教育部高等院校数学与统计学教学指导委员会非数学类基础课程教学指导委员会制定的《高等学校工科概率论与数理统计课程基本要求》(2003年征求意见稿)及由教育部制定的《2004年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》,编写了本书.

全书共分八章,内容包括:随机事件与概率;随机变量及其概率分布;多维随机变量及其概率分布;随机变量的数字特征;大数定律与中心极限定理;数理统计的基本概念;参数估计;假设检验.

每章包括以下五个部分.

1.知识要点

本部分包括必须掌握的基本概念、基本理论和基本计算,力求做到内容简练、重点突出,便于学生掌握概率论与数理统计的基本知识和基本理论,这是全书基石性的内容.

2.例题精解

所选的精解典型例题由两部分构成:一是由长年教学实践所积累的典型例题;二是历年全国硕士研究生入学统一考题试题中的典型例题.本部分例题精解的目的包括两个层面:一是必须具备的基本运算能力、分析问题和解决问题的能力;二是全面综合运用所学知识,分析、研究和解决某些随机现象的能力.前者是后者的基础.力求做到在读者掌握基本理论的基础上,掌握概率论与数理统计分析问题、解决问题的思路和方法,进而开阔解题思路,提高综合分析能力.

3.考点研究

本部分明确提出概率论与数理统计课程所涵盖内容的基本要求,系统地理解概率论与数理统计的基本概念和基本理论,掌握其处理问题的基本方法.

4.强化训练

强化训练是为读者设计的重点综合性题目,旨在使读者具有抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力和综合运用所学的知识分析、解决某些随机现象中问题的能力.

5.点拨与答案

与第四部分相配合,启迪思维,激发读者对于解决随机现象中的数学问题的兴趣,论述清晰,易于理解.

本书的目的是既要有利于本科生学习概率论与数理统计这门课程,打好扎实的理论基础,并具有良好的基本计算技能,也要有利于考研人员提高综合运用所学的概率论与数理统计的知识分析问题和解决问题的能力,为今后的科学研究打下扎实的理论基础.

全书的第一章至第三章由温显斌副教授编写,第四章至第六章由田铮教授编写,第七章、第八章由肖华勇副教授编写,全书由田铮教授负责统稿和定稿.

全书的选材力求做到结合各专业的实际应用,注重培养学生关于概率论与数理统计的基本概念、基本理论及基本计算能力,注重培养学生分析问题、解决问题的能力,书中所选例题具有启发性、代表性,启迪读者思维,培养兴趣.对于强化训练题,书中都附有点拨与答案,供读者参考.

本书为工学、经济学、管理学等门类各学科专业的本科生、考研人员及研究生提供了一本学习辅导书,而且也为广大工程技术人员和科技工作者提供了一本有价值的参考书.

感谢天津大学出版社对本书所做的大量细微工作.

编者于西北工业大学

2005年6月

目　　录

第一章 随机事件与概率

一、知识要点

(一)随机事件

1.三个基本概念

(1)随机试验:如果试验满足下列三个性质:

1°可以在相同的条件下重复进行;

2°每次试验的结果具有多种可能性,试验前可以明确知道所有的可能结果;

3°进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

则称该试验为随机试验,简称试验,用 E 表示.

(2)样本空间:试验的所有可能结果构成的集合,称为样本空间,用 Ω 表示.样本空间的元素,即 E 的每一个结果,称为样本点,用 ω 表示.

(3)随机事件:在一次试验中可能发生也可能不发生,而在大量的重复试验中具有某种规律性的试验结果,称为随机事件,简称为事件,用英文大写字母 A、B、C 等表示.显然随机事件是样本空间 Ω 的子集.

