郭大钧　孙经先　刘兆理　著

非线性常微分方程泛函方法

FEIXIANXINGCHANGWEIFENFANGCHENGFANHANSHUFANGFA

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

EIXIANXING CHANGWEIFENFANGCHENG FANHAN FANGFA

非线性常微分方程泛函方法

郭大钧　孙经先　刘兆理　著

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

非线性常微分方程泛函方法/郭大钧，孙经先，刘兆理著. —2版，—济南：山东科学技术出版社，2005.10
ISBN 7-5331-1497-3

Ⅰ.非… Ⅱ.①郭…②孙…③刘… Ⅲ.非线性-常微分方程-泛函分析 Ⅳ.O175.14

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第115537号

非线性常微分方程泛函方法

(第二版)

郭大钧　孙经先　刘兆理　著

出版者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路16号
邮编:250002　电话:(0531)82098088
网址:www.lkj.com.cn
电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn
发行者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路16号
邮编:250002　电话:(0531)82098071
印刷者:济南申汇印务有限责任公司
地址:济南市王官庄12号
邮编:250022　电话:(0531)87966822

开本:850mm×1168mm　1/32
印张:13.25
字数:320千
版次:2005年10月第2版第2次印刷

ISBN 7-5331-1497-3　　O·60
定价:28.00元

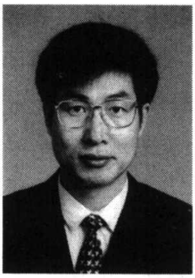
郭 大 钧

1934年生,四川省泸县人。1955年毕业于四川大学数学系。曾任山东大学数学系系主任,《山东大学学报》(自然科学版)主编,《东北数学》编委,《数学进展》编委,美国《抽象和应用分析》编委以及国家自然科学基金委员会第七、八两届学科评审组成员,中国数学会理事,山东省政协委员。并曾以访问教授身份去美国和加拿大访问和工作。现任山东大学数学与系统科学学院教授,加拿大《连续、离散和脉冲系统动力学》编委。1981年国务院批准的首批博士生导师之一,是我国著名数学家,专长非线性泛函分析和非线性积分方程。出版有《非线性泛函分析》等8部专著(其中2部在美国出版,1部在荷兰出版)。先后在我国的《中国科学》、《数学学报》、《数学年刊》,美国的《非线性分析》、《数学分析和应用杂志》等国内外重要学术刊物上发表论文120余篇,有的研究成果被国内外同行誉为《郭氏定理》。曾获山东省科技进步一等奖,国家教委科技进步二等奖,高校优秀教学成果国家级优秀奖等多种奖励,是山东省优秀教师,山东省拔尖人才,1991年起享受政府特殊津贴。

孙 经 先

1948年1月生于北京市,1978年进入山东大学数学系本科学习,第二年考取本系研究生,1981年获理学硕士学位,1984年获博士学位并留校任教,1991年破格晋升教授,1995年被评为博士生导师。曾任《工程数学学报》编委。2002年调徐州师范大学数学系任特聘教授。主要研究领域为非线性泛函分析,巴拿赫空间微分方程和非线性积分方程,主持和参加过多项国家自然科学基金研究课题。自

1983年至今,共发表(出版)学术专著110余篇(部),其中大多数发表于国内外权威学术刊物,如我国的《数学学报》、《数学年刊》,美国的《微分方程杂志》、《非线性分析》等。曾获山东省科技进步一等奖和二等奖,国家教委科技进步二等奖等多种奖励。



刘 兆 理

1963年9月生于山东省即墨市。1984年毕业于山东大学数学系,1987年在山东大学数学系获理学硕士学位并留校任教,1992年在职获理学博士学位。2000年晋升为教授,2002年被评为博士生导师。曾以洪堡学者身份去德国访问和工作和以访问教授身份去美国访问和工作。现任《应用泛函分析学报》编委。2004年调首都师范大学数学系任特聘教授。主要从事非线性泛函分析和非线性微分方程的研究,已在我国的《中国科学》、《数学学报》,美国的《泛函分析杂志》、《微分方程杂志》等国内外重要学术刊物上发表论文40余篇。曾获山东省科技进步一等奖和二等奖以及山东大学科技进步一等奖。

