21 世纪高职高专系列规划教材 · 公共基础课类
21SHIJI GAOZHI GAOZHUAN XILIEGUIHUA JIAOCAI · GONGGONGJICHUKELEI

GaoDengShuXue

（理科）

高等数学

主编
岳忠玉 张绪绪
主审
张文鹏

NORTHWEST UNIVERSITY PRESS
西北大学出版社

21世纪高职高专系列规划教材·公共基础课类

高 等 数 学

（理 科）

主 编 岳忠玉 张绪绪

副主编 沈康顿 崔永红

郭群虎 岳 卫

主 审 张文鹏

西北大学出版社

中国·西安

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：理科/岳忠玉等编.—西安：西北大学出版社，2002.8
ISBN 7-5604-1724-8

Ⅰ.高…　Ⅱ.岳…　Ⅲ.高等数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 057574 号

高等数学（理科）

主编　岳忠玉　张绪绪

西北大学出版社出版发行

（西北大学校内　邮编 710069　电话 8302590）

新华书店经销　　陕西益和印务有限责任公司印刷

787 毫米×1092 毫米　1/16 开本　22 印张　535 千字

2003 年 8 月第 2 版　　2005 年 8 月第 3 次印刷

ISBN 7-5604-1724-8/O·108　　定价：25.00 元

再版说明

2002年在陕西省教育厅高教处统一安排下，我们编写了这本《高等数学》教材，它主要是供高职高专院校高中后三年制理工科类专业的学生使用的。

在一年的使用过程中，一方面我们不断收到读者反馈的信息，提出对这本教材的建议和意见；另一方面，在我们的教学实践中，也进一步积累了经验。根据使用情况，再版时我们主要做了以下一些工作：订正了第一版中的错误；简化了其中的一些内容，同时充实和调整了例题和习题；重新编写了每一章的小结，以利于读者对每一章的知识有更清楚的认识和进一步的掌握。

本次再版是由岳忠玉、岳卫、胡红亮主要负责。本次重印校订工作是由岳忠玉、刘铁锁、胡红亮、刘宝利、岳卫主要负责。

经过这次修改后，教材得到了进一步的完善，但有的地方难免写得不够理想，诚恳地希望读者批评指正，继续给予关心和支持。

编 者

2005年7月

前　言

为适应高职高专教育发展的新形势，在陕西省教育厅高教处统一安排下，根据1999年教育部组织制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，按照“在基础课的教学中，要求以应用为目的，以必需够用为度”的原则，我们认真总结了我省高职高专数学教改经验并吸取国内同类教材的优点，组织力量编写了这套适用于高职高专院校高中后三年制理工科类专业的《高等数学》教材。

在编写过程中，我们充分考虑到高职高专教育的特点及对人材培养目标的要求，为了使教师好用，学生好学，特别在以下几个方面作了一定的努力：

1. 强调概念、定理的背景分析和直观解释，不追求严格的论证和推导，代之以几何说明、合情推理。

2. 精选例题、习题和复习题。每节后的习题以反映基本概念、基本运算和基本方法的题目为主，每章后的复习题以判断、选择、填空等客观性题目和较综合的题目为主。

3. 每章后配有本章小结，旨在帮助学生掌握基本要求，突破重点难点。

4. 将分散于微积分各部分的数值计算集中起来，适当扩充为“计算方法初步”一章，以更好地培养学生基本的数值分析和数值计算能力。

5. 为提高学生利用数学知识解决实际问题的意识和能力，增加“数学建模简介”一章，让学生初步了解数学建模的步骤、原则和方法。

6. 书后附有四个附录，前三个是为了方便学生学习时查阅，最后一个简单介绍了数学史特别是微积分史上一些著名的数学家，目的是让学生了解一代代数学大师的光辉思想和巨大贡献，从中受到启迪，提高学习高等数学的兴趣。

全书内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，重积分及其应用，无穷级数，计算方法初步和数学建模简介。书