2.事件之间的关系与运算

(1)事件之间的四种关系:

关系	符号	概率论	集合论
包含关系	$A\subseteq B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
等价关系	$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
对立关系	$\bar{A}$	事件 A 的对立事件	A 的余集
互斥关系	$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 不能同时发生(或互不相容)	A 与 B 无公共元素

(2)事件之间的三种运算:

运算	符号	概率论	集合论
事件的和(并)	$A\cup B$(或 $A+B$)	事件“A 与 B 至少有一个发生”	A 与 B 的并集
	$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$	事件“$A_1,\cdots,A_n$ 至少有一个发生”	$A_1,\cdots,A_n$ 的并集
事件的积(交)	$A\cap B$(或 AB)	事件“A 与 B 同时发生”	A 与 B 的交集

续表

运算	符号	概率论	集合论
	$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$	事件"$A_1,\cdots,A_n$ 同时发生"	$A_1,\cdots,A_n$ 的交集
事件的差	$A-B$	事件"A 发生而 B 不发生"	A 与 B 的差集

(3)事件的运算律：

1°交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$.

2°结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A(BC)=(AB)C$.

3°分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC),(AB)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

4°德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

(二)随机事件的概率

1.概率的描述性定义

用来刻画事件出现可能性大小的数值称为事件的概率.

2.概率的古典定义

我们把具有以下两个性质的试验称为古典概型：

(1)所有可能的试验结果是有限个(有限性)；

(2)每个可能结果在一次试验中出现的可能性相同(等可能性).

在古典概型中，设样本空间 Ω 中包含有 n 个样本点，则对任意事件 A，若 A 中含有 k 个样本点，那么事件 A 的概率 $P(A)$ 定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 中包含样本点总数}}{\text{样本空间}\Omega\text{ 中样本点总数}}\triangleq\frac{k}{n}.$$

3.概率的统计定义

在相同的条件下重复进行 n 次试验，事件 A 在 n 次试验中出现了 m 次，当试验次数 n 足够大时，频率$\frac{m}{n}$稳定在某个常数 p 附近，则我们就称 p 为事件 A 的概率，即

$$P(A)=p.$$

4.概率的几何定义

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 的几何度量}}{\text{样本空间}\Omega\text{ 的几何度量}}.$$

5.概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为 Ω，对于试验 E 的每一个事件 A，都赋予一个实数 $P(A)$，如果 $P(A)$ 满足以下三个公理，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率：

(1)非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$；

(3)可列可加性：若 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 是两两互不相容的事件(即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$)，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

6.条件概率的定义

在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率，称为事件 A 在事件 B 已发生的条件下的条件概率.记做 $P(A|B)$，有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

7.概率的性质

(1)(有限可加性)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

(2)$P(\bar{A})=1-P(A)$.

(3)若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$；$P(A)\geqslant P(B)$.

(4)$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

(5)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

(6)$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

(7)$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}^{n}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$.

(三)计算公式

1.加法公式

如果事件 A 与 B 互不相容，则事件 A 与 B 和的概率等于它们的概率之和.即

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

上式对有限个事件的场合下仍成立，即如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

上式对可列个随机事件的场合下亦成立，即如果事件 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

2.乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)(P(A)>0),$$
$$P(AB)=P(B)P(A|B)(P(B)>0).$$

一般地，如果 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).$$

3.全概率公式

如果事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 互不相容，$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对于任一事件 A 有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

4.贝叶斯公式

在全概率公式的条件下,如果 $P(A)>0$,则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}.$$

(四)事件的独立性

设 A、B 是随机试验 E 的两个事件,若 $P(AB)=P(A)P(B)$成立,则称事件 A 与 B 相互独立.

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n>2)$个事件,如果对于任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$个事件积的概率等于各个事件概率的积,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.

若 A、B 相互独立,则 A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 B,$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 都相互独立.

