

结 构 力 学

下 册

唐秀近 时 战 编

大 连 工 学 院 出 版 社

第四章 柔度阵法（力法）

§ 4—1 概 述

实际结构物大多数是静不定的，一方面固然是由于结构物在制造过程中就形成了连续的三维体系，而另一方面也是更重要的是由于静不定结构与同样承载条件下的静定结构相比，内力与位移都比较小，它在局部超过强度允许时内力可以得到重新分布而整个结构可以继续承载，因而提高了安全度，正由于此，静不定结构的分析就很重要。

在第一章 § 1—4 中已经讨论过结构的静定性定义，即凡是有多余约束条件的结构都是静不定的。因此，应用整体平衡条件或其部分脱离体的平衡条件不能唯一地决定这类结构的支承反力或内力。

应用 (1—4—7) ~ (1—4—10) 诸式可以计算各种杆件系统结构物的静不定次数。确定静不定次数是用力法分析静不定结构的前提。

将多余约束的约束反力 x_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) 作为基本未知数，解除这些约束以后结构成为静定的，这种解除多余约束以后的静定结构称为该静不定结构的基本体系。于是基本体系成为在外载及多余约束力 x_i 作用下的静定结构。满足平衡条件的约束力 x_i 可以有无数个解，但是其中真正唯一的解 x_i 必须同时保证解除约束处满足原来结构的连续条件。这就是用力法求解静不定结构的基本概念。

以下通过一个简单的例子——一次静不定梁，来说明力法求解的过程。

图4—1, a所示的是一个一次静不定梁。求作结构的M图。

由梁的三个平衡方程不能解出全部四个支承反力（即四个未知数满足三个方程将有无数个解）。以B支承链杆为多余约束，相应的反力就是多余未知力，以 x_1 表示，解除这个多余约束，并代之以 x_1 力，则结构成为图4—1, b所示的静定基本体系（悬臂梁），显然图4—1, a与b两种情况的内力与变形应该相同。在基本体系上按此要求算出多余约束力 x_1 ，则问题就解决了。

由平衡条件不能唯一地确定 x_1 ，必须用解除约束处的连续条件，即B支承处的位移条件才可确定反力 x_1 。外载及 x_1 的作用下，基本体系的B端竖向位移应等于零，即 Δ_B 。外载及 x_1 所引起的 x_1 方向的位移分别以 Δ_{1p} 和 Δ_{11} 表示（见图4—1, c, d），则此连为：

$$\Delta_{11} + \Delta_{1p} = 0$$

Δ_{11} 显然是未知力 x_1 的函数，如果当 $x_1 = 1$ 时B点沿 x_1 方向的相应位移以 δ_{11} 表示，力产生的位移，见图4—1, f），则 x_1 作用时的位移为 $\Delta_{11} = \delta_{11} x_1$ ，于是上述

$$\delta_{11} x_1 + \Delta_{1p} = 0$$

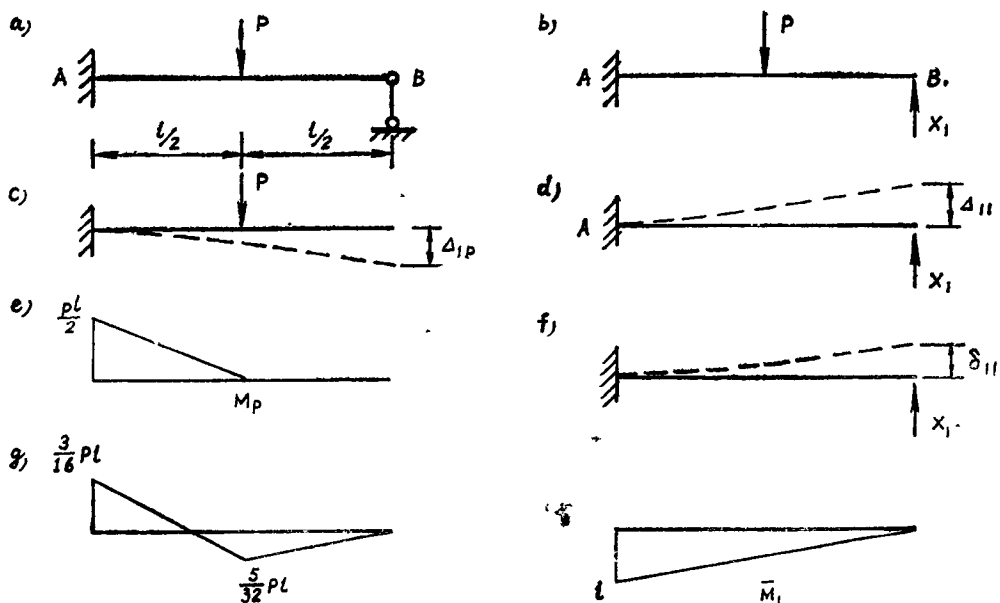


图4-1

这就是 一次静不定结构的力法方程。其中非齐次项 Δ_{1P} 是由荷载引起的 x_1 方向的位移，方程系数为单位 x_1 产生的位移 δ_{11} ，这两者可利用第三章所述的位移计算公式或图乘法计算如下：

