

微穿孔板消声器的理论公式探讨

潘敦银 方丹群

(北京市劳动保护科学研究所)

内 容 提 要

本文建立了声波在微穿孔板消声器中传播的波动方程，导出了微穿孔板消声器消声量的理论计算公式。文中还指出，在消声器中声波对于管壁的入射角并不是 90° ，而是小于此角度，我们给出了求这个入射角的计算方法，用以确定计算消声量所需要的壁面声阻抗率。

以前对于微穿孔板消声器所做的实验研究工作都说明，其消声频谱特性与微穿孔板吸声结构的吸声频谱特性不相同，本文对这一问题做了完满的理论解释。实验验证结果与理论分析相符合。

一、引 言

我国科学工作者所研制的新型消声器——微穿孔板消声器已在噪声控制工程中得到了广泛的应用。在其理论研究方面也进行了大量的工作。然而还有一些尚未解决的理论问题，其中之一就是至今还没有建立微穿孔板消声器的消声量计算公式。过去对其消声量的计算是当声波波长大于消声器尺寸时用共振式消声器的消声量公式，而在中高频用Белов公式。前者适用范围太小，在绝大多数情况下不满

是其应用条件，而后者由于下述三点理由，实际上并不能真正反映微穿孔板消声器的实际情况。其一，Белов公式的导出是着眼于壁面为吸声材料的阻性消声器，在推导过程中略去了吸声材料的声抗。而对于微穿孔板消声器来说，除非在共振频率附近，声抗和声阻相比是不能忽略的。其二，公式首先导出消声量和壁面声阻率的关系，然后借助声阻率和吸声系数的关系将消声量表达为吸声系数的函数。但壁面声阻率并不是吸声系数的单值函数，对于一个吸声系数值有两个声阻值与之对应，一个大于1，一个小于1。（指相对声阻率）。

Белов在相对声阻率大于1的前提下得出了表达式。对于一般吸声材料壁面，这一点通常可以被满足。但对于微穿孔板壁面来说，相对声阻率小于1的情况很多，此时消声值随声阻率的减小应当增大，而Белов公式则得出相反的结论。其三，Белов公式的推导过程中使用了正入射的声阻抗率，从而表达为正入射吸声系数 α_0 的函数。

而在消声器中声波是掠入射，一般吸声材料壁面可看作局部反应表面的，声阻抗率不随入射角而变，因而可以使用 α 作消声参量。对于微穿孔板消声器来说，其壁面后是空腔，不能看作局部反应表面，其声抗率已和正入射不同了，此时再使用 α 作为消声参量，显然是不适宜的了。

综上所述，我们有必要寻求一个适于微穿孔板消声器的理论计算公式。我们的目的就是从小声学基本原理出发，建立微穿孔板消声器中的声波波动方程，进而导出其消声量计算公式并进行实验验证。

二、管中波动方程

假定在微穿孔板消声器内同一横截面上声压的空间变化不大。其

声压可用 \bar{P} 来表示

(以下省记为 P)。

在图 1 所示的消声

器管道内取一高为

d_z 的小圆柱体作

为控制体，则对该

体积可以应用质量

守恒定律和动量守

恒定律 [1]。

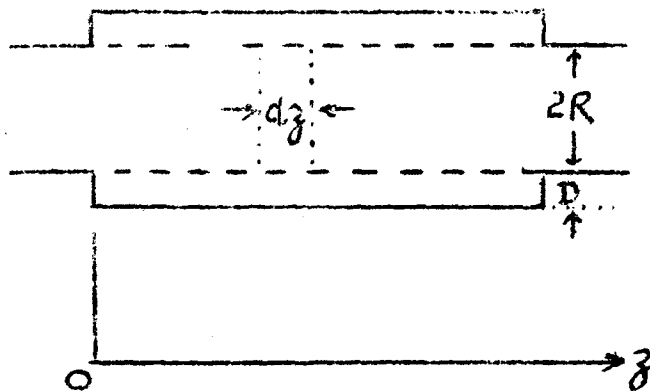


图 1

设质点速度的轴向分量为 w ，径向分量为 u ，由质量守恒得

$$P(z,t)w(z,t)\pi R^2 - P(z+dz,t)w(z+dz,t)\pi R^2 - P(z,t)u(z,t)2\pi R dz = \frac{\partial}{\partial t} [P(z,t)\pi R^2 dz]$$