(五)几个重要的概型

1.超几何概型

设一盒中有 N 个球,其中有 M 个红球,$N-M$ 个白球,现从中抽取 n 个球,则在这 n 个球中有 m 个红球的概率为$\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

2.伯努利概型

如果一个试验 E 只有两个对立的可能结果,即事件 A 发生或事件$\bar{A}$ 发生,且各次试验结果互不影响.将 E 独立地重复进行 n 次,则称这一串重复的独立试验为 n 重伯努利试验,简称为伯努利概型.设 $P(A)=p(0<p<1)$,则在 n 重伯努利试验中,事件 A 恰好发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$次的概率为

$$p_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

此公式称为二项概率公式.

3.几何概型

设试验 E 只有两个对立的可能结果且各次试验结果互不影响,将 E 独立地重复进行,则事件 A 首次出现所需试验次数为 k 的概率为

$$p(k)=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots,$$

其中 $P(A)=p$.

二、例题精解

例 1.1 写出下列随机试验的样本空间:

(1)记录一个小班一次数学考试的平均分数(百分制记分);

(2)同时掷两颗骰子,记录两颗骰子的点数之和;

(3)10只产品中有3只是次品,每次从其中取一只,取后不放回,直到3只次品都取出为止,记录抽取的次数;

(4)生产的产品直到得到5件正品为止,记录生产产品的总件数;

(5)测量一汽车通过某定点的速度;

(6)在单位圆内任意取一点,记录它的坐标.

解 (1)设该小班人数为 n,则所求样本空间

$$\Omega=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{100n}{n}\right\}.$$

(2)由于两颗骰子点数之和最小值为2,最大数为12,故所求样本空间

$$\Omega=\{2,3,4,\cdots,12\}.$$

(3)将3只次品都取出,至少要抽取3次,而最多抽取10次即可,故所求样本空间

$$\Omega=\{3,4,\cdots,9,10\}.$$

(4)最理想的情形是开始生产的5件产品都是正品,故所求样本空间

$$\Omega=\{5,6,7,\cdots\}.$$

(5)若不考虑汽车的运动方向,则样本空间

$$\Omega=\{v\mid v>0\}.$$

若考虑汽车的运动方向,θ 表示该运动方向与正东方向之间的夹角,则所求样本空间

$$\Omega=\{(v\cos\theta,v\sin\theta)\mid v>0,0\leqslant\theta<2\pi\}.$$

(6)设点的坐标为(x,y),则所求样本空间

$$\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1,x,y\in\mathbf{R}\}.$$

例1.2 设 A、B、C 为三个事件,试用 A、B、C 表示下列事件:

(1)A 发生,B 与 C 不发生;
(2)A 与 B 都发生,C 不发生;
(3)A、B、C 都发生;
(4)A、B、C 都不发生;
(5)A、B、C 不都发生;
(6)A、B、C 中至少有1个发生;
(7)A、B、C 中不多于1个发生;
(8)A、B、C 中至少有2个发生.

解 (1)$A\bar{B}\bar{C}$.
(2)$AB\bar{C}$.
(3)ABC.
(4)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或$\overline{A\cup B\cup C}$.
(5)$\overline{ABC}$或$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$.
(6)$A\cup B\cup C$.
(7)$\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}B\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或$\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{B}\bar{C}$.
(8)$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$ 或$AB\cup AC\cup BC$.

[注释] 复合事件常用"恰有"、"只有"、"至少"、"至多"等词描述,为了准确地用一些简单事件的运算来表示复合事件,必须清楚这些概念的含义,随机事件可以根据定义直接表示出来,也可以用对立事件来表示.在一般情况下,尽量将事件表示成互不相容事件的和,这样计算概率较容易.还可用图示帮助分析、理解事件的运算.