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

后附有初等数学常用公式，常用平面曲线，常用积分表，著名数学家简介及习题参考答案。本书的基本教学时数不少于 116 学时，标有 * 号的内容需要另加学时。

参加本书编写的有西安航空技术高等专科学校岳忠玉，杨凌职业技术学院陈亚丽（第一章），陕西职业技术学院杜卫平（第二章）、崔永红（第三章），陕西国防工业职业技术学院成均孝（第四章）、沈康顿（第五章），陕西交通职业技术学院王子燕（第六章），陕西工业职业技术学院张绪绪（第七章），西安航空职业技术学院李陆军（第八章），陕西工业职业技术学院段瑞（第九章），陕西能源职业技本学院郭群虎（第十章），西安航空技术高等专科学校岳卫（第十一章）、胡红亮（第十二章）。全书编写大纲及框架结构安排由岳忠玉承担，最后的统稿、定稿由岳忠玉、张绪绪承担。另外，沈康顿、崔永红、郭群虎和岳卫也承担了部分统稿工作。

西北大学张文鹏教授承担了本书的审稿工作，提出了许多有价值的意见，在此表示衷心的感谢。

本书除可作为高等专科学校、高等职业学校的教材外，也可作为成人高等学校、木科院校的二级职业技术学院的高等数学教材，还可供工程技术人员参考。

由于编者木平有限，加之时间仓促，错误和疏漏之处在所难免，恳请使用者批评指正，以便再版时进一步修改。

编　者

2002 年夏

目　录

·第一章

函数、极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则以变量为研究对象．函数是同一自然现象或技术过程中变量依从关系的反映．极限方法则是研究变量的一种基本方法，是微积分学的重要工具．本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，讨论函数的极限和函数的连续性等问题．

§1.1　函数

一、函数的概念

1．函数的定义

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着，这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律．

例如，在自由落体运动中，假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么下落时间 t 与下落的距离 s 之间的相依关系由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 给定，其中 g 是重力加速度，假定物体着地的时刻为 T，那么变量 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时，由上式就可以确定下落距离 s 这个变量的相应数值．

上例中变量 t 与 s 之间的这种依从关系就是我们将要讨论的函数．

定义 1　设有两个变量 x 和 y，若当变量 x 在实数的某一范围 D 内，任意取定一个数值时，变量 y 按照某一对应法则 f，都有惟一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),x\in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为函数（或因变量）．自变量的取值范围 D 称为函数的定义域．当 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$．当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的集合叫做函数的值域．

函数可以用解析式（公式），图形或表格表示．今后，如无特别说明我们讨论的函数皆指用解析式表示的函数．

在考虑实际问题时，应根据问题的实际意义来确定函数的定义域．如上例中函数的定义域就是 $D=[0,T]$．当只给函数的解析式而没有实际背景时，其定义域就是指使解析式有意义的自变量能取的一切实数值．

例 1　求函数 $y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域．

解　要使函数有意义，必须

$$4-x^2\neq 0 \text{ 且 } x+2\geqslant 0$$

即 $x\neq\pm 2$ 且 $x\geqslant -2$．因此，该函数的定义域为 $(-2,2)\cup(2,+\infty)$．

两个函数当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时,这两个函数才被认为是相同的. 例如,函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$,它们的定义域不同,所以它们是不同的函数. 定义域和对应法则是确定函数的二要素.

需要强调的是求函数值的关键在于弄清对应法则. 对于一个已知函数必须会找它的对应的法则. 如函数 $y=f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ 的对应法则为

$$f=\frac{e^{(\ )}+e^{-(\ )}}{e^{(\ )}-e^{-(\ )}}$$

2. **分段函数**

分段函数是指在自变量的不同取值范围内,用不同的表达式表示的函数. 应特别注意,用几个表达式表示的分段函数是一个函数,而不是几个函数. 求分段函数的函数值时,应把自变量的值代入相应的表达式中去计算.

例如,绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0\\ 0, & \text{当 } x=0\\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}$$

及取整函数 $y=[x]$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数,都是分段函数.

例 2 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,求 $f(4)$ 和 $f(-3)$.

解 当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)=\sqrt{x}$,所以 $f(4)=\sqrt{4}=2$,

当 $x<0$ 时,$f(x)=-x$,所以 $f(-3)=-(-3)=3$.

二、函数的几种特性

1. **有界性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $I\subset D$,如果存在一个正数 M,对于 I 内的任一 x 总有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在数集 I 上有界.

如 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界,而 $g(x)=\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$内无界,但在$[\frac{1}{2},+\infty)$内有界.

2. **单调性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,若对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加,区间 I 称为单调增区间. 若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少,区间 I 称单调减区间.

