线性规划与网络优化

蒋绍忠 编

浙江大学出版社

线性规划与网络优化

蒋绍忠 编

浙江大学出版社

(浙)新登字10号

内 容 提 要

本书是为高等工科院校管理工程专业“线性规划”课程编写的教材。也可以用作其他相近专业本科和研究生的教材。

本书内容包括线性规划和网络优化两大部分。除了详细介绍线性规划的基础理论和算法以外，还把网络优化问题作为具有特殊结构的线性规划问题，用单纯形原理和对偶理论来构造网络优化问题的算法，使全书具有统一的理论体系。书中对线性规划有关的经济概念，如影子价格、机会成本、线性规划对偶理论的经济解释等，也作了详细的介绍。

本书每一章都附有习题。书末还附有17个案例，供学生学习如何编制较大规模的线性规划和整数规划模型，以及如何用线性规划软件包求解和分析这些问题。

线性规划与网络优化

蒋绍忠 编

责任编辑 李玲如

浙江大学出版社出版

浙江大学印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本：850×1168 1/32 印张：8.3125 字数：206千字

1992年10月第1版 1992年10月第1次印刷

印数0001—2000册

ISBN 7-308-00975-0/O·118 定价：2 80元

前　言

本书是为管理工程专业本科“线性规划”课程编写的教材，内容包括线性规划和网络优化两大部分。本书也可供其他相近专业的本科、研究生、教师和科技人员参考。

这本教材是作者在浙江大学管理工程系讲授“线性规划”课程所用的讲义基础上，经多年修改形成的。其体系与国内传统的体系有一些不同。对编写本书的指导思想，作者有以下考虑：

一、国内传统的运筹学教材都是在图论的基础上来讲述网络优化问题的。但是，网络优化中的许多问题，如网络最小费用流问题、最大流问题以及最短路径问题等，都可以表示成一些具有特殊结构的线性规划问题。本书的特点之一，就是在第一部分讲述了线性规划单纯形原理、单纯形算法和对偶理论以后，进一步介绍了如何利用各种网络优化问题的特殊结构，用单纯形原理以及对偶理论来构造相应的网络优化问题的算法。国外也有一些同类教材也是采用这一体系的。作者认为这样按排有其明显的好处。将这两部分本质上具有共性的内容放在一起，逻辑上十分合理，教学内容连贯，便于学生理解和掌握，同时也可以节省学时。

二、本书把线性规划最优解的 Kuhn-Tuker 条件放在相当重要的地位来讲述。这不仅是因为Kuhn-Tuker条件是原始和对偶问题最优解的充分必要条件，还因为从Kuhn-Tuker条件来看，单纯形法和对偶单纯形法，只不过是通过不同的途径，来逐步满足Kuhn-Tuker 条件的各种算法中的两种，由此还可以引申出其他算法。同时，Kuhn-Tuker条件在解释网络优化的各种算法中也有重要作用。

三、本书比较重视线性规划的经济背景。线性规划模型和单纯形法反映了以利润最大化或成本最小化作为决策准则时，决策人的决策行为，而原始问题和对偶问题则反映了决策人和决策环境之间对策行为。因此，单纯形原理和对偶理论具有明确的经济意义。本书对线性规划有关的经济概念，如影子价格、机会成本、对偶理论的经济解释等，也作了详细的介绍。有了这些概念，线性规划就不仅仅是一种优化的方法，而成为一种经济分析的手段。

四、学习线性规划，仅仅学会用单纯形表，靠手工计算只有几个变量，几个约束条件的小问题，是没有任何实用意义的。学习这一门课程，应当要求学生学会如何根据问题的实际背景，编制较大规模的线性规划模型，并学习如何运用计算机线性规软件包，来输入、调整和求解这样的模型，并学习利用软件包提供的信息，来分析相应的实际问题。本书后面所提供的17个案例，就是为这一目的按排的。这些案例，有线性规划问题，也有混合整数规划问题。变量个数和约束个数大多数在几十个到一百多个。作者在几年的教学中，都选择案例中的几个，按排了这样的实习。作者认为，这对提高学生的学习积极性和解决实际问题的能力都是大有裨益的。至于线性规划软件包，作者推荐世界上流行很广的LINDO，这种软件包除了容量大，输入简单直观，计算速度快，功能齐全等优点外，还具有较好的人机对话功能，很适合于教学用。