例1.3 在某城市发行3种报纸 A、B、C,经调查,订阅 A 报的有45%,订阅 B 报的有35%,订阅 C 报的有30%,同时订阅 A 及 B 报的有10%,同时订阅 A 及 C 报的有

8%，同时订阅 B 及 C 报的有 5%，同时订阅 A、B、C 报的有 3%，求下列事件的概率：

(1)只订 A 报的；

(2)只订 A 报及 B 报；

(3)只订一种报纸；

(4)正好订两种报纸；

(5)至少订阅一种报纸；

(6)不订阅任何报纸；

(7)至多订阅一种报纸；

解 设 $A=\{订 A 报\}$，$B=\{订 B 报\}$，$C=\{订 C 报\}$，则

$$P(A)=45\%,\quad P(B)=35\%,\quad P(C)=30\%,$$
$$P(AB)=10\%,\quad P(AC)=8\%,\quad P(BC)=5\%,\quad P(ABC)=3\%.$$

(1) $P(A\bar{B}\bar{C})=P(A-B-C)=P(A-(B\cup C))=P(A-A(B\cup C))$
$=P(A)-P(A(B\cup C))=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$
$=45\%-10\%-8\%+3\%=30\%$.

(2) $P(AB\bar{C})=P(AB-C)=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)$
$=10\%-3\%=7\%$.

(3) $P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$
$=P(A\bar{B}\bar{C})+P(B-B(A\cup C))+P(C-C(A\cup B))$
$=P(A\bar{B}\bar{C})+P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)+P(C)-P(AC)-P(BC)$
$+P(ABC)$
$=30\%+35\%-10\%-5\%+3\%+30\%-8\%-5\%+3\%=73\%$.

(4) $P(AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC)=P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC)$
$=P(AB)-P(ABC)+P(AC)-P(ABC)+P(BC)-P(ABC)$
$=P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC)$
$=10\%+8\%+5\%-3\times3\%=14\%$.

(5) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$
$=45\%+35\%+30\%-10\%-8\%-5\%+3\%=90\%$.

(6) $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-90\%=10\%$.

(7) $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)=P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})+P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)$
$=10\%+73\%=83\%$.

[注释] 本题考查利用事件之间的关系及概率的性质计算事件概率的能力，这里正确利用已知事件表示所求事件是关键，可借助于图示法，这样会更清楚些.

例 1.4 4 男生 4 女生去跳舞，抽签选舞伴，求 4 男生的舞伴均为女生的概率？

解法一 设 $A=\{4 男生的舞伴均为女生\}$，样本点的总数为 $C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2/4!$，而 A 所包含的样本点的个数可以这样考虑，将 8 人分为男、女两组，每组 4 人，在男子组选 1 人，在女子组选 1 人，2 人搭伴，再从男子组选 1 人，女子组选 1 人，令其搭伴，…因此 A 包含的样本点的个数为 $(C_4^1)^2\cdot(C_3^1)^2\cdot(C_2^1)^2\cdot(C_1^1)^2/4!$，故有

$$P(A)=\frac{(C_4^1)^2\cdot(C_3^1)^2\cdot(C_2^1)^2\cdot(C_1^1)^2}{C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2}=\frac{8}{35}.$$

解法二 还可以这样看，8 人中 1 人先选舞伴有 7 种可能，选完后剩 6 人，其中又 1

人选，有5种可能，所剩4人中再有1人选有3种可能，最后剩下2人，只有1种可能，样本点总数为 $C_7^1C_5^1C_3^1C_1^1$. A 所包含样本点数可考虑4男选4女，不妨设4男为甲，乙，丙，丁，其中甲先选有4种可能，乙其次选有3种可能，然后丙有2种可能，丁最后只有1种可能，因此

$$P(A)=\frac{C_4^1C_3^1C_2^1C_1^1}{C_7^1C_5^1C_3^1C_1^1}=\frac{8}{35}.$$

[注释] 该问题是古典概型问题.古典概型一般都存在多种解法，因为同一试验往往可以用不同的样本空间来描述，这样就可以引导出不同的解法，对于同样的样本空间，计算事件样本点的方法也会有多种，关键是清楚所构造的样本空间中样本点的形式和性质，并且要求样本空间与事件中样本点的数目考虑角度应完全相同.只有这样才能正确地计算出所求的概率.