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = -\frac{5Pl^3}{48EJ}$$

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} dx = \frac{l^3}{3EJ}$$

于是可由基本方程解出 x_1 如下：

$$x_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-Pl^3/48EJ}{l^3/3EJ} = \frac{5}{16}P$$

所得的正值表示 x_1 的实际方向与原来假设的方向相同。

得到 x_1 以后，可用平衡条件作出内力分布图。又由于计算 x_1 的过程中，已经作出 $x_1=1$ 的弯矩图 $\bar{M}_1$ 以及外载作用的弯矩图 M_P ，所以静不定结构的弯矩分布可以用迭加原理作出如下：

$$M = M_P + x_1 \bar{M}_1$$

比例迭加所得的弯矩图见图4-1，g。

综上所述，可知力法的解题步骤如下：

1) 判断结构的静不定次数，确定多余约束。

2) 解除多余约束代之以多余约束力, 得到静定稳定的基本体系。

3) 根据解除约束处的变形连续条件列出力法方程; 利用计算静定结构位移的方法算出方程系数和非齐次项。

4) 解方程式得出多余未知反力。

5) 用平衡条件或迭加原理作出静不定结构的内力分布图。

上述力法解题的思想是与 § 3—8 中所述的最小总余能原理是互通的, 即从所有满足平衡条件的内力状态中, 选择使总余能最小者以实现变形连续协调。

§ 4—2 力法基本方程 柔度阵

上节以一次静不定结构为例, 说明了力法解题的基本思想, 对于多次静不定结构, 其原理是一样的。

n 次静不定结构不能由平衡方程唯一地确定内力的原因是由于有 n 个多余约束。解除了 n 个多余约束代之以 n 个约束反力 x_i , 则结构就成为在外载 P 及 n 个 x_i 作用下的静定结构, 此即静不定结构的基本体系, 如果能确定 x_i 值, 则在基本体系中, 外载 P 及约束力 x_i 共同作用下的内力及支反力就是原静不定结构的全部解。

根据迭加原理, 真实的内力可以表为:

$$\begin{aligned} M &= M_p + x_1 M_1 + x_2 M_2 + \cdots + x_i M_i + \cdots + x_n M_n \\ N &= N_p + x_1 N_1 + x_2 N_2 + \cdots + x_i N_i + \cdots + x_n N_n \\ Q &= Q_p + x_1 Q_1 + x_2 Q_2 + \cdots + x_i Q_i + \cdots + x_n Q_n \\ R &= R_p + x_1 R_1 + x_2 R_2 + \cdots + x_i R_i + \cdots + x_n R_n \end{aligned} \quad (4-2-1)$$

式中 M_p 、 N_p 、 Q_p 、 R_p 为外载作用下基本体系中的内力和支反力, M_i 、 N_i 、 Q_i 、 R_i 为 $x_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 作用时基本体系中的内力和支反力。

满足平衡条件, x_i 可以有任意多个解, 因而只从平衡出发不能唯一地确定真实的内力解。

解除多余约束的基本体系, n 个约束反力应使解除约束之后的静定结构的变位状态在解除约束处保持原结构所要求的连续条件, 从能量的观点看, (4—2—1) 式所表示的内力状态应使系统的总余能最小, 这就是说, 满足平衡条件的约束力 x_i 应该满足极值条件 (3—8—4) 式:

$$\frac{\partial (U^* + V^*)}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

(3—8—4)

总余能 $U^* + V^*$ 应以应力状态参数 a_i 表示, 此处, 参数 a_i 应为 n 个多余约束力 x_i 。

在线性弹性体中, 应变余能 U^* 等于应变能 U , 对于杆系结构, 可按式 (3—3—41) 计算, 一般说, 平面体系中扭转问题不与弯曲问题一起考虑, 因而 U^* 可如下式计算:

$$U^* = \sum \int \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} ds + \sum \int \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} ds + \sum \int \frac{\mu}{2} \frac{Q^2}{GA} ds \quad (4-2-2)$$

$$V^* = - \sum_{S_u} u R$$
$$\begin{aligned}
 U^* = & \sum \int \frac{1}{2EA} (N_p + x_1 N_1 + x_2 N_2 + \dots + x_l N_l + \dots + x_n N_n)^2 ds \\
 & + \sum \int \frac{1}{2EJ} (M_p + x_1 M_1 + x_2 M_2 + \dots + x_l M_l + \dots + x_n M_n)^2 ds \\
 & + \sum \int \frac{\mu}{2GA} (Q_p + x_1 Q_1 + x_2 Q_2 + \dots + x_l Q_l + \dots + x_n Q_n)^2 ds \\
 V^* = & - \sum_{s_u} u (R_p + x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_l R_l + \dots + x_n R_n)
 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \frac{\partial (U^* + V^*)}{\partial x_i} = & \sum \int \frac{1}{EA} (N_p + x_1 N_1 + \dots + x_i N_i + \dots + x_n N_n) N_i ds \\ & + \sum \int \frac{1}{EJ} (M_p + x_1 M_1 + \dots + x_i M_i + \dots + x_n M_n) M_i ds \\ & + \sum \int \frac{\mu}{GA} (Q_p + x_1 Q_1 + \dots + x_i Q_i + \dots + x_n Q_n) Q_i ds \\ & - \sum_{S_u} u R_i = 0 \end{aligned}$$