$$\text{即: } -\frac{\partial}{\partial z} [P(z,t)w(z,t)] - \frac{2}{R} P(z,t)u(z,t) = \frac{\partial}{\partial t} P(z,t)$$

在线性声学范围内，略去二阶小量 ($u, du, w, dw, d\rho$

均为一阶小量)，得

$$-\rho_0 \frac{\partial}{\partial z} w(z,t) - \frac{2}{R} P_0 u(z,t) = \frac{\partial}{\partial t} P(z,t) \quad (1)$$

对于轴向动量，两端的流入量均为二阶小量 (即非线性项)，可以略去，动量守恒方程为：

$$P(z,t) - P(z+dz,t) = \frac{\partial}{\partial t} [P(z,t)w(z,t)] dz$$

略去非线性项可得到

$$-\frac{\partial}{\partial z} p(z, t) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} w(z, t) \quad (2)$$

注意到物态方程为

$$p(z, t) = C^2 \rho(z, t) \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)三式得出:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} p(z, t) - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(z, t) = \frac{2}{R} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} u(z, t) \quad (4)$$

因微穿孔板的孔间距远远小于波长, 可以认为壁面具有均匀的声阻抗率, 且满足

$$p(z, t) = u(z, t) \rho_0 C \xi \quad (5)$$

式中 ξ 为壁面法向 相对声阻抗率。

将(5)式代入(4)式, 即得到关于 P 的二阶线性偏微分方程:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} P(z, t) - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(z, t) - \frac{2}{R C \xi} \frac{\partial}{\partial t} P(z, t) = 0 \quad (6)$$

对其分离变量

$$P(z, t) = P(z) e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} P(z) + k^2 P(z) - j \frac{2k}{R \xi} P(z) = 0$$

$$\text{令 } \frac{1}{k_u^2} = k^2 - j \frac{2k}{R \xi}, \quad \text{得到上式的解为:}$$

$$P(z) = A e^{-j k_u z} + B e^{j k_u z} \quad (7)$$

可见在管内传播着两种波, 右行波 $A e^{-j k_u z}$ 和左行波 $B e^{j k_u z}$ 。

由此可以求出微穿孔板消声器的传递损失。

设上游的入射波和反射波分别为 (省去因子 $e^{j\omega t}$):

$$P_i = P_{i0} e^{-jkz}$$

$$P_r = P_{r0} e^{jkz}$$

下游透射波为:

$$P_t = P_{t0} e^{-jk(z-l)}$$

由消声器前端声压连续和体积速度连续得:

$$P_{i0} + P_{r0} = A + B \quad (8)$$

$$\frac{P_{i0}}{\rho c} - \frac{P_{r0}}{\rho c} = \frac{kaA}{\rho\omega} - \frac{kaB}{\rho\omega}$$

$$\text{即 } P_{i0} - P_{r0} = g(A - B) \quad (9)$$

$$\text{式中 } g = \frac{ka}{k}$$

由消声器末端声压连续和体积速度连续得:

$$Ae^{-jkae} + Be^{jkae} = P_{t0} \quad (10)$$

$$Ae^{jkae} - Be^{jkae} = P_{t0} \quad (11)$$

联立(8)~(11)式得:

$$\frac{P_{i0}}{P_{t0}} = \frac{(g+1)^2}{4g} e^{jkae} - \frac{(g-1)^2}{4g} e^{-jkae} \quad (12)$$

