

华罗庚数学学校奥林匹克系列丛书

华罗庚数学学校

试题解析

高一年级

中国人民大学附中 编

中学部



中国大百科全书出版社

华罗庚数学学校奥林匹克系列丛书

华罗庚数学 学校试题解析

中学部·高一年级

中国人民大学附中编

主编：刘彭芝

中国大百科全书出版社

北京·1994

(京)新登字 187 号

编 者:中国人民大学附中

主 编:刘彭芝

责任编辑:简菊玲

封面设计:郭 健

版式设计:翟 铭

出版发行:中国大百科全书出版社

(北京阜成门北大街 17 号 100037)

印 刷:北京四季青印刷厂

经 销:新华书店总店北京发行所

版 次:1993 年 4 月第 1 版

印 次:1994 年 7 月第 2 次印刷

印 张:12.25

开 本:787×1092 1/32

字 数:220 千字

印 数:31001—41000

ISBN 7-5000-5221-9/G·43

定 价:6.95 元

顾	问:	王 元	裘宗沪
		冯克勤	陈德泉
主	编:	刘彭芝	
编	委:	颜华菲	王人伟
		邓 均	王健民
		邵光砚	余培健
		洪永晨	刘淑兰
		张里钊	刘文峰



著名数学家华罗庚教授(1910~1985)

苦战猛攻埋头干，
熟能生出百巧来。
勤能补拙是良训，
一分辛苦一分材。

录华子庚教授
诗一首书赠

华子庚教授

墨梅图充家刻心书

王元
九二七

华罗庚数学学校简介（代前言）

华罗庚数学学校（简称华校）是北京市重点中学人大附中的校中之校。为纪念我国已故著名数学家华罗庚教授而得名，是由中国科技大学、中国科学院华罗庚实验室和中国人民大学附中联合创办的。

华校由小学部、初中部、高中部三个部组成。

小学部属校外培训性质，从小学三年级开始，共四年，每周学习一次，寒暑假进行集中培训。华校每年于十月份招生（以北京市为主，面向全国）三至六年级同时考试。每个年级前50名，编为A班。几年来，华校六年级A班学生几乎百分之百被保送进入人大附中学习。初、高中部每个年级一个华校班，又称实验班。初中部实验班学生毕业后直接升入人大附中高中。

华校采用科学的教学方法，开放式教学，努力开发学生的潜在能力，对学生实行超前教育。华校除由人大附中选派优秀教师任课外，还聘请科学家来校讲学。用最新的科技知识丰富学生的头脑，开阔他们的视野。

每年暑假，华校高中部都聘请中国科技大学、北京大学、清华大学、中国人民大学、北京师范大学等高校教授到校讲授奥林匹克数学、物理、化学等知识。华校以数学为带头学科，同时学习物理、化学、生物、外语、语文、计算机等科目，全面提高学生的科学文化素质。

华校成立几年来，成绩显著，人才辈出，向重点高等院校输送了一批又一批人才，华校三届高中实验班成绩如下：

第一届：学生 40 人全部进入重点大学，其中 9 人被保送，15 人进入清华大学，15 人进入北京大学，2 人进入中国科技大学。

第二届：学生 48 人全部进入重点大学，其中 12 人被保送，15 人进入清华大学，11 人进入北京大学，4 人进入中国科技大学。

第三届学生 48 人，其中 14 人被保送，12 人进入清华大学，15 人进入北京大学，4 人进入中国科技大学。以第三届为例，全班 34 人参加高考，有 13 人总分超过 600 分，全班高考平均分 590.81 分，数学成绩平均分 114.76 分。

同时，华校学生在北京地区、全国和国际大赛中多次获奖。几年来，使人大附中获奖牌数达一千多枚，位居北京市重点中学之首。

华校在努力办学的同时，还致力于全国中小学数学水平的提高，精心编选了这套《华罗庚数学学校试题解析》。本书汇集并精选了该校高中一年级华校班学生平时培训和测试试题，对每个试题均作了简明扼要、通俗易懂的解答和分析。书后附有北京市高中一年级数学竞赛的各届试题，对每个试题均给出了答案及提示。使读者能迅速、准确地掌握高一竞赛数学和课内数学的重点、难点，了解必要的应考常识。本书是高一学生培养学习数学的兴趣、养成自学能力、开发智力的必备读物，是广大高一数学教师开展教学课内课外活动的参考书，是广大家长辅导孩子学习数学的得力助手。

序（一）

华罗庚数学学校是由中国人民大学附中、中国科技大学、中国科学院华罗庚实验室三单位联合创办的。我国著名学者王元教授、龚升教授、黄达教授、冯克勤教授、陈德泉教授都是该校的首届名誉校长。我本人是建立这所学校的积极倡议者。在我主持人大附中工作八年期间，我把华校纳入了人大附中校中之校的超常教育体系。