将此式展开后, 可得 n 个线性方程组, 有如下形式:

[illegible]

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{N_i N_j}{EA} ds + \sum \int \frac{M_i M_j}{EI} ds + \sum \int \mu \frac{Q_i Q_j}{GA} ds \quad (4-2-4)$$

$$\Delta_{ip} = \Sigma \int \frac{N_i N_p}{EA} ds + \Sigma \int \frac{M_i M_p}{EJ} ds + \Sigma \int \mu \frac{Q_i Q_p}{GA} ds \quad (4-2-5)$$

$$\Delta_{iu} = - \sum_u R_i u \quad (4-2-6)$$

由方程 (4-2-3) 中解出的约束力 x_i , 即同时满足了连续条件的解, 因而是静不定结构的真实解, 确定了 x_i 之后, 就可由 (4-2-1) 式完全确定结构的内力和支座反力。

(4-2-3) ~ (4-2-6) 诸式的物理意义是很明确的。(4-2-4) ~ (4-2-6) 各式是计算位移的莫尔公式, 因为 N_i 、 N_j 、 M_i 、 M_j 、 Q_i 、 Q_j 等均为单位力作用在 i 、 j 处时基本体系的内力, 因而 δ_{ij} 就是单位力作用在 j 处而产生的 i 处的位移, $x_j \delta_{ij}$ 表示 x_j 作用在 j 处而产生的 i 处的位移。 N_p 、 M_p 、 Q_p 为外载 P 作用下基本体系的内力, Δ_{ip} 代表外载作用下 i 处产生的位移, R_i 为 $x_i = 1$ 作用时在有支座位移 u 处相应的支座反力, 因而 Δ_{iu} 为支座位移 u 而产生的 i 处的位移。

于是 (4-2-3) 式中第 i 个方程就代表结构系统在 n 个 x_i 、外载 P 以及支座位移等因素的影响下 i 处的全部位移必须符合原结构在 i 处的连续条件, 因此, 方程组 (4-2-3) 代表 n 个约束力应满足的 n 个连续条件。最小总余能原理等价于变形协调条件, 这个结论因而是很显然的。

δ_{ij} 是代表单位力作用在 j 处引起 i 处的位移, 称为柔度系数。由位移互等定理可知:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

由此可知, (4-2-3) 方程组的系数阵是一个对称的矩阵, 称之为柔度矩阵 $[F]$ 。

$$[F] = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1j} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2j} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \cdots & \delta_{ij} & \cdots & \delta_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nj} & \cdots & \delta_{nn} \end{pmatrix} \quad (4-2-7)$$

例如图 4-2, a 所示的二次静不定结构, 解除 D 及 E 处两个支座约束代之以约束反力 x_1 和 x_2 , 于是可得基本体系如图 4-2, b 所示。

该静不定结构的内力和支反力可表为如下形式:

$$M = M_p + x_1 M_1 + x_2 M_2$$

$$N = N_p + x_1 N_1 + x_2 N_2$$

$$Q = Q_p + x_1 Q_1 + x_2 Q_2$$

$$R = R_p + x_1 R_1 + x_2 R_2$$

x_1 、 x_2 为任何值都能满足平衡条件, 但真实的解应满足解除约束的 D、E 处位移连续条件, 即应由方程 (4-2-3) 确定 x_1 和 x_2 。于是可得二阶代数方程组如下:

$$\delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \Delta_{2p} = 0$$

刚架结构中的弯曲杆件, 计算位移时可忽略轴向及剪切变形的影响, 于是由 (4-2-4)