第二版序

第二版基本上是第一版的重印，只对个别地方进行了修订。第二版的出版得到山东科技出版社的大力支持，特致谢意。陈燕来博士对第二版书稿清样进行了认真仔细的校阅，在此也表示感谢。

郭大钧

2005年8月20日

于山东大学南院

前 言

常微分方程是数学中一个古老而重要的分支，它在自然科学和工程技术中有着广泛的应用。近年来，我和我的学生孙经先、黄春朝、杜一宏、周德堂、王乃静、刘兆理、韩志清等诸位博士在利用非线性泛函分析来研究常微分方程的解方面做了大量工作，获得了许多研究成果，这些成果是单纯用数学分析办法无法得到的，从而具有特色。例如，利用拓扑度理论、半序方法以及临界点理论来获得常微分方程多个解的存在性以及对各解存在区域的估计；在方程右端不具连续性情况下以及在方程具有反向的上解和下解情况下，讨论常微分方程解的存在性问题；利用不动点理论及单调迭代法来研究脉冲常微分方程最大解和最小解的存在性及迭代求解法；利用迭合度理论求解二阶常微分方程两点边值问题，等等。现根据国外一些数学家在这方面所获得的结果，加上我们自己做的工作，写成这本书。本书可作为综合性大学、高等师范院校和工科院校有关专业的研究生教材，也可供有关教师和科技工作者进行科研时参考。

本书在写作过程中，得到国家自然科学基金和国家教委博士点专项科研基金的资助，特致谢意。

限于作者水平，书中不妥、错误之处在所难免，敬请读者指正。

郭大钧

1994 年 8 月于山东大学南院

目 录

目　录

第一章　上下解方法

1.1　上下解方法的理论基础

本节将给出与上下解方法有关的基本概念和结论.

定义 1.1.1　设 E 是 Banach 空间, P 是 E 中的非空闭集. 如果 P 满足

(i) 任给 $x, y \in P$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, 有 $\alpha x + \beta y \in P$;

(ii) 若 $x \in P$, $x \neq \theta$, 则 $-x \overline{\in} P$,

则称 P 是 E 中的锥.

由上述定义易知 P 一定是闭凸集, 并且若 $x \in P$, $-x \in P$, 则 $x = \theta$.

设给定 E 中的锥 P. 对 $x \in E$, $y \in E$, 如果 $y - x \in P$, 则记 $x \leqslant y$. 容易验证, 按这种方法定义的“$\leqslant$”具有下列性质:

(i) $x \leqslant x$;

(ii) 若 $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, 则 $x \leqslant z$;

(iii) 若 $x \leqslant y$, $y \leqslant x$, 则 $x = y$.

因此, 按这种方式引入的“$\leqslant$”定义了 E 中的一个半序. 在本书中, 如不特别声明, 我们总假定 Banach 空间 E 中的半序是由 E 中的给定锥 P 导入的, 并称按这种方法定义了半序的空间是半序 Banach 空间.

引理 1.1.1　设 E 是半序 Banach 空间, $x_n \leqslant y_n$ ($n = 1, 2,$

3, …)则有

(ⅰ) 若 $x_n\to x^*$, $y_n\to y^*$, 则 $x^*\leqslant y^*$;

(ⅱ) 若 $x_n\xrightarrow{弱}x^*$, $y_n\xrightarrow{弱}y^*$, 则 $x^*\leqslant y^*$.

证　先证(ⅰ). 由 $x_n\leqslant y_n$ 知 $y_n-x_n\in P$, 由 $x_n\to x^*$, $y_n\to y^*$ 知 $y_n-x_n\to y^*-x^*$. 注意到 P 是闭集, 故必有 $y^*-x^*\in P$, 即 $x^*\leqslant y^*$.

