文科类

研究生入学数学试题解

李茂男　秦明谦　编著

北京科学技术出版社

研究生入学数学试题解

（文　科　类）

北京科学技术出版社

内 容 简 介

本书收集了近几年(包括1985年)部分文科院校硕士研究生入学考试数学试题，所有试题均给予详细题解。本书内容分为高等数学、线性代数、概率三部分，每一部分试题均按教材内容顺序编排，使用方便。

本书除可供报考硕士研究生的考生复习参考外，还可供文科院校同学以及数学教师参考。

研究生入学数学试题解

（文科类）

李茂男　秦明谦　编

北京科学技术出版社出版

（北京西直门外南路19号）

北京市新华书店发行　各地新华书店经售

北京通县马驹桥　印刷厂印刷

850×1168毫米　32开本7.375印张189,000字

1986年6月第一版　1986年6月第一次印刷

印数1—7,500册

统一书号17274·029　定价1.80元

前　　言

我们在辅导报考研究生考生的过程中，曾将近年的部分文科类高等院校和科研单位招考研究生的数学试题，编写成“研究生入学考试部分数学试题汇解”在内部使用。该资料受到考生的欢迎，并收到了较好的效果。

本书是在原资料基础上，增补了1985年招考研究生的部分数学试题及题解一并出版，供报考文科专业研究生的读者及文科类高校师生参考。

为了便于读者使用，我们把考题按课程内容的顺序分类排列，对1984和1985年的试题，在每个题解的后面注明了招考单位和得分。

由于条件限制，材料来源很不全面，若有不足之处，诚恳地欢迎读者批评指正。

本书在编写过程中，得到清华大学李克祥教授的关心和指导，在此谨致以诚挚的谢意。

编　　者

一九八五年五月

目　　录

一、极　限

§1.1　函数和函数的连续性

1. 求函数 $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$ 的定义域。

解　当 $\begin{cases}\left|\lg\frac{x}{10}\right|\leqslant 1\\ x>0\end{cases}$ 时，函数才有意义，解不等式组

$$\begin{cases}-1\leqslant\lg\frac{x}{10}\leqslant 1\\ x>0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}10^{-1}\leqslant 10^{\lg\frac{x}{10}}\leqslant 10\\ x>0\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}10^{-1}\leqslant\frac{x}{10}\leqslant 10\\ x>0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 100\\ x>0\end{cases}$$

故函数定义域为〔1，100〕。

2. 求 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}+\lg(25-x^2)$ 的定义域。

解　当 $\begin{cases}\cos x>0\\ 25-x^2>0\end{cases}$ 时，函数才有意义。

解不等式组 $\begin{cases}2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ -5<x<5\end{cases}$ （k为整数）

$k=0$时　不等式组解为$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$；

$k=1$时　不等式组解为$\left(\frac{3}{2}\pi,\ 5\right)$;

$k=-1$时，　不等式组解为$\left(-5,\ -\frac{3}{2}\pi\right)$.

故函数定义域为:

$$\left(-5,\ -\frac{3}{2}\pi\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2}\pi, 5\right).$$

3. 求$z=\arcsin(x-y^2)+\ln[\ln(10-x^2-4y^2)]$的定义域.

解　由$\begin{cases}|x-y^2|\leqslant 1\\ \ln(10-x^2-4y^2)>0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}-1\leqslant x-y^2\leqslant 1\\ 10-x^2-4y^2>1\end{cases}\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow\begin{cases}-1\leqslant x-y^2\leqslant 1\\ x^2+4y^2<9\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}y^2-1\leqslant x\leqslant y^2+1\\ \dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}<1\end{cases}$$

定义域为椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{4y^2}{9}=1$和抛物线$x=y^2+1$及$x=y^2-1$所围成的区域。

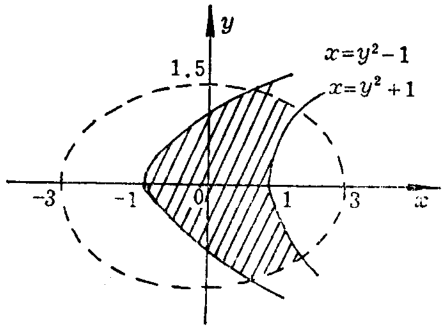

图　1-1

4. 求　$z=\lg(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$的定义域.