3. **奇偶性**

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对于任意 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

4. 周期性

函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在不为零的数 T，使得对于任一 $x \in D$，有 $(x+T) \in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立．则称 $f(x)$ 为周期函数．通常说的函数的周期是指它的最小正周期．

三、反函数

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，如果对于 W 中的任一 y，由 $y=f(x)$ 能解出惟一的 $x(x=\varphi(y))$，这时 y 成了自变量，而 x 成了因变量，我们称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，$f(x)$ 称为直接函数．它们两者的图像显然是重合的．

习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示．因此常常把 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$，称 $y=\varphi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数．这时它们的图像关于直线 $y=x$ 对称．

四、初等函数

1. 基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数皆称为基本初等函数．它们的定义域、值域、图像和特性如下页基本初等函数表(表中没有列出正割和余割函数，它们的图像参见附录二)所示．

2. 复合函数

定义 3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，而且当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或该定义域的一部分取值时，所对应的 u 的值使 $y=f(u)$ 有定义，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是 x 的复合函数，称 u 为中间变量．

注意：不是任何两个函数都可以构成一个复合函数，例如 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不可能复合成一个复合函数．因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域内的任何 x 值所对应的 u 值都使 $y=\arcsin u$ 没有意义．

对于一个给定的复合函数，必须会分析清楚它的复合过程(即会将复合函数进行分解)．掌握这种分析复合过程的方法，对将来求函数的导数和积分会带来很多方便．

例 3　指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt[4]{1+x^2}$

(2) $y=\cos^2 x$

(3) $y=e^{\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}}$

解　(1) $y=\sqrt[4]{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt[4]{u}$ 与 $u=1+x^2$ 复合而成．

(2) $y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 复合而成．

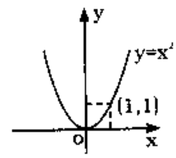
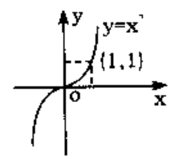
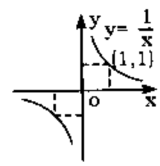
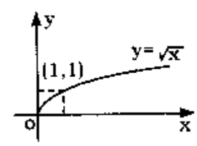
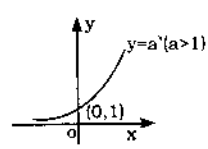
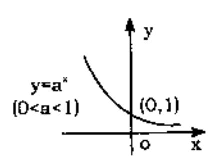
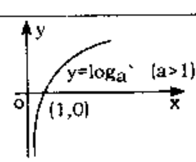
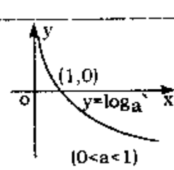
(3) $y=e^{\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\arctan v$ 和 $v=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 复合而成．

3. 初等函数

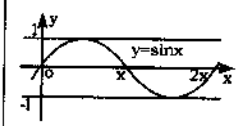
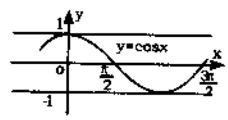
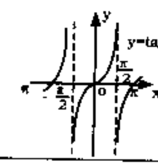
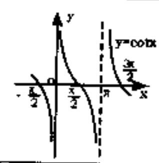
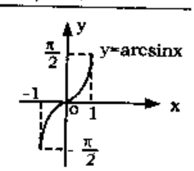
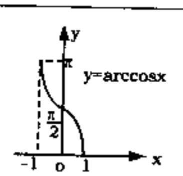
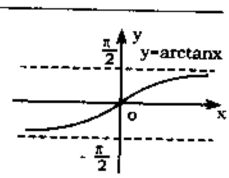
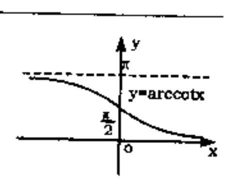
由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤构成的并能用一个解析式子表示的函数称为初等函数．

例如，$y=\cos(x^2+2x+3)$ 和 $t=\sqrt{\lg(x^2+1)}+e^{\sqrt{x}}$ 都是初等函数．

基本初等函数表

函数		定义域	值域	简单性质	图像
幂函数 $y=x^{a}$	$y=x^2$	R	$y\geqslant 0$	偶函数 $x>0$,递增 $x<0$,递减	
	$y=x^3$	R	R	奇函数 单调递增	
	$y=\frac{1}{x}$	$x\neq 0$	$y\neq 0$	奇函数 在区间 $(-\infty,0)$ 和$(0,+\infty)$ 分别单调递减	
	$y=\sqrt{x}$	$x\geqslant 0$	$y\geqslant 0$	非奇非偶 单调递增	
指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0,$ $a\neq 1)$	$a>1$	R	R^{+}	单调递增 过(0,1)	
	$0<a<1$	R	R^{+}	单调递减 过(0,1)	
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,$ $a\neq 1)$	$a>1$	R^{+}	R	单调递增 过(1,0)	
	$0<a<1$	R^{+}	R	单调递减 过(1,0)	