例 1.5 袋中有 a 只红球，b 只白球，它们除颜色不同外，其他方面没有差别，现在无放回地把球随机地一只只摸出来，求第 k 次摸出的1只球是红球的事件 A 的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

解法一 把 a 只红球及 b 只白球看作是不同的(可以设想把它们编号)，若把摸出的球放在排列成一直线的 $a+b$ 个位置上，则可能的排法相当于把 $a+b$ 个元素进行全排列，总数为 $(a+b)!$，把它们作为样本点全体.所求概率的事件相当于第 k 个位置上任取1只红球放入，余下的球在余下的 $a+b-1$ 个位置上全排列，因此事件所包含的样本点数为 $C_a^1(a+b-1)!$，故所求事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

解法二 把 a 只红球看作是没有区别的，b 只白球也看作是没有区别，仍把摸出的球依次放在排列成一直线的 $a+b$ 个位置上，由于若把 a 只红球的位置固定下来，则其他的位置必然是放白球，而红球的位置共有 C_{a+b}^a 种放法.对于第 k 次摸得红球这一事件，第 k 个位置必须放红球，剩下的红球可以在 $a+b-1$ 个位置上任取 $a-1$ 个位置，故所求事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^a}=\frac{a}{a+b}.$$

解法三 如果只考虑第 k 次摸出的球，总共有 $a+b$ 种可能，而第 k 次摸出的可能数为 a，故所求事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{a}{a+b}.$$

[注释] 这三种方法的区别在于构造的样本空间不同，法一是把每个球看成不相同的；法二则对同色球不加区别；法三只考虑第 k 次取出的球.该题目类似于抽签，先抽和后抽的抽中机会是相同的.请读者考虑如果是有放回地抽取，又如何求解.

例 1.6 一袋中装有 $N-1$ 只红球和1只白球，每次从袋中随机抽取1球，并换入1只红球，这样继续下去，问第 k 次取出的是红球的概率是多少?

解　设 A 表示事件“第 k 次取到红球”，则 $\bar{A}$ 表示“第 k 次取到白球”，因为袋中只有1只白球，每次取出1球后总换入红球，所以当第 k 次取出白球时，则 $k-1$ 次取出的一定是红球，因此

$$P(\bar{A})=\frac{(N-1)^{k-1}\cdot 1}{N^k}=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{N}.$$

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{1}{N}\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}.$$

［注释］　对某些事件直接求概率比较难，而其对立事件的概率容易得到，这时应先求对立事件的概率，然后再求所求的概率，这需要认真分析事件间的关系，会找事件的对立事件.

例 1.7　有 n 个人，每个人都以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 被分配在 $N(n\leqslant N)$ 间房中的每一间中，试求下列各事件的概率：

(1) $A=\{$某指定 n 间房中各有1人$\}$；　　(2) $B=\{$恰有 n 间房，其中各有1人$\}$；

(3) $C=\{$某指定房中恰有 $m(m\leqslant n)$ 人$\}$.

解　由题意，每个人都以同样的概率被分配到 N 间房中的每一间去，故每间房对应于一个基本事件，样本空间是 N 个房间有放回抽取 n 次的所有排列构成的集合，共含 N^n 个样本点.

(1)固定某 n 间房，它包含 $n!$ 个样本点，于是

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

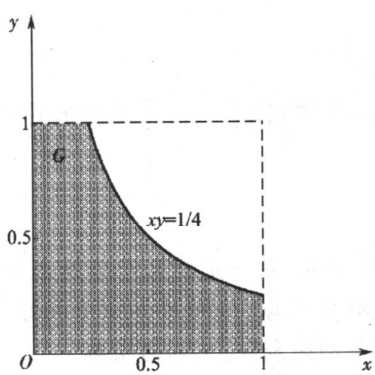
(2) n 间房不固定，可先选定 n 间房，归结为(1)的情况，于是

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

(3)

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-m}.$$

［注释］　这是古典概型中分房问题.很多实际问题都可归结为该问题的解决，比如生日问题等，望读者认真分析、归纳总结.