解　$\lg(y-x)$的定义域为$y>x$；

$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$的定义域为$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2+y^2<1 \end{cases}$

所以函数的定义域为

$$\begin{cases} y>x \\ x\geqslant 0 \\ x^2+y^2<1. \end{cases}$$

5．求 $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$的定义域。

解　$\arcsin\dfrac{x}{y^2}$的定义域为$\left|\dfrac{x}{y^2}\right|\leqslant 1$；

$\arcsin(1-y)$的定义域为$|1-y|\leqslant 1$，

故该函数定义域为$\begin{cases} -y^2\leqslant x\leqslant y^2 \\ 0\leqslant y\leqslant 2 \end{cases}$.

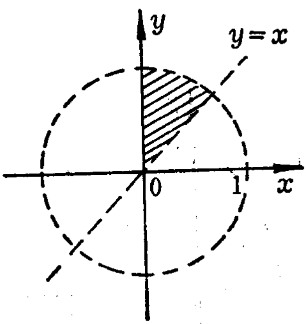

图　1-2

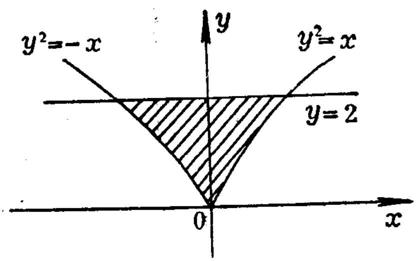

图　1-3

6．求$y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$

$$=\begin{cases} 1+x^2 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1-x^2 & x<0 \end{cases}$$ 的反函数并作图。

注：sgn$x$称为符号函数。

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

解 $x=\begin{cases}\sqrt{y-1} & y>1\\ 0 & y=0\\ -\sqrt{-1-y} & y<-1\end{cases}$，所求反函数为

$$y=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x>1\\ 0 & x=0\\ -\sqrt{-(1+x)} & x<-1\end{cases}$$

7. 求 $f(x)=-\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$ （$0<x\leqslant 5$）的反函数并作图。

解 解出 $x=\frac{5}{3}\sqrt{9-y^2}$，

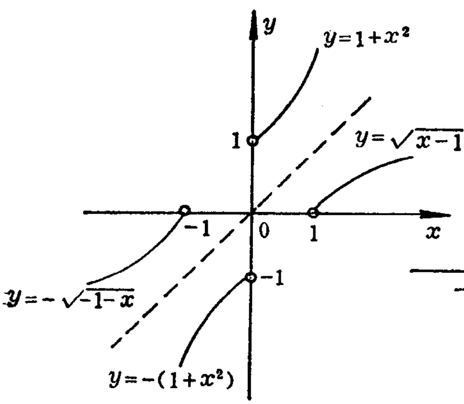

图 1-4

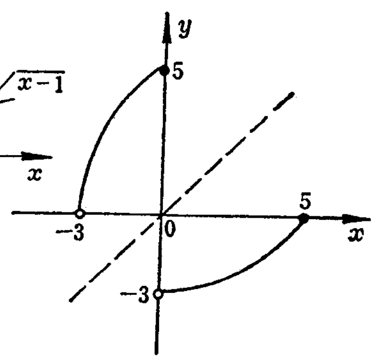

图 1-5

所求反函数 $f^{-1}(x)=\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$ （$-3<x\leqslant 0$），

因$0<x\leqslant 5$，故 $f(x)=-\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$的图象为椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$在第四象限的部分曲线.其反函数$f^{-1}(x)$为椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$在第二象限的部分曲线.

8. 设$F(x)=\int_0^a f(x+y)dy(a>0)f(u)$为处处有定义且单调增加的连续函数，试讨论$F(x)$的增减性.

解 任取$x_2>x_1$，由设知$f(x_2+y)>f(x_1+y)$，

即 $f(x_2+y)-f(x_1+y)>0$，

故有 $\int_0^a[f(x_2+y)-f(x_1+y)]dy>0$.