续表

函数		定义域	值域	简单性质	图像
三角函数	$y=\sin x$	R	$[-1,1]$	奇函数 有界 周期 2π	
	$y=\cos x$	R	$[-1,1]$	偶函数 有界 周期 2π	
	$y=\tan x$	$x\in R$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$	R	奇函数 周期 π	
	$y=\cot x$	$x\in R$ 且 $x\neq k\pi$ $(k\in Z)$	R	奇函数 周期 π	
反三角函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	奇函数 单调递增 有界	
	$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	单调递减 有界	
	$y=\arctan x$	R	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	奇函数 单调递增 有界	
	$y=\operatorname{arccot} x$	R	$(0,\pi)$	单调递减 有界	

五、函数关系举例

例 4 有一个长方形铁皮，它两边的长为 a 和 b，从它的四个角截去相同的小方块，折成一个无盖的盒子(如图 1.1)，求它的容积 v 与高 x 之间的函数关系．

解 设截去的小方块的边长为 x，则折成的盒子的高为 x，底面长为 $a-2x$，宽为 $b-2x$，这时它的容积为

$$v=(a-2x)(b-2x)x=4x^3-2(a+b)^2x^2+abx$$

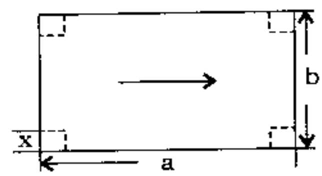


图 1.1

例 5 电脉冲发生器发出一个三角形的脉冲波(如图 1.2) 求电压 u(伏) 和时间 t(微秒) 之间的函数关系．

解 在 0 到 10(微秒) 这段时间内，电压 u 由 0 直线上升到 15(伏)，由图象知道这条直线方程是

$$u=\frac{15}{10}t=1.5t,\qquad t\in[0,10]$$

在 10 到 20(微秒) 这段时间内，电压 u 由 15(伏) 直线下降到 0，这条直线方程是

$$u=-\frac{15}{10}t+30=-1.5t+30,\qquad t\in[10,20]$$

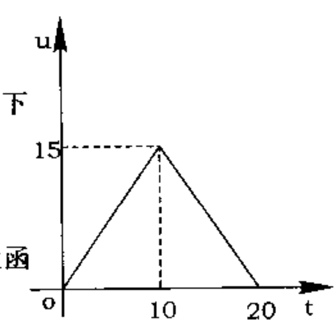


图 1.2

归纳上面讨论的结果，函数 $u=u(t)$ 可表示成下面的分段函数形式：

$$u=\begin{cases}1.5t, & 0\leqslant t<10\\ -1.5t+30, & 10\leqslant t\leqslant 20\end{cases}$$

最后介绍后面几章要用到的 δ - 邻域的概念．

以 x_0 为中心，长度为 $2\delta(\delta>0)$ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的 δ 邻域，可用不等式 $|x-x_0|<\delta$ 来表示．x_0 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径．当 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后，称为 x_0 的空心邻域，可用不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 表示．

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域

(1) $y=\lg(\lg x)$　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x}+\arcsin\dfrac{x}{2}$

(3) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$　　(4) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$

2. 指出下列函数的最小正周期

(1) $y=\sin x\cos x$　　(2) $y=1+\cot x$

(3) $y=\sin^2 x$　　(4) $y=\sin x+\cos x$

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}-(x+1), & x\leqslant -1\\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x\leqslant 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(2)$．

4. 设 $f(x)=(x-1)^2, g(x)=\dfrac{1}{x+1}$，求

(1) $f[g(x)]$　　(2) $g[f(x)]$

(3) $f(x^2)$　　(4) $g(x-1)$

5. 设 $F(x)=e^x$，证明：

(1) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$　　(2) $\dfrac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$

6. 指出下列函数的复合过程

(1) $y=\tan\sqrt{1+x}$　　(2) $y=\sin^2(1+2x)$

(3) $y=[\arcsin(1-x^2)]^3$

7. 在半径为 R 的球内作内接圆柱体，试将圆柱体体积表示为高的函数，并求此函数的定义域.