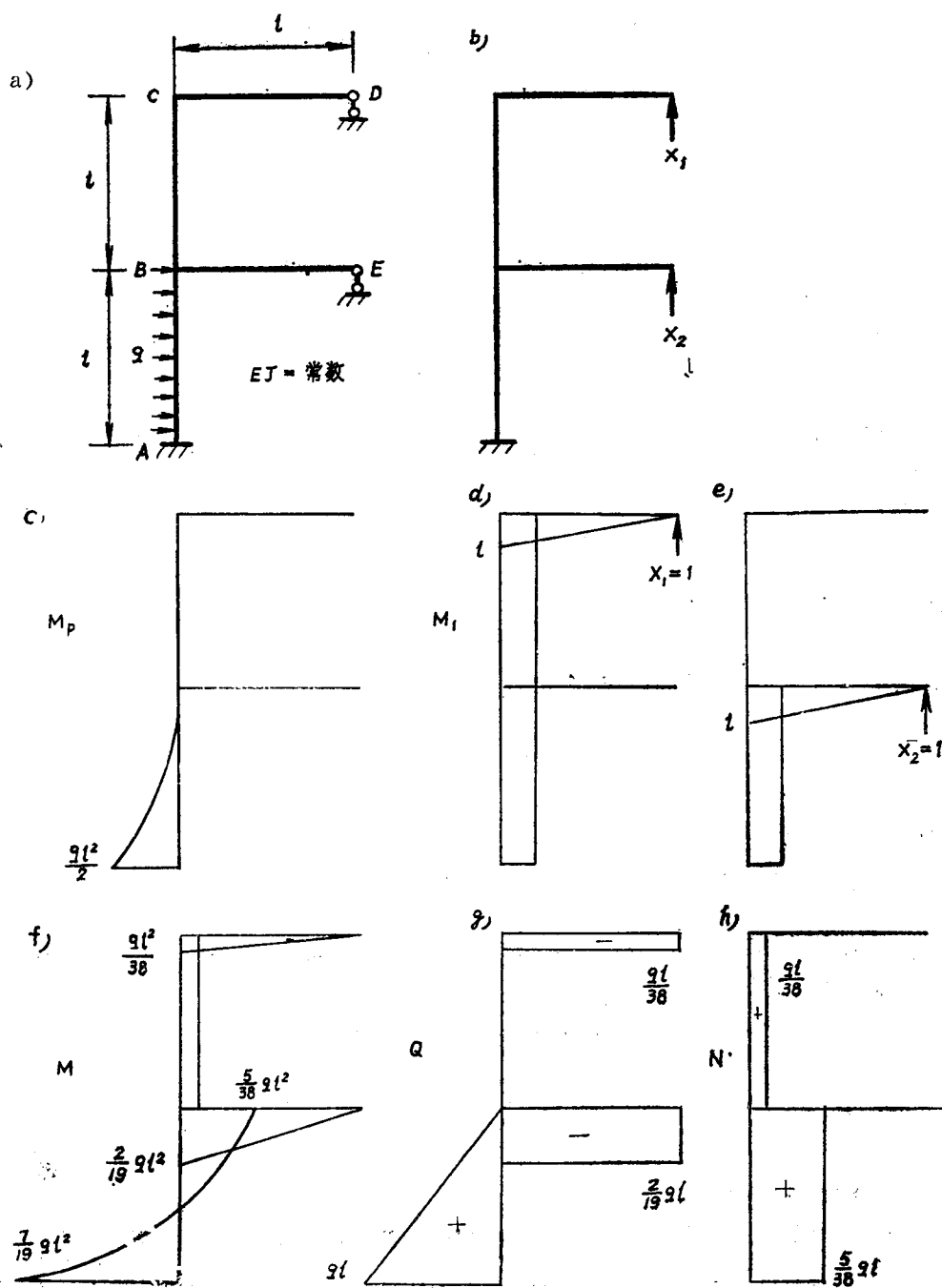


图4—2

及(4-2-5)式可算得上列方程中的系数及非齐项如下:

$$\delta_{11} = \Sigma \int \frac{M_1^2}{EJ} ds = \frac{7l^3}{3EJ}$$

$$\delta_{22} = \Sigma \int \frac{M_2^2}{EJ} ds = \frac{4l^3}{3EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \Sigma \int \frac{M_1 M_2}{EJ} ds = \frac{l^3}{EJ}$$

$$\Delta_{1p} = \Sigma \int \frac{M_1 M_p}{EJ} ds = -\frac{ql^4}{6EJ}$$

$$\Delta_{2p} = \Sigma \int \frac{M_2 M_p}{EJ} ds = -\frac{ql^4}{6EJ}$$

上述积分计算的结果,也可应用图乘法算得。图4-2, c、d、e中表示了 $x_1=1$ 、 $x_2=1$ 及外载作用的弯矩图 M_1 、 M_2 及 M_p 。图乘结果是显然的。

既已算得各系数,于是方程式如下:

$$\begin{cases} \frac{7}{3} x_1 + x_2 - \frac{ql}{6} = 0 \\ x_1 + \frac{4}{3} x_2 - \frac{ql}{6} = 0 \end{cases}$$

由此解出静不定结构的约束力 x_1 和 x_2 :

$$x_1 = \frac{ql}{38}$$

$$x_2 = \frac{2ql}{19}$$

于是静不定结构的弯矩可由下式迭加而得:

$$M = M_p + x_1 M_1 + x_2 M_2$$

M 分布图示于图4-2, f中。迭加时可先算出各杆杆端弯矩,杆轴方向的分布可选加各杆作为简支梁时外载作用的弯矩分布。

相应的剪力和轴力分布也可根据平衡关系作出,示于图4-2, g、h中。

§ 4—3 算例

一、静不定刚架的计算

例4-1 图4-3, a所示为一静不定刚架,梁的截面惯性矩为 J_1 ,柱的截面惯性矩为 J_2 ,且知 $J_1 = 2J_2$,横梁受均布荷载 $q = 2 \frac{KN}{m}$,用力法进行分析,作出刚架的内力分布图。

解:这是一次静不定刚架,解除一个多余约束而得基本体系,示于图4-3, b,多余约束反力为水平力 x_1 。

由(4-2-3)式可知,基本方程式为一阶代数方程:

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1p} = 0$$

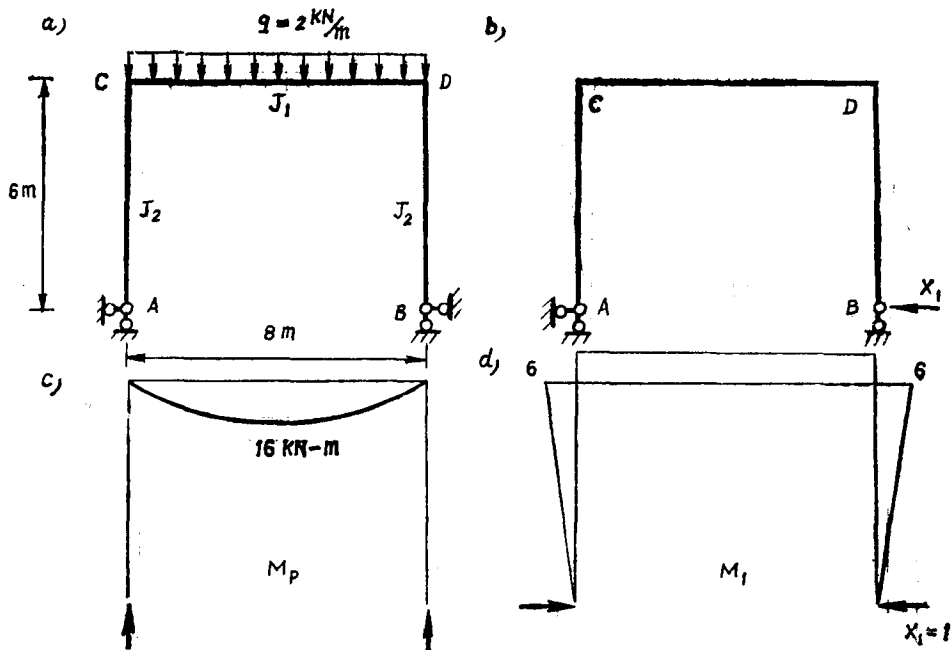


图4—3

式中 δ_{11} 及 Δ_{1p} 可按式(4—2—4)及(4—2—5)计算,算得的结果如下:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ_1} [6 \times 8 \times 6] + \frac{2}{EJ_2} \left[\frac{6 \times 6}{2} \times \frac{2}{3} \times 6 \right] = \frac{288}{EJ_2}$$

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{M_1 M_p}{EJ} ds = -\frac{1}{EJ_1} \left[\frac{2}{3} \times 8 \times 16 \times 6 \right] = -\frac{256}{EJ_2}$$

代入方程式而可解得 x_1 如下:

$$x_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{256}{288} = \frac{8}{9} \text{ KN}$$

解出 x_1 之后,经过迭加,可得各杆的杆端弯矩如下:

$$M_{DB} = M_{CA} = 6 \times \frac{8}{9} = 5.33 \text{ KN-m} \quad \text{外侧受拉}$$

$$M_{CD} = M_{DC} = 6 \times \frac{8}{9} = 5.33 \text{ KN-m} \quad \text{外侧受拉}$$

既得杆端弯矩值,将其竖标联成直线,再迭加各杆作为简支梁受外载后的弯矩图,即可作出全结构的弯矩分布图如图4—4所示,再根据平衡条件可作出剪力图及轴力图,如图

4—4, c、e所示。

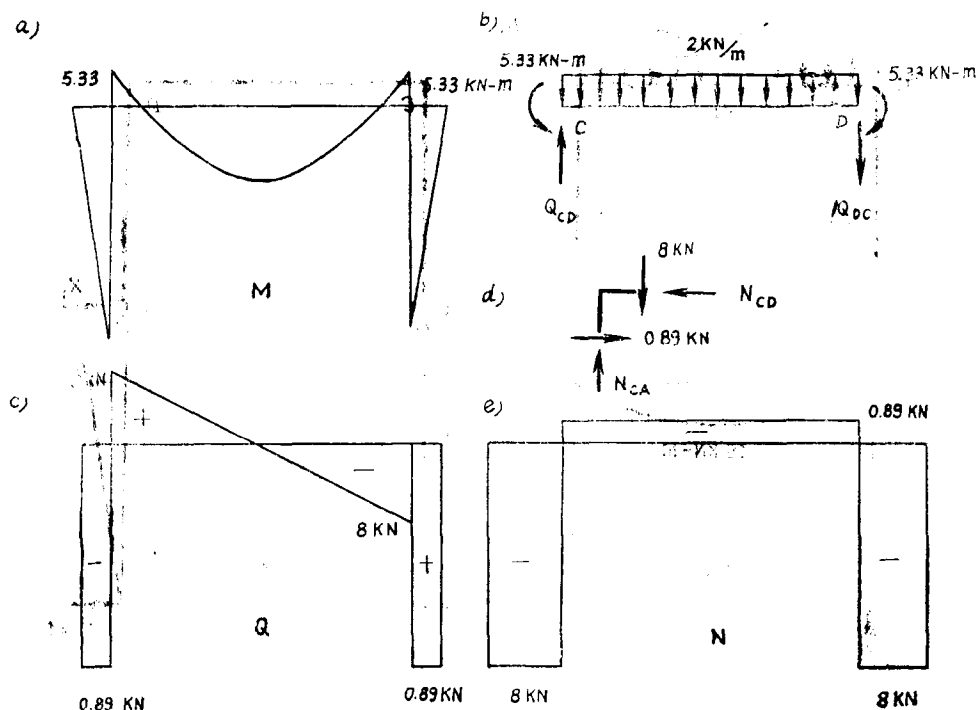


图4—4

此题也可取三铰刚架作为基本体系，以解除横梁中间截面的弯曲约束代之以约束力矩 x_1 ，如图4—5, a所示，当 $x_1 = 1$ 时可作出弯矩图如图4—5, b所示。外载作用在三铰刚架上，相应的弯矩分布见图4—5, d。