当今世界，自然科学、社会科学、数学已发展成为三足鼎立的独立的科学体系，而数学更是个门学科发展的基础。从小打好数学基础对于即将进入二十一世纪的新一代人是至关重要的。为中华之振兴而力克数学这道关口，也是当代青少年义不容辞的历史责任。

中国的青少年是聪明的，这一点世所公认，我国参加国际奥林匹克数学竞赛的中学生连获世界团体冠军已向全世界揭示了中国人的聪明和才华。但是任何才华都非从天而降，都是长期辛苦耕耘和努力的结果。所以我们华罗庚数学学校总结了以下4个办学特点。

①从小抓起，从小学三、四年级抓起，要从积极培养少年儿童数学思维能力和兴趣入手。春华秋实，如果你希望看到硕果压枝头的金秋，那么切莫放过风和日丽的春光，勤施水肥，精心培育。华校正是这样做的。

②高水平的启蒙教育。根深才能叶茂，础固而后楼高，名

师启蒙之重要至今尚不为人们所认识。华校积八年之办学经验证实，启蒙老师的水平是至关重要的。打开青少年思维之路非名师莫属。华校出了许多高层次人才，其诀窍就在这里。

③全面发展，业有专精。华校是以数学为其突破口，但是一天也不忽视全面发展这一育人规律。在素质培养上德、智、体全面发展；在学科学习上数学、语文、外语并行不悖。弃全就偏，对青少年成长是致命的。我们着眼于造就下一个世纪各门学科的先锋队、带头人，而不是要培养书呆子，因此全面的素质教育是华校的准则。全面发展并不排斥业有专精。没有特长和个性的学生将来是很难成长的。

④竞争育人。任何人才都是竞争的胜利者，只有通过竞争才能出人才。中华民族面临着严峻的挑战，青少年如果没有强烈的竞争意识，他们就无法把握未来，创造时代。所以华校的学生都必须勇于参加各种级别、各种类型的竞争，胜不骄，败不馁，不以取胜为目的，但以敢于取胜为培养品德的手段。

华校的这四大办学特色，在中学生的各种学科竞赛中造就了一千多名世界级、全国级、北京市级和海淀区级的获奖者，但更为重要的是造就了不少具有新思想、新观念的优秀教师和优秀教育专家。他们的教学经验和手头积累的材料是我们教育界一笔珍贵的财富。

欣闻这些中等教育专家有意出一套系列丛书，同广大中学生、教师、家长分享这笔财富，特为之序，以此就教于海内同仁。

中国人民大学附中 胡俊泽

1992年8月

序（二）

随着世界各国高科技的迅猛发展，随着我国开放、改革的不断深入，摆在我们教育工作者面前的重任是早出人才、快出人才。早在一九八三年邓小平同志就提出，教育要面向现代化、面向世界、面向未来。北京人大附中为落实邓小平同志的“三个面向”的指示，从一九八五年就试办了华罗庚数学学校。经过七年多的教育、教学实践，初步形成了一套体系，摸索出了一套从小学到高中的较超常的教学教材，并配有能力性很强的作业练习。

我们愿意把这套教材奉献给教育界，倾听广大专家和教育同事的批评、指正。

中国人民大学附中 朱迪生

1992年8月

目 录

上篇 训练题及解答

训练题 (一) —— 三角函数 (一)	(1)
训练题 (一) 解答	(3)
训练题 (二) —— 三角函数 (二)	(14)
训练题 (二) 解答	(16)
训练题 (三) —— 三角函数 (三)	(27)
训练题 (三) 解答	(30)
训练题 (四) —— 函数与函数方程 (一)	(41)
训练题 (四) 解答	(44)
训练题 (五) —— 函数与函数方程 (二)	(51)
训练题 (五) 解答	(54)
训练题 (六) —— 函数与函数方程 (三)	(62)
训练题 (六) 解答	(66)
训练题 (七) —— 函数与函数方程 (四)	(74)
训练题 (七) 解答	(78)
训练题 (八) —— 数论 (一)	(86)
训练题 (八) 解答	(88)
训练题 (九) —— 数论 (二)	(99)
训练题 (九) 解答	(102)

训练题 (十) —— 平面几何研究	(112)
训练题 (十) 解答	(115)
训练题 (十一) —— 几何中的代数	(122)
训练题 (十一) 解答	(124)
训练题 (十二) —— 平面几何综合题	(132)
训练题 (十二) 解答	(134)
训练题 (十三) —— 立体几何 (一)	(141)
训练题 (十三) 解答	(143)
训练题 (十四) —— 立体几何 (二)	(151)
训练题 (十四) 解答	(154)
训练题 (十五) —— 立体几何 (三)	(160)
训练题 (十五) 解答	(163)
训练题 (十六) —— 立体几何 (四)	(170)
训练题 (十六) 解答	(173)
训练题 (十七) —— 向量 (一)	(184)
训练题 (十七) 解答	(187)
训练题 (十八) —— 向量 (二)	(194)
训练题 (十八) 解答	(197)
训练题 (十九) —— 格点问题	(203)
训练题 (十九) 解答	(206)
训练题 (二十) —— 集合与数的划分	(215)
训练题 (二十) 解答	(218)
训练题 (二十一) —— 组合杂题	(226)
训练题 (二十一) 解答	(227)