因 $F(x_2)=\int_0^a f(x_2+y)dy$，

$F(x_1)=\int_0^a f(x_1+y)dy$.

于是 $F(x_2)-F(x_1)$

$=\int_0^a f(x_2+y)dy-\int_0^a f(x_1+y)dy$

$=\int_0^a[f(x_2+y)-f(x_1+y)]dy>0$

即 $F(x_2)>F(x_1)$，所以$F(x)$为单调增函数，

9. 已知$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$，$x>0$，求$f(x)$.

解 令$\frac{1}{x}=t$，则$x=\frac{1}{t}$，

$\because\ x>0$，$\therefore\ t>0$.

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{t}+\frac{1}{t}\sqrt{1+t^2}，$$

故 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}$ 为所求函数.

10. 已知 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

解 令 $\sin\frac{x}{2}=t$

因为 $1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\cos x$,

所以 $\cos x+1=2-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=2-2t^2$,

故 $f(t)=2-2t^2$,

所求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2-2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=1-\cos x$。

11. 已知 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$, $|a|\neq|b|$,

求证 $f(-x)=-f(x)$。

证明 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$ ①

令 $\frac{1}{x}=t$ 得 $af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$

即 $af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$ ②

由①$\times a-$②$\times b$

得 $a^2f(x)-b^2f(x)=\frac{ac}{x}-bcx$

$$=\frac{ac-bcx^2}{x},$$

因 $|a|\neq|b|$ 得 $f(x)=\frac{ac-bcx^2}{(a^2-b^2)x}$

$$f(-x)=-\frac{ac-bcx^2}{(a^2-b^2)x}.$$

故 $f(-x)=-f(x)$.

12. 已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$。

解 令$x+\frac{1}{x}=t$

得 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=t^2$

即 $x^2+2+\frac{1}{x^2}=t^2$

所以 $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

于是 $f(t)=t^2-2$

即 $f(x)=x^2-2$。

13．已知 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$且$y=1$时$z=x$，求$f(x)$和$z$的分析表达式。

解 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$ ①

将$y=1$，$z=x$代入①得$x=1+f(\sqrt[3]{x}-1)$

即 $f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$ ②

故z的分析表达式为$z=\sqrt{y}+x-1$。

再由②求$f(x)$ 令$\sqrt[3]{x}-1=t$即$x=(t+1)^3$

代入②得 $f(t)=(t+1)^3-1$

$=t^3+3t^2+3t$，

于是 $f(x)=x^3+3x^2+3x$。

14．已知$\varphi(x)=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$，求证$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$。

证明 左边$=\varphi(x)+\varphi(y)$

$$=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\lg\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$$

$$=\lg\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}$$

$$=\lg\frac{1-x-y+xy}{1+x+y+xy},$$

$$右边=\varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

$$=\lg\left(\frac{1-\frac{x+y}{1+xy}}{1+\frac{x+y}{1+xy}}\right)$$

$$=\lg\left(\frac{1-x-y+xy}{1+x+y+xy}\right),$$

故左边＝右边。

15．已知 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求$f\{f[f(x)]\}$。

解 $f(x)=\frac{1}{1-x}$

则 $$f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=-\frac{1-x}{x},$$

于是 $$f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{1-f[f(x)]}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1-x}{x}}=x,$$

故 $$f\{f[f(x)]\}=x。$$

16．设 $f(x、y)=x^3-2xy+3y^2$，求① $f\left(\frac{1}{x},\ \frac{2}{y}\right)$，

② $f\left(\frac{x}{y},\sqrt{xy}\right)$。

解 ① $f\left(\frac{1}{x},\ \frac{2}{y}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^3-2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{y}+3\left(\frac{2}{y}\right)^2$