以上几点考虑仅是作者的一孔之见，难免以偏概全。提出这些看法，无非是想把本书编写中的几点意图，向读者作些交代。限于学识，书中的错误和疏漏在所难免，作者诚恳地期待着来自同行专家和读者的批评指教。

作者　1992年6月于浙江大学

目　　录

第1章 线性规划

线性规划是目前应用最广泛的一种系统优化方法。它的理论和方法已十分成熟，可以应用于生产计划、物资调运、资源优化配置、物料配方、任务分配、地区经济规划等问题。由于计算机硬件和软件技术的发展，目前用计算机已可以求解变量个数达 10^5 个，约束个数达 10^3 个的巨大规模的问题，并且计算时间也不太长。据报导，用IBM3033计算机求解一个10 918个变量，4 426个约束的问题只需27.48秒钟，所用的软件是IBM公司开发的MPSX。

线性规划最早是由苏联学者L.V.Kantorovich于1939年提出的，但他的工作当时并未广为人知。在第二次世界大战中，美国的一个空军研究小组SCOOP在研究稀缺资源的优化分配这一类问题时，提出了线性规划问题。并且由G.B.Dantzig于1947提出了求解线性规划问题的单纯形法。单纯形法至今还是求解线性规划问题最有效的方法。由于当时电子计算机已研制成功，较大规模的线性规划问题的计算已成为可能，因此，在50年代初，线性规划的单纯形法受到数学家、经济学家和计算机工作者的重视，得到迅速发展，很快成为一门完整的的学科并得到广泛的应用。1952年，美国国家标准局(NBS)在当时的SEAC电子计算机上首次用计

算机实现单纯形算法。1976年,IBM公司研制成功功能十分强大，且计算效率极高的线性规划软件MPS，后来又发展成更为完善的MPSX。这些软件的研制成功，为线性规划的实际应用提供了强有力的工具。

在本书中，我们将介绍线性规划及单纯形法的基本概念，单纯形算法原理及线性规划在经济分析中的应用。对计算方法和计算机软件应用方面的问题，可参阅有关文献。

§1.1 线性规划问题

根据实际问题的要求，可以建立相应的线性规划问题数学模型。线性规划模型由目标函数和约束条件两部分组成。

例1.1 生产计划问题

某厂拥有A、B、C三种类型的设备，生产四种产品。每件产品在生产中需要占用设备的机时数1.1，每件产品可以获得的利润以及三种设备每周可利用的小时数如表1.1所示：

表1.1

加工时间（小时/件） 产品 / 设备	1	2	3	4	每周设备可利用小时数（小时）
A	1.5	1	2.4	1	2000
B	1	5	1	3.5	8000
C	1.5	3	3.5	1	5000
单位产品利润(元/件)	5.24	7.30	8.34	4.18	

用线性规划制订使总利润最大的产品生产计划。

设变量 x_i 为第i种产品的生产件数($i=1, 2, 3, 4$)，目标函数 z 为相应生产计划可以获得的总利润。在加工时间和利润与产品产量成线性关系的假设下，可以建立如下的线性规划模型：

$$\max \quad z = 5.24x_1 + 7.30x_2 + 8.34x_3 + 4.18x_4$$

$$\text{s.t} \quad \begin{aligned} 1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4 &\leqslant 2000 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 &\leqslant 8000 \\ 1.5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 &\leqslant 5000 \\ x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0,\quad x_4 &\geqslant 0。\end{aligned}$$

求解这个线性规划问题，可以得到最优解为：

$$\begin{aligned} x_1 &= 294.1 && \text{（件）} \\ x_2 &= 1500 && \text{（件）} \\ x_3 &= 0 && \text{（件）} \\ x_4 &= 58.82 && \text{（件）} \\ z &= 12737.06 && \text{（元）} \end{aligned}$$

请注意单位产品利润最高的产品，在最优生产计划中不安排生产。这说明传统的手工安排生产计划的方法，即按单位产品利润大小为优先次序来安排生产计划的方法有很大的局限性。尤其是当产品品种很多，设备类很多的情况下，用手工方法安排生产计划很难获得满意的效果。