与此基本体系对应的各个柔度系数如下计算，可得各值为：

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} ds = -\frac{1}{EI_1} [1 \times 8 \times 1] + \frac{2}{EI_2} \left[1 \times 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \right] = -\frac{8}{EI_2}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \sum \int -\frac{M_1 M_p}{EI} ds = -\frac{2}{EI_1} \left[16 \times \frac{1}{3} \times 4 \times 1 \right] - \frac{2}{EI_2} \left[16 \times \frac{6}{2} \times \frac{2}{3} \right] \\ &= -\frac{256}{3EI_2} \end{aligned}$$

于是基本方程式为：

$$\delta_{11} x_1 + \Delta_{1p} = 0$$

由此解出的约束反力 x_1 如下：

$$x_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{256}{3}}{8} = 10.67 \text{ kN-m}$$

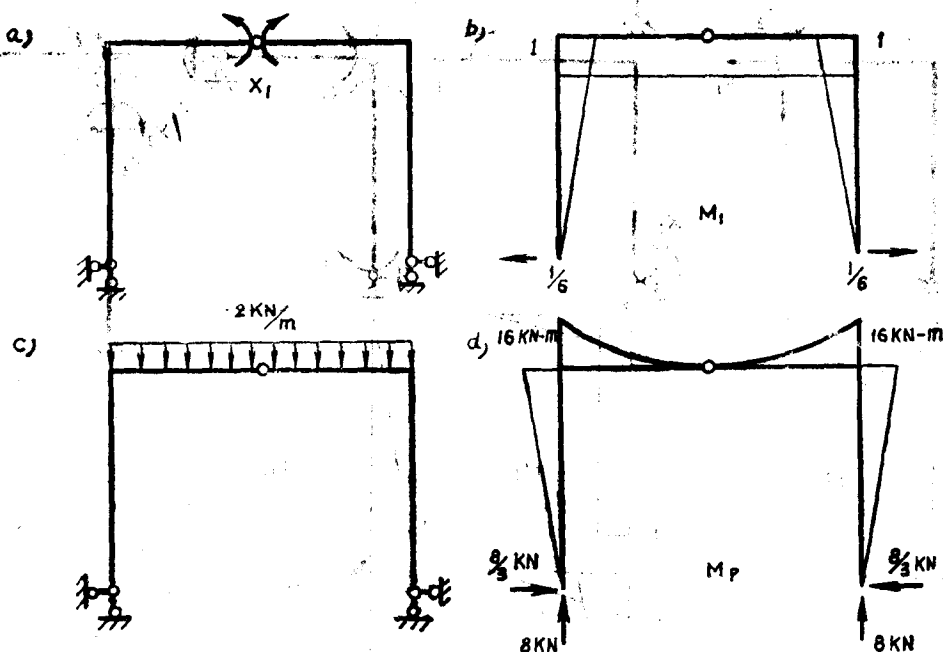


图4—5

最后迭加所得的弯矩分布图与图4—4, a所示是完全一样的。

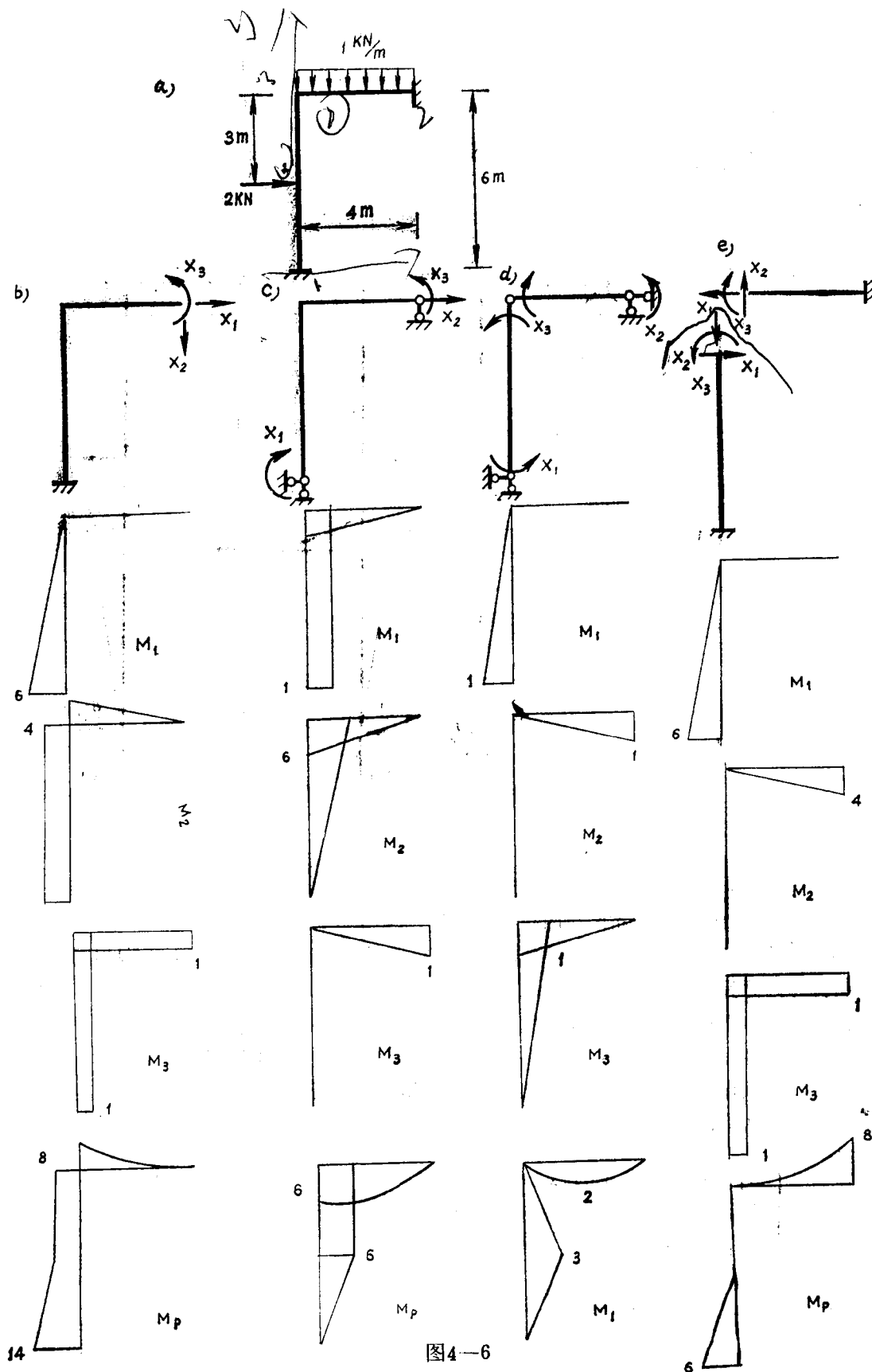
例4—2 图4—6, a示一三次静不定刚架, 承受图示外载作用, 各杆截面的EJ相同, 以力法分析并作内力分布图。

解: 三次静不定结构有三个多余约束, 基本体系的选择可以有多种方法, 图4—6, b、c、d、e所示就是四种不同的形式。每一种基本体系的单位约束力作用的弯矩图 M_1 、 M_2 、 M_3 各示于图中, 外载作用下基本体系的弯矩图 M_P 也已作出示于图中。

基本方程式为:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases}$$

现在来分析一下那一种基本体系最合适。



柔度阵中非对角元素按下式计算：