再证(ⅱ). 仿上段证明可知, $y_n-x_n\in P$, $y_n-x_n\xrightarrow{弱}y^*-x^*$. 由于 P 是凸闭集, 故 P 是弱序列闭的(参见关肇直、张恭庆、冯德兴[1]P187), 从而 $y^*-x^*\in P$, 即 $x^*\leqslant y^*$. □

设 $\{x_n\}$ 是半序 Banach 空间中的序列, 如果 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots,$$

则称 $\{x_n\}$ 是单调增序列; 如果

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant\cdots,$$

则称 $\{x_n\}$ 是单调减序列, 单调增序列和单调减序列都称是单调序列.

设 M 是 Banach 空间 E 中的子集, 如果 M 中的任一序列 $\{x_n\}$ 都有子列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于某 $x^*\in E$, 这里不要求 $x^*\in M$, 则称 M 是 E 中的相对列紧集.

引理 1.1.2　设 $\{x_n\}$ 是单调序列, 又是相对紧集, 则 $\{x_n\}$ 是收敛序列, 更进一步, 若 $\{x_n\}$ 是单调增序列, 则有 $x_n\leqslant x^*$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 其中 x^* 是 $\{x_n\}$ 的极限; 若 $\{x_n\}$ 是减序列, 则 $x^*\leqslant x_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

证　设 $\{x_n\}$ 是单调增序列, 因为 $\{x_n\}$ 是相对列紧集, 故 $\{x_n\}$ 必有一子列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于某 x^*, 设 $\{x_n\}$ 不是收敛序列, 则

必存在$\{x_n\}$的另一个子列$\{x_{n_j}\}$收敛于某$y^* \neq x^*$. 对任给固定的n_{i_0},当n_j充分大时有

$$x_{n_{i_0}} \leqslant x_{n_j}$$

从而根据引理1.1.1(ⅰ),有$x_{n_{i_0}} \leqslant y^*$;从而对一切$n_i$,都有$x_{n_i} \leqslant y^*$. 再利用引理1.1.1(ⅰ)可得$x^* \leqslant y^*$. 用完全同样的方法还可证明$y^* \leqslant x^*$,从而必有$x^* = y^*$,产生矛盾. 从而$\{x_n\}$是收敛序列. 对任给固定的$n_0$,当$n \geqslant n_0$时$x_{n_0} \leqslant x_n$,利用引理1.1.1(ⅰ)可知$x_{n_0} \leqslant x^*$,从而对一切$n$,都有$x_n \leqslant x^*$. 若$\{x_n\}$是单调减序列,证明类似. □

设M是Banach空间E中的子集,如果M中的任一序列$\{x_n\}$都有子列$\{x_{n_i}\}$弱收敛于某$x^* \in E$,这里不要求$x^* \in M$,则称M是E中的相对弱列紧集,用与引理1.1.2完全类似的方法,可以证明:

引理1.1.3 设$\{x_n\}$是单调序列,又是相对弱列紧集,则$\{x_n\}$是弱收敛序列. 更进一步,若$\{x_n\}$是单调增序列,则有$x_n \leqslant x^*$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$,其中x^*是$\{x_n\}$的弱收敛极限;若$\{x_n\}$是减序列,则$x_n \geqslant x^*$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

定义1.1.2 设P是E中的锥. 若存在常数$N > 0$,使当$\theta \leqslant x \leqslant y$时必有$\|x\| \leqslant N\|y\|$,则称$P$是正规锥,其中$N$称为$P$的正规常数.

设$y \in E$, $z \in E$, $y \leqslant z$,则集合$[y, z] = \{x \in E \mid y \leqslant x \leqslant z\}$称为是$E$中的一个序区间.

引理1.1.4 设P是E中的正规锥,则E中的任何一个序区间都是有界的.

证 任给E中的序区间$[y, z]$,当$x \in [y, z]$时有$y \leqslant x \leqslant$

z，即 $\theta \leqslant x-y \leqslant z-y$，故 $\|x-y\| \leqslant N\|z-y\|$，从而

$$\|x\| \leqslant \|x-y\|+\|y\| \leqslant N\|z-y\|+\|y\|=\text{const},$$

故$[y,z]$有界. □

注 1.1.1　可以证明，P 是正规锥的充分必要条件是：E 中的任何一个序区间都是有界的. 关于这一点，可以参见郭大钧[9].