例 1.8 图

例 1.8　从区间(0,1)内任取两个数，试求这两个数的积小于 $\frac{1}{4}$ 的概率.

解　设从区间(0,1)内任取两个数 x 与 y，则

$$0<x<1,\quad 0<y<1,$$

样本空间 Ω 是边长为1的正方形.两个数的积小于 $\frac{1}{4}$ 的充分必要条件为

$$xy<\frac{1}{4},\quad 0<x<1,\quad 0<y<1.$$

即当且仅当样本点(x,y)落在由双曲线 $xy=\frac{1}{4}$及4条直线.

$$x=0,\quad x=1,\quad y=0,\quad y=1$$

所围成的区域 G 内时,两个数的积小于$\frac{1}{4}$,故所求概率为

$$p=\frac{G\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\times 1}{1\times 1}=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}.$$

[注释] 几何概率的计算问题经常用到高等数学中的面积或体积的求法,希望读者熟悉这部分知识.

例 1.9 设口袋中装有 $2n-1$ 只白球,$2n$ 只红球,一次取出 n 只球,如果已知取出的球都是同一颜色,试计算其颜色是红色的概率.

解 设 A、B、C 分别表示取出的n 个球均为白球、红球和同一种颜色这三个事件,易见 A、B 互不相容,且有 $C=A\cup B$,所以 $P(C)=P(A)+P(B)$.另一方面,因为 $B\subset C$,所以 $B\cap C=B$,$P(BC)=P(B)$.又

$$P(A)=\frac{C_{2n-1}^{n}}{C_{4n-1}^{n}},\quad P(B)=\frac{C_{2n}^{n}}{C_{4n-1}^{n}},$$

所以

$$P(B\mid C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{P(B)}{P(C)}=\frac{P(B)}{P(B)+P(A)}=\frac{C_{2n}^{n}}{C_{2n}^{n}+C_{2n-1}^{n}}=\frac{2}{3}.$$

[注释] 这是条件概率的计算问题,对于这类问题一定要弄清楚哪些是条件,哪些是所求的事件.一般地它们之间的关系具有包含、被包含关系或先后次序关系.

例 1.10 某种产品每100件为一批,出厂验收规定从每批中任取5件为样品,样品中若发现有次品,则这批产品就不合格,拒绝出厂.现有一批产品,已知其中有6件次品,试求这批产品被拒绝出厂的概率.

解 设 A 表示"这批产品被拒绝出厂"事件,A_i 表示"第 i 件样品为合格品"事件($i=1,2,\cdots,5$),则 $\bar{A}=A_1A_2A_3A_4A_5$.所以

$$\begin{aligned}P(A)&=1-P(\bar{A})=1-P(A_1A_2A_3A_4A_5)\\&=1-P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)P(A_4\mid A_1A_2A_3)P(A_5\mid A_1A_2A_3A_4)\\&=1-\frac{94}{100}\cdot\frac{93}{99}\cdot\frac{92}{98}\cdot\frac{91}{97}\cdot\frac{90}{96}=0.271.\end{aligned}$$

[注释] 本题应用了随机事件与其对立事件概率之间的关系,使问题大大简化,同时将所求事件的概率转化为几个简单事件运算,这是求事件概率中经常使用的技巧和手段.

例 1.11 一架长机带两架僚机飞往某目的地进行轰炸,但要到达目的地,应有无线电导航,而3架飞机中只有长机才具有这种设备.在到达目的地之前,必须经过敌方的高射炮阵地上空,这时任一飞机被击落的概率为0.2,到达目的地后各机将独立地进行轰炸,炸毁目标的概率都是0.3,试求目标被炸毁的概率.