例1.2 资金分配问题

某商店有100万元资金准备经营A、B、C三种商品，其中商品A有两种型号A_1和A_2，商品B也有两种型号B_1和B_2。每种商品的利润率如表1.2所示：

表1.2

商　　品	A		B		C
	A_1	A_2	B_1	B_2	
利润率(%)	7.3	10.3	6.4	7.5	4.5

设在经营中有以下限制：

1. A或B的资金各自都不能超过总资金的50%；
2. C的资金不能少于B的资金的25%；
3. A_2的资金不能超过的A的总资金的60%。

设

A_1的资金为x_1万元；A_2的资金为x_2万元；

B_1的资金为x_3万元；B_2的资金为x_4万元；

C的资金为x_5万元。

总利润额为z。

则线性规划模型为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 0.073x_1 + 0.103x_2 + 0.064x_3 + 0.075x_4 + 0.045x_5 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 \\
& x_1 + x_2 \leqslant 50 \\
& x_3 + x_4 \leqslant 50 \\
& x_5 \geqslant 0.25(x_3 + x_4) \\
& x_2 \leqslant 0.6(x_1 + x_2) \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

整理后，成为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 0.073x_1 + 0.103x_2 + 0.064x_3 + 0.075x_4 + 0.045x_5 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 \\
& x_1 + x_2 \leqslant 50
\end{aligned}
$$

$$0.25x_3+0.25x_4-x_5\leqslant 0$$
$$0.6x_1-0.4x_2\qquad\geqslant 0$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0$$

求解以上线性规划问题，可以得到表1.3所示的最优解：

表1.3

	分配资金（万元）	利润（万元）
A_1	20	1.49
A_2	30	3.09
B_1	0	0
B_2	40	3.00
C	10	0.45
总计：	100	8.00

从表 1.3 可知，按以上计划分配资金，可以获得最高的资金利润率为8%。

例1.3 运输问题

设某种物资从两个供应地A_1，A_2运往三个需求地B_1，B_2，B_3，以上各地供应量和需求量以及一对供应—需求地之间单位物资（吨）的运费均如图 1.1 所示：

求满足需求且使总运输费用最小的调运方案。

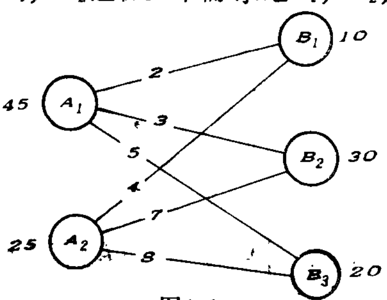

图1.1

设x_{ij}为从供应地 i 运

往需求地 j 的运量(吨)，($i=1$，2；$j=1$，2，3)，z 为总运输费用，则：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z=2x_{11}+3x_{12}+5x_{13}+4x_{21}+7x_{22}+8x_{23} \\
\text{s.t.}\quad & x_{11}+x_{12}+x_{13} \leqslant 45 \cdots\cdots\cdots(1) \\
& x_{21}+x_{22}+x_{23} \leqslant 25 \cdots\cdots\cdots(2) \\
& x_{11}+x_{21} = 10 \cdots\cdots\cdots(3) \\
& x_{12}+x_{22} = 30 \cdots\cdots\cdots(4) \\
& x_{13}+x_{23} = 20 \cdots\cdots\cdots(5)
\end{aligned}
$$

以上约束条件(1)、(2)称为供应地约束；(3)、(4)、(5)称为需求地约束。

运输问题是一类很广泛的实际问题，其目标函数和约束条件都具有与这个例子类似的特殊结构。

这个例子的最优解为：

$$x_{11}=0,\ x_{12}=30,\ x_{13}=15,\ x_{21}=10,\ x_{22}=0,\ x_{23}=5$$

最小运输费用$z=245$元。

从以上三个实例，我们可以归纳出线性规划问题的一般形式：

$$
\begin{aligned}
\max(\min)\quad & z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \leqslant (\text{或}=、\geqslant) b_1 \\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leqslant (\text{或}=、\geqslant) b_2 \\
& \cdots\cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leqslant (\text{或}=、\geqslant) b_m \\
& x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n \geqslant 0
\end{aligned}
$$

令

$$
\mathbf{X}=\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix}
\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}
\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

则以上形式可用矩阵和向量记号表示：

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & z = \mathbf{C}^T\mathbf{X} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{AX} \leqslant (\text{或} =、\geqslant) \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \geqslant \mathbf{0} \end{aligned}$$

§1.2 线性规划问题的规范形式和标准形式

为了今后讨论的方便，我们称以下两种形式的线性规划问题为线性规划的规范形式(Canonical Form)：

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \mathbf{C}^T\mathbf{X} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{AX} \geqslant \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \geqslant \mathbf{0} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max \quad & z = \mathbf{C}^T\mathbf{X} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{AX} \leqslant \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \geqslant \mathbf{0} \end{aligned}$$