引理 1.1.5　设 P 是正规锥，$\{x_n\}$是单调序列. 设$\{x_n\}$有一个子列$\{x_{n_i}\}$收敛于某 x^*，则$\{x_n\}$本身必收敛于 x^*，并且，若$\{x_n\}$是单调增序列，则有 $x_n \leqslant x^*$ $(n=1,2,3,\cdots)$；若$\{x_n\}$是单调减序列，则有 $x^* \leqslant x_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

证　设$\{x_n\}$是单调增序列，则$\{x_{n_i}\}$也是单调增序列，并且由引理 1.1.1(ⅰ)易知

$$x_n \leqslant x^*, \quad n=1,2,3,\cdots.$$

任给 $\varepsilon>0$，则必存在 i_0，使得$\left\|x_{n_{i_0}}-x^*\right\|<\dfrac{\varepsilon}{N}$，其中 N 是P 的正规常数. 于是，当 $n \geqslant n_{i_0}$时有 $x_{n_{i_0}} \leqslant x_n \leqslant x^*$，从而 $\theta \leqslant x^*-x_n \leqslant x^*-x_{n_{i_0}}$. 这表明

$$\|x^*-x_n\| \leqslant N\left\|x^*-x_{n_{i_0}}\right\|<N \cdot \frac{\varepsilon}{N}=\varepsilon, \quad \forall\, n \geqslant n_{i_0}.$$

因此，注意到 ε 的任意性可知 $x_n \to x^*$. □

正规锥的一个重要性质是下列定理.

定理 1.1.1　设 E 是 Banach 空间，P 是正规锥，M 是E 中的全序集(即任给 $x \in M$，$y \in M$，$x \leqslant y$ 和 $y \leqslant x$ 必有一个成立)，则 M 是相对列紧集的充分必要条件是：M 是相对弱列紧集.

证　必要性显然，下证充分性，任给 M 中的一个序列 $N=$

$\{x_n\}$，分两种情况，第一种情况：存在无穷个 $x^{(m)} \in N(m=1,2,3,\cdots)$，使 $x^{(1)}=\min N$（$\min N$ 表示 N 的最小元素，即若存在 $y \in N$，使 $y \leqslant x$，$\forall x \in N$，则称 $y=\min N$），并且对每个 $m \geqslant 2$，都有

$$x^{(m)}=\min\{N \setminus \{x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m-1)}\}\}$$

此时显然有

$$x^{(1)} \leqslant x^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x^{(m)} \leqslant \cdots \tag{1.1.1}$$

因为 M 是相对弱列紧集，故 $\{x^{(m)}\}$ 必有一子列弱收敛到某 $x^* \in E$，由引理 1.1.3 知 $\{x^{(m)}\}$ 本身弱收敛到 x^*，并且