8. 已知鸡蛋收购价为每公斤 3 元时，每月能收购 5000 公斤. 若将收购价每公斤提高 0.1 元，则每月收购量可以增加 500 公斤，试求鸡蛋的线性供给函数.

§1.2　极限的概念

一、数列的极限

例 1　考察下列几个数列：

(1) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$，即数列 $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$

(2) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$，即数列 $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$

(3) $\{x_n\}=\{(-1)^{n-1}\}$，即数列 $1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$

(4) $\{x_n\}=\{n^2+3\}$，即数列 $4,7,\cdots,n^2+3,\cdots$

可以发现，随着 n 的无限增大，各数列的通项 x_n 的变化趋势可以分成两种情形. 第一种情形是：当 n 无限增大时，通项 $\{x_n\}$ 无限地接近于某一常数. 例如，在(1)中，随着 n 的无限增大，通项 $x_n=\dfrac{1}{n}$ 无限地趋近于零；在(2)中，随着 n 的无限增大，通项 $x_n=\dfrac{n}{n+1}$ 无限趋近于 1. 另一种情形是：当 n 无限增大时，通项 x_n 不趋近于任意常数. 例如在(3)中，数列通项 $x_n=(-1)^{n-1}$ 总是在 1 和 -1 之间振动；在(4)中，随着 n 的增大，其通项 $x_n=n^2+3$ 无限增大，它们都不趋近于任何常数.

为了从数学上描述上面(1)和(2)两个数列所具有的共同性质，我们给出了数列极限的概念：

定义 1　给定数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，其通项 x_n 无限地趋近于某一个常数 A，则称数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A，或者\ x_n\to A(n\to\infty)$$

当数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限时，称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，此时称 $\{x_n\}$ 为收敛数列. 如果数列 $\{x_n\}$ 不趋近于任何常数，即 $\{x_n\}$ 没有极限，则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

由此可见,并不是所有数列都有极限.求数列极限时,对于一些简单的情形,可以通过观察得到数列的极限,如例1中的(1)、(2);有些稍为复杂的情形,可以先对数列的通项进行恒等变形加以简化,然后再观察它的极限.

例2 设有数列 $x_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$(其中 q 是常数,满足 $|q| < 1$),求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 我们知道 $x_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$,由于 $|q| < 1$,根据指数函数的性质可知,当 n 无限增大时,q^{n+1} 无限趋近于零,所以 $\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ 无限趋近于 $\dfrac{1}{1 - q}$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{1 - q}$.

二、函数的极限

对于函数的极限,根据自变量变化的过程,分两种情形讨论.

1. 当 $x \to \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

对于函数来说,$x \to \infty$ 可包含以下两种情况:

(1) x 取正值,无限增大,记作 $x \to +\infty$

(2) x 取负值,它的绝对值无限增大,记作 $x \to -\infty$

反过来,如果 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 两种情况都存在,则可以合并写成 $x \to \infty$.

讨论函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势(如图1.3).由图可知,当 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$(即 x 的绝对值无限增大)时,$y = \dfrac{1}{x}$ 的图像越来越和 x 轴靠近,即 $\dfrac{1}{x}$ 的值越来越趋近于零.

和数列极限类似,我们给出函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限定义.

定义2 如果当 $|x|$ 无限增大($x \to \infty$)时,函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A,那么常数 A 就叫做当 $x \to \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限.记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A,\ 或者\ f(x) \to A\ (x \to \infty).$$

按照此极限定义,上例即可表示为:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

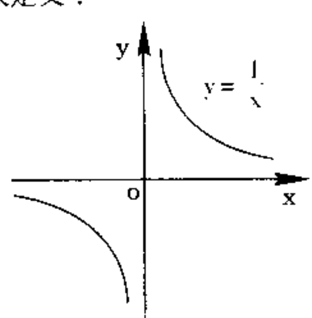


图1.3

类似地,如果当 $x \to +\infty$(或 $x \to -\infty$)时,函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个常数 A,那么数 A 就叫做当 $x \to +\infty$(或 $x \to -\infty$)时函数 $f(x)$ 的极限,记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A\ (或\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = A).$$

定理1 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

例3 作出函数 $y = (\dfrac{1}{2})^x$ 和 $y = 2^x$ 的图像,并判断下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{1}{2})^x$; (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com