中篇 综合试题及解答

综合试题 (一)	(237)
综合试题 (一) 解答	(240)
综合试题 (二)	(244)
综合试题 (二) 解答	(247)
综合试题 (三)	(258)
综合试题 (三) 解答	(261)
综合试题 (四)	(273)
综合试题 (四) 解答	(276)
综合试题 (五)	(287)
综合试题 (五) 解答	(289)

下篇 竞赛试题及解答

北京市高中一年级学生数学竞赛试题

1981 年试题	(301)
试题解答	(302)
1984 年试题	(307)
试题解答	(309)
1985 年试题	(312)
试题解答	(314)
1986 年试题	(318)
试题解答	(321)
1987 年试题	(322)

试题解答.....	(324)
1988 年试题	(328)
试题解答.....	(330)
1989 年试题	(334)
试题解答.....	(336)
1990 年初试试题	(339)
试题解答.....	(342)
1990 年复试试题	(343)
试题解答.....	(344)
1991 年初试试题	(347)
试题解答.....	(350)
1991 年复试试题	(351)
试题解答.....	(353)
1992 年初试试题	(356)
试题解答.....	(358)
1992 年复试试题	(359)
试题解答.....	(361)

附 录

华罗庚数学学校中学部各年级参赛获奖名单.....	(366)
--------------------------	-------

上篇

训练题及解答

训练题(一)——三角函数(一)

一、选择题:

1. 设 $-1 < a < 0$, $\theta = \arcsin a$, 则不等式 $\sin x < a$ 的解集是_____。

(A) $\{x | (2k-1)\pi + \theta < x < 2k\pi - \theta, k \in \mathbb{Z}\}$

(B) $\{x | (2k-1)\pi - \theta < x < 2k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}\}$

(C) $\{x | 2k\pi + \theta < x < 2k\pi - \theta, k \in \mathbb{Z}\}$

(D) $\{x | 2k\pi - \theta < x < 2k\pi + \pi + \theta, k \in \mathbb{Z}\}$

2. 设 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ 且 $a \neq \frac{\pi}{4}$,

设 $x = |\log_{\lg a}(1 - \sin a)|$, $y = |\log_{\lg a}(1 + \sin a)|$, 则 x 和 y 的大小关系是_____。

(A) $x > y$ (B) $x < y$

(C) 当 $0 < a < \frac{\pi}{4}$ 时, $x > y$; 当 $\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{2}$ 时, $x < y$

(D) 当 $0 < a < \frac{\pi}{4}$ 时, $x < y$; 当 $\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{2}$ 时, $x > y$

3. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 一定有_____。

(A) $\log_{\cos C} \frac{\sin A}{\cos B} > 0$ (B) $\log_{\cos C} \frac{\cos A}{\sin B} > 0$

$$(C) \log_{\sin C} \frac{\sin A}{\cos B} > 0 \quad (D) \log_{\sin C} \frac{\sin A}{\sin B} > 0$$

4. 当 $\theta \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{7\pi}{6})$, $k \in \mathbb{Z}$ 时, 方程 $\sqrt{|x-1|} = x \sin \theta$ 的解的个数是_____。

$$(A) 0 \quad (B) 1 \quad (C) 2 \quad (D) 4$$

5. 方程 $\sin x = \frac{x}{100}$ 的实根个数是_____。

$$(A) 62 \quad (B) 63 \quad (C) 64 \quad (D) 65$$

6. 对任何 $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 下式正确的是_____。

$$(A) \sin(\sin \varphi) < \cos \varphi < \cos(\cos \varphi)$$

$$(B) \sin(\sin \varphi) > \cos \varphi > \cos(\cos \varphi)$$

$$(C) \sin(\cos \varphi) > \cos \varphi > \cos(\sin \varphi)$$

$$(D) \sin(\cos \varphi) < \cos \varphi < \cos(\sin \varphi)$$

二、填空题:

1. 函数 $y = (\sin x + 1)(\cos x + 1)(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 的最小值等于_____。

2. 函数 $y = (\frac{1}{2})^{\lg \cos x}$ 的递增区间是_____。

3. 已知 $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, 且 $\cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{8}$, 则 $\alpha =$ _____, $\beta =$ _____。

4. 函数 $y = \sqrt{-\lg x - 1} + \frac{\sqrt{16-x^2}}{1 - \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin x}$ 的定义域是_____。

5. $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, 一直线分 $\triangle ABC$ 的面积为两部分, 如果这两部分面积相等, 那么该直线夹在 AB 、 BC 间的线段 MN 最短长度是_____。