$$x^{(m)} \leqslant x^*, \quad m=1,2,3,\cdots. \tag{1.1.2}$$

下证 $\{x^{(m)}\}$ 必有子列依范数收敛到 x^*，若不然，则必有常数 $r>0$，使对一切 m，都有

$$\|x^*-x^{(m)}\| \geqslant r \tag{1.1.3}$$

对每个 m，令 $M_m=\{x \in E \mid x \leqslant x^{(m)}\}$，$M=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} M_m$，任给 $x \in M$，$y \in M$，则存在 m_1 和 m_2，使 $x \in M_{m_1}$，$y \in M_{m_2}$，不失一般设 $m_1 \leqslant m_2$，则由 M_m 定义知 $M_{m_1} \subset M_{m_2}$，故 $x \in M_{m_2}$. 由 P 是凸集知 M_{m_2} 是凸集，从而对任给 $0 \leqslant t \leqslant 1$，有 $tx+(1-t)y \in M_{m_2} \subset M$. 这表明 M 是一个凸集，故 $\overline{M}$ 是 E 中的凸闭集，从而是弱序列闭的（参见关肇直、张恭庆、冯德兴[1]P187），于是由 $x^{(m)} \xrightarrow{\text{弱}} x^*$ 知 $x^* \in \overline{M}$. 但另一方面，对任给固定的 m，当 $x \in M_m$ 时有 $x \leqslant x^{(m)}$. 所以由(1.1.2)式知有 $x \leqslant x^{(m)} \leqslant x^*$，即 $\theta \leqslant x^*-x^{(m)} \leqslant x^*-x$. 因为 P 是正规的，故 $\|x^*-x^{(m)}\| \leqslant N\|x^*-x\|$，其中 N 是 P 的正规常数. 所以，利用(1.1.3)式可得

$$\|x^*-x\| \geqslant \frac{1}{N}\|x^*-x^{(m)}\| \geqslant \frac{r}{N}, \quad \forall x \in M_m.$$

这表明 $d(x^*, M_m) \geqslant \frac{r}{N}$，其中 $d(\cdot, \cdot)$ 表点集间的距离，由于 m 是任给的，故 $d(x^*, M) \geqslant \frac{r}{N}$，从而有 $d(x^*, \overline{M}) \geqslant \frac{r}{N}$. 此与 $x^* \in \overline{M}$ 矛盾. 这一矛盾表明 $\{x^{(m)}\}$ 必有子列依范数收敛于 x^*.

第二种情况：不存在 $x \in N$，使 $x = \min N$，或者仅存在有限个 $\tilde{x}^{(m)} \in N$ $(1 \leqslant m \leqslant m_0)$，使得 $\tilde{x}^{(1)} = \min N$，并且对每个 $2 \leqslant m \leqslant m_0$，有 $\tilde{x}^{(m)} = \min\{N \setminus \{\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \cdots, \tilde{x}^{(m-1)}\}\}$，但对任给 $x \in N_1 = N \setminus \{\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \cdots, \tilde{x}^{(m_0)}\}$，$x$ 都不是 N 的最小元素. 此时显然可以取出无穷多个 $x^{(m)} \in N_1 (m = 1, 2, 3, \cdots)$，使得

$$\cdots \leqslant x^{(m)} \leqslant \cdots \leqslant x^{(3)} \leqslant x^{(2)} \leqslant x^{(1)}$$

此时仿第一种情况的证明，可知必存在 $x^* \in E$，使 $\{x^{(m)}\}$ 的某一子列依范数收敛于 x^*.

总之，在上面两种情况下，M 中的任一序列都必有子列收敛，从而 M 相对列紧. □

利用定理 1.1.1，立即可以推出

系 1.1.1　设 E 是自反空间，P 是正规锥，M 是 E 中的全序集，则 M 相对列紧的充分必要条件是：M 是有界集.

证　我们仅需证充分性，因为 E 是自反空间，故根据著名的 Eberlein-Shmulyan 定理（见吉田耕作[1]P120），当 M 是有界集时，M 是一个相对弱列紧集，从而根据定理 1.1.1，M 相对列紧.

注 1.1.2　可以证明，当 E 是弱序列完备空间（这是比自反空间更广泛的一类空间）时，系 1.1.1 的结论仍成立，关于这

一点,可以参见孙经先[4].

系 1.1.2 设 E 是 Banach 空间,P 是 E 中的正规锥,$\{x_n\}$是E 中的单调序列,则下列两个结论是等价的:

(i) $x_n \to x^*$;

(ii) $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x^*$.

定义 1.1.3 设 E、F 是半序 Banach 空间,$D \subset E$,$A: D \to F$ 是一个算子.若 $x \in D$,$y \in D$,$x \leqslant y$ 蕴含着 $Ax \leqslant Ay$,则称 A 是一个增算子.