而称以下形式为标准形式(Standard Form)：

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \mathbf{C}^T\mathbf{X} \\ \text{s.t} \quad & \mathbf{AX} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \geqslant \mathbf{0} \end{aligned}$$

对于各种非标准形式的问题，我们总可以通过以下的变换，将其转化为标准形式。

1.2.1 目标函数极大化的问题

设目标函数为

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

令 $\quad z' = -z,$

则以上极大化问题与以下极小化问题有相同的最优解：

$$\min \quad z' = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots\cdots - c_nx_n$$

但必须注意，尽管以上两个问题的最优解相同，但它们最优解的目标函数值却相差一个符号，即

$$\max \quad z = -\min \quad z'$$

1.2.2 约束条件不是等式

设约束条件为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_{1n} \leqslant b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

可以引进一个新的变量

$$x_{n+i} = b_1 - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_{1n})$$

显然，x_{n+i} 也具有非负约束，即

$$x_{n+i} \geqslant 0,$$

这时新的约束条件成为：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{r+i} = b_i$$

当约束条件为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i$$

时，类似地令

$$x_{n+i} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_{1n}) - b_i$$

则

$$x_{n+i} \geqslant 0$$

且新的约束条件为：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i$$

新引进的变量x_{n+i}称为第 i 个约束的松弛变量。如果原约束条件中有若干个非等式约束，则将其转化为标准形式时，必须对各个约束引进不同的松弛变量。

例1.4 将以下线性规划转化为标准形式

$$\max \quad z = 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 5 \cdots\cdots\cdots (1) \\ & 4x_1 \qquad + 3x_3 \geqslant 8 \cdots\cdots\cdots (2) \\ & x_1 + \ x_2 + x_3 = 6 \cdots\cdots\cdots (3) \\ & x_1, \quad x_2 \quad x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

将目标函数系数变号，并分别对约束(1)(2)引进松弛变量x_4，x_5，得到以下标准形式的线性规划问题：

$$
\begin{array}{lrl}
\min & z' = -3x_1 + 2x_2 - x_3 & \\
\text{s.t.} & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = 5 \\
 & 4x_1 \qquad 3x_3 \qquad - x_5 & = 8 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 & = 6 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 & \geqslant 0
\end{array}
$$

1.2.3 变量无符号限制

在标准形式中，每一个变 量都有非负约束。当一个变量x_j没有非负限制时，可以令

$$x_j = x_j' - x_j''$$

其中$x_j' \geqslant 0$，$x_j'' \geqslant 0$。即用两个非负变量之差来表示这个变量。

例1.5 将以下线性规划问题转化为标准形式。

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 3 \\
 & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geqslant 5 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
 & x_1,\ x_3 \geqslant 0 \\
 & x_2\text{无符号限制(unrestricted，简记为unr)}
\end{array}
$$

改变目标函数系数的符号，引进松弛变量x_4，x_5，并令

$$x_2 = x_2' - x_2'',$$

则得到以下等价的标准形式：

$$
\begin{array}{lrl}
\min & z' = -2x_1 + 3x_2' + 3x_3'' + x_3 & \\
 & x_1 - x_2' + x_2'' + 2x_3 + x_4 & = 3 \\
 & 2x_1 + 3x_2' - 3x_2'' - x_3 \qquad - x_5 & = 5
\end{array}
$$

$$x_1 + x_2' - x_2'' - x_3 = 4$$
$$x_1, \quad x_2', \quad x_2'', \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \geqslant 0$$

这样，我们就可以将任何非标准形式的线性规划问题转化为等价的标准形式问题。

§1.3 线性规划问题解的几何解释

对于只有两个变量的线性规划问题，可以在二维直角坐标平面上表示线性规划问题。

例1.6
$$\begin{aligned} \max \quad & = x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ & x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

其中满足第一个约束的点

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

位于(x_1，x_2)坐标平面上直线$x_1 + x_2 = 8$的某一侧；

满足第二个约束的点位于同一平面中直线$-x_1 + 2x_2 = 8$的一侧；

而x_1，x_2的非负约束表明这些点位于第I象限内。

这样，以上几个区域的交就给出了满足以上约束条件的可行解的全体，如图1.2所示。我们称满足所有约束的向量$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)^T$为线性规划的可行解。称可行解集合为可行域。以上线性规划问题的可行域如图1.2中阴影部分所示。

目标函数可用图1.2方法图示。