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{M_i M_j}{EJ} ds$$

由图4—6, b、c、d、e所示各个 M_i 与 M_j 相乘，如果某一个基本体系的非对角元素 δ_{ij} 为零的较多，则这一种基本体系是比较好的。

图4—6, b所示的基本体系， δ_{ij} 都不为零，因而相应的柔度阵是满阵，图4—6, c所示的基本体系，其柔度阵也同样是一个满阵，图4—6, d及e所示的两种基本体系，其柔度阵中 $\delta_{12} = 0$ ，因而相对来说这两种基本体系比较合适，而两者之中又以图4—6, e所示的弯矩图乘较方便。于是选择这一种基本体系运算。

各柔度系数计算如下：

$$EJ\delta_{11} = \frac{6 \times 6}{2} \times 6 \times \frac{2}{3} = 72$$

$$EJ\delta_{22} = \frac{4 \times 4}{2} \times 4 \times \frac{2}{3} = \frac{64}{3}$$

$$EJ\delta_{33} = 1 \times 4 \times 1 + 1 \times 6 \times 1 = 10$$

$$EJ\delta_{12} = EJ\delta_{21} = 0$$

$$EJ\delta_{13} = EJ\delta_{31} = -\frac{6 \times 6}{2} \times 1 = -18$$

$$EJ\delta_{23} = EJ\delta_{32} = \frac{4 \times 4}{2} \times 1 = 8$$

$$EJ\Delta_{1P} = \frac{6 \times 3}{2} \times 5 = 45$$

$$EJ\Delta_{2P} = -\frac{1}{3} \times 8 \times 4 \times 4 \times \frac{3}{4} = -32$$

$$EJ\Delta_{3P} = -\frac{6 \times 3}{2} \times 1 - \frac{1}{3} \times 8 \times 4 = -\frac{59}{3}$$

于是可以列出基本方程式如下：

$$\begin{cases} 72x_1 & -18x_3 + 45 = 0 \\ & \frac{64}{3}x_2 + 8x_3 - 32 = 0 \\ -18x_1 + 8x_2 + 10x_3 - \frac{59}{3} = 0 \end{cases}$$