定义 1.1.4 设 E 是半序 Banach 空间,$D \subset E$,$A: D \to E$ 是一个算子.如果 $x_0 \in D$ 满足 $x_0 \leqslant Ax_0$,则称 x_0 是算子方程 $x = Ax$ 的一个下解,简称 x_0 是 A 的下解;如果 $y_0 \in D$ 满足 $Ay_0 \leqslant y_0$,则称 y_0 是算子方程 $x = Ax$ 的一个上解,简称 y_0 是 A 的上解.

设 E 和 F 都是 Banach 空间,$D \subseteq E$,$A: D \to F$,若 $x_n \in D$,$x_0 \in D$,$x_n \to x_0$ 蕴含着 $Ax_n \to Ax_0$,则称 A 是连续算子.若 $x_n \in D$,$x_0 \in D$,$x_n \to x_0$ 蕴含着 $Ax_n \xrightarrow{\text{弱}} Ax_0$,则称 A 是次连续算子.

定理 1.1.2 设 E 是半序 Banach 空间,$x_0, y_0 \in E$, $x_0 \leqslant y_0$,$D = [x_0, y_0]$,$A: D \to E$ 是一个算子,设下列条件满足:

(i) A 是增算子;

(ii) x_0 是 A 的下解,y_0 是 A 的上解;

(iii) A 是连续算子;

(iv) $A(D)$是 E 中的相对列紧集,

则 A 在 D 中必有最小不动点 x^* 和最大不动点 y^*(即 x^* 和 y^* 都是 A 的不动点,并且若 $z^* \in D$ 也是 A 的不动点,则必有

$x^* \leqslant z^* \leqslant y^*$);并且若分别以 x_0 和 y_0 为初始元素,作迭代序列:

$$x_n = Ax_{n-1}, \quad y_n = Ay_{n-1}, \quad n = 1,2,3,\cdots, \tag{1.1.4}$$

则有

$$x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots \leqslant y_n \leqslant \cdots \leqslant y_2 \leqslant y_1 \leqslant y_0 \tag{1.1.5}$$

$$x_n \to x^*, \quad y_n \to y^*. \tag{1.1.6}$$

证　由条件(ⅰ)、(ⅱ)及(1.1.4)式,并注意到 $x_0 \leqslant y_0$,容易验证(1.1.5)式成立.由(1.1.4)和(1.1.5)两式知 $\{x_n\} \subset A(D)$,从而由条件(ⅲ)知 $\{x_n\}$ 也是相对列紧集.根据引理1.1.2(注意到(1.1.5)式)可知必存在某 $x^* \in E$,使 $x_n \to x^*$.由(1.1.5)式及引理1.1.1知 $x_0 \leqslant x^* \leqslant y_0$ 从而 Ax^* 有定义.在 $x_n = Ax_{n-1}$ 中令 $x_n \to x^*$,则由条件(ⅳ)可知必有 $x^* = Ax^*$.同理可证必存在 $y^* \in D$,使 $y^* = Ay^*$.

下证 x^* 和 y^* 分别是 A 在 $D = [x_0, y_0]$ 中的最小不动点和最大不动点.设 $z^* \in D$,使 $Az^* = z^*$,则由 A 是增算子知 $Ax_0 \leqslant Az^* \leqslant Ay_0$,即 $x_1 \leqslant z^* \leqslant y_1$.再以 A 作用之可得 $x_2 \leqslant z^* \leqslant y_2$,这样一直做下去,可得 $x_n \leqslant z^* \leqslant y_n$,于是利用引理1.1.1可得 $x^* \leqslant z^* \leqslant y^*$,即 x^* 和 y^* 分别是 A 在 D 中的最小不动点和最大不动点. □

下面将证明:若 P 是正规锥,则定理1.1.2中的条件(ⅳ)可以作实质性的减弱.为此先建立下列定理.

定理 1.1.3　设 E 是半序 Banach 空间,其半序由锥 P 导出,$x_0, y_0 \in E$,$x_0 \leqslant y_0$,$D = [x_0, y_0]$,$A: D \to E$ 是一个算子.设存在另一个半序 Banach 空间 E_1(其半序由 E_1 中的锥 P_1 导出)及算子 $B: D \to E_1$,算子 $C: [Bx_0, By_0] \to E$,使得