$$=\left(\frac{1}{x}\right)^3-\frac{4}{xy}+\frac{12}{y^2};$$

②$f\left(\frac{x}{y},\ \sqrt{xy}\right)$

$$=\left(\frac{x}{y}\right)^3-2\left(\frac{x}{y}\right)(\sqrt{xy})+3(xy)^2$$

$$=\left(\frac{x}{y}\right)^3-2x\sqrt{\frac{x}{y}}+3xy.$$

17. 若$f(x+1)=x^2+\cos x$，求$f(x-2)$，$f(2x)$。

解 令$x+1=t$，则$x=t-1$，

于是 $f(x+1)=f(t)$

$$=(t-1)^2+\cos(t-1),$$

故 $f(x-2)=(x-2-1)^2+\cos(x-2-1)$

$$=(x-3)^2+\cos(x-3).$$

$$f(2x)=(2x-1)^2+\cos(2x-1).$$

（6分、1984年、北京经济学院）

18. 求函数$f(x)=\arcsin\frac{2x-1}{5}+\sqrt{x^2-x-2}$的定义域。

解

当 $\begin{cases}\left|\frac{2x-1}{5}\right|\leqslant 1\\ x^2-x-2\geqslant 0\end{cases}$ 时，函数才有意义，

解得 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 3\\ x\leqslant -1\text{或}x\geqslant 2\end{cases}$，

故定义域为$[-2,\ -1]\cup[2,\ 3]$。

（4分、1985年、北京经济学院）

19. 若$f(x)=\begin{cases}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2} & x\neq 0,\\ A & x=0\end{cases}$ 求$A=?$

使$f(x)$在$x=0$处连续。

解 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x+3\sin 3x}{2x}$$

$$=-2+\lim_{x\to 0}\frac{9}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}$$

$$=-2+\frac{9}{2}$$

$$=\frac{5}{2},$$

因$f(0)=A$，要使$f(x)$在$x=0$处连续，必须

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=A,$$

故 $\quad A=\dfrac{5}{2}$。

20. 讨论 $F(x)=\begin{cases}x^2 & -\infty<x\leqslant 1\\ 2^{\frac{1}{1-x}}+1 & 1<x<+\infty\end{cases}$ 的连续性。

解 $\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(2^{\frac{1}{1-x}}+1)=1$

$F(1)=1^2=1$， $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 1}F(x)=F(1)=1$。

故函数在$x=1$处连续，显然，$x\neq 1$时函数连续，故函数在$(-\infty,+\infty)$连续。

21. 已知$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(x-5) & -4\leqslant x<-1\\ |x| & -1\leqslant x\leqslant 2\\ x^2-4x+6 & 2<x<3.5\end{cases}$，求

（1）$f(x)$的定义域，（2）作图，（3）$f(x)$是否处处连续，（4）$x=0$时$f(x)$是否可导。

解 （1）定义域为$[-4, 3.5)$

（2）如图。

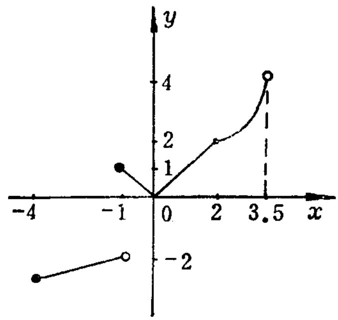

图 1-6

（3）$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{1}{3}(x-5) = -2$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} |x| = 1$。

故$x=-1$为$f(x)$的间断点，因此，$f(x)$不是处处连续。

（4）$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$

有$f'(+0) \neq f'(-0)$，所以$f(x)$在$x=0$处不可导。

22. A、B为何值时，

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A(1-\cos x)}{x^2} & x<0 \\ 4 & x=0, \\ \frac{B\sin x + \int_0^x \cos t^2 dt}{x} & x>0 \end{cases}$$ 在$x=0$处连续。

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{A(1-\cos x)}{x^2}$

$$= A\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{2x}$$

$$= \frac{A}{2};$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{B\sin x + \int_0^x \cos t^2 dt}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}(B\cos x + \cos x^2)$$

$$= B + 1,$$

要使$f(x)$在$x=0$处连续，必须使

$$f(+0) = f(-0) = f(0) = 4$$

即 $\frac{A}{2} = 4$

$B + 1 = 4$ 故$A = 8$，$B = 3$。

23\. 设$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & -1<x<0 \end{cases}$，讨论$x=0$时，$f(x)$的连续性。

解 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x}$$

$$= 1。$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= 1。$$