由此解出各约束反力为：

$$x_1 = -0.983 \text{ KN}$$

$$x_2 = 2.038 \text{ KN}$$

$$x_3 = -1.433 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

经过迭加可得到结构的弯矩图，迭加的过程如图4—7, a所示，由平衡关系可作出剪力

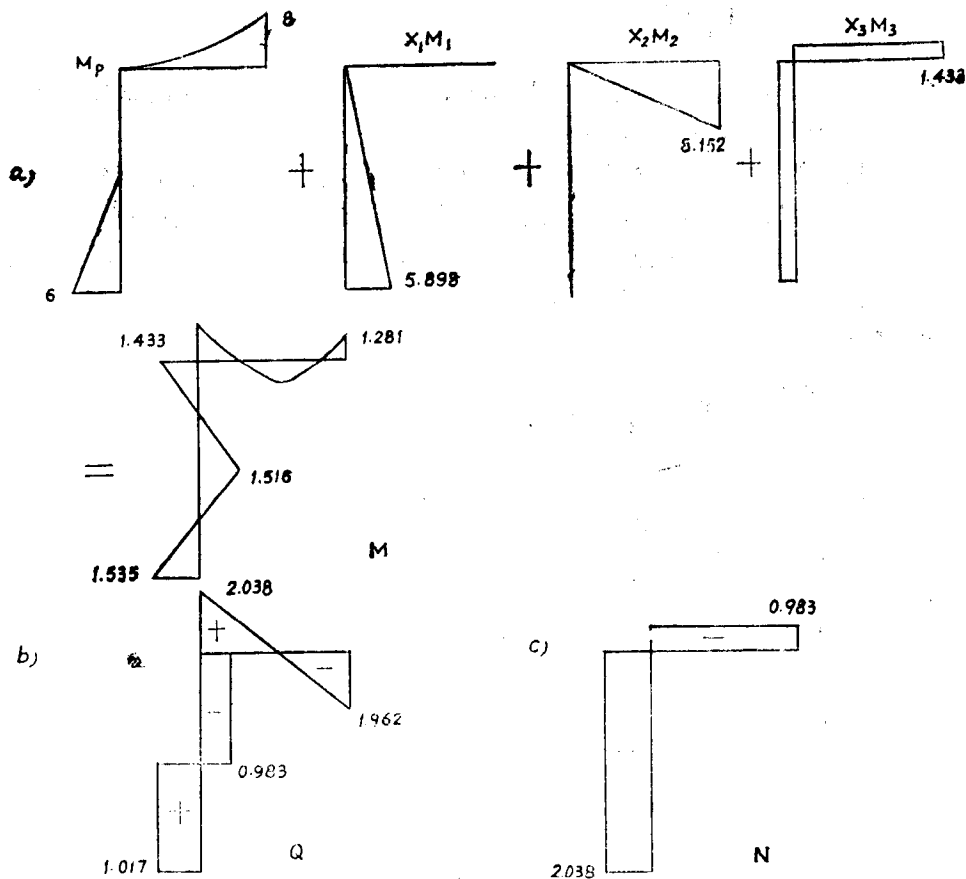


图4—7

图及轴力图，见图4—7，b、c所示。

由上列两个例题的分析可知，基本体系取得不同，则柔度阵的内容将是不同的。

二、静不定桁架的计算

例4—3 图4—8，a示一静不定桁架，各杆的 $\frac{1}{EA}$ 设为常数，载荷如图所示，试计算各杆的内力。

解：这是二次静不定桁架，基本体系如图4—8，b所示，将DC杆及CF杆的轴向约束解除，代之以轴向约束力 x_1 、 x_2 ，这种解除约束的详图见图4—8，c所示。

力法基本方程式为：

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

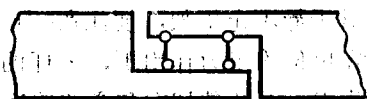
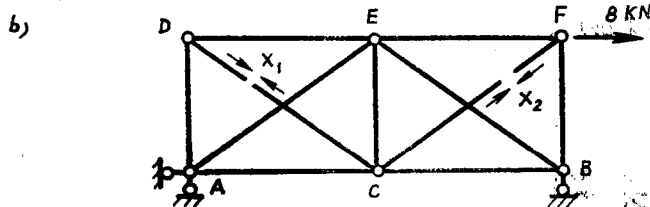
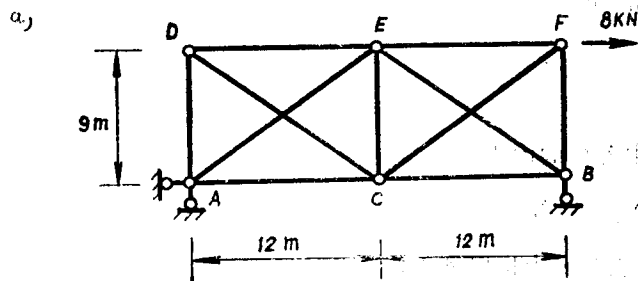


图4—8

这个连续方程的物理意义是在轴向解除约束的切口处，其相对轴向位移为零。

柔度系数按(4—2—4)式计算，由于无弯矩和剪力存在，且各轴向力沿杆长是常数，所以可将下列有限和运算代替积分运算：

$$\delta_{ij} = \sum \frac{N_i N_j}{EA} l$$

外载所引起的轴向相对位移的计算公式，根据(4—2—5)式，根据桁架的特点，应如下形式：

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{N_i N_P}{EA} l$$

为此需要计算基本体系在外载及单位约束力作用下各杆的内力，按照静定桁架计算的方法可将各杆内力算出。结果示于图4—9，a、b、c中。

于是可将基本方程中各个系数算出，这种计算一般可以列表进行，如表4—1所示，由算出的结果列出基本方程式如下：