容易看出, 如取 ka 的 Taylor 级数近似, 则 (12) 式中前项含有指数因子 e^{jkae} , 后项含有指数因子 e^{-jkae} , σ 为壁面的声导率是一正实数, 这两项相比较, 后项是一个小量可以忽而不计。

$$\frac{P_{i0}}{P_{t0}} = \frac{(g+1)^2}{4g} e^{jka l}$$

$$\text{而 } \frac{(g+1)^2}{4g} = \frac{(\sqrt{1-j\frac{2}{kR\xi}} + 1)^2}{4\sqrt{1-j\frac{2}{kR\xi}}} \approx \frac{2-j\frac{2}{kR\xi} + 2(1-j\frac{1}{kR\xi})}{4(1-j\frac{1}{kR\xi})} = 1$$

此项近似，误差在 1% 之内，所以

$$\frac{P_{i0}}{P_{t0}} = e^{jka l} = e^{j\sqrt{k^2 - j\frac{2k}{R\xi}} l} \quad (13)$$

$$\left| \frac{P_{i0}}{P_{t0}} \right| = \exp[\operatorname{Re}(jka l)] = \exp[l \operatorname{Im} \sqrt{k^2 - j\frac{2k}{R\xi}}]$$

$$TL = 20 \lg \left| \frac{P_{i0}}{P_{t0}} \right| = 8.68 l \operatorname{Im} \sqrt{k^2 - j\frac{2k}{R\xi}} \quad (14)$$

这就是圆形微穿孔板消声器的消声量计算公式。但是，由于公式的根号内是复数，使用起来很不方便。为此，我们把它化为实变量函数的形式。

$$\text{设 } \xi = r + jx$$

$$\operatorname{Re} \sqrt{k^2 - j\frac{2k}{R\xi}} = v$$

$$\operatorname{Im} \sqrt{k^2 - j\frac{2k}{R\xi}} = u$$

(15)

$$\text{则 } v + ju = \sqrt{k^2 - j\frac{2k}{R\xi}} = \sqrt{k^2 - \frac{2kr}{R(r^2+x^2)} - j\frac{2kx}{R(r^2+x^2)}}$$

此式两边同平方并比较实部和虚部得：

$$v^2 - u^2 = k^2 - \frac{2kx}{R(r^2+x^2)}$$

$$2j\omega v = -j \frac{2kx}{R(r^2+x^2)}$$

由此2式得(已舍去不合理的根)：

$$u^2 = \frac{\frac{2kx}{R(r^2+x^2)} - k^2 + \sqrt{\left[k^2 - \frac{2kx}{R(r^2+x^2)}\right]^2 + 4 \frac{k^2 x^2}{R^2(r^2+x^2)^2}}{2} \quad (16)$$

(14)式就化为：

$$TL = 6.14l \left\{ \frac{2kx}{R(r^2+x^2)} - k^2 + \sqrt{\left[k^2 - \frac{2kx}{R(r^2+x^2)}\right]^2 + \frac{4k^2 x^2}{R^2(r^2+x^2)^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

三、壁面声阻抗率

由(14)式可见，求消声器的传递损失归结为求微穿孔壁面的法向相对声阻抗率。

马大猷先生对微穿孔板吸声结构的声阻抗率和吸声系数进行了深入研究，他导出的金属微穿孔板的法向相对声阻抗率为〔2〕：

$$Z = \frac{0.33tt}{d^2 \sigma} \left(\sqrt{1 + \frac{0.21d^2 f}{32}} + \frac{0.21d^2 \sqrt{\sigma f}}{8t} \right) \quad (18)$$

$$M = 0.294 \times 10^{-3} \frac{t}{\sigma} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{9 + \frac{0.21d^2 f}{2}}} + 0.85 \frac{d}{t} \right) \quad (19)$$

式中 d 为孔径, t 为板厚, σ 为穿孔率。

板后空腔的声阻抗率, 由于空腔不是局部反应的, 它的声阻抗率与声波的入射角有关, 其关系为:

$$\gamma_D = \frac{1}{j \cos \theta} \operatorname{ctg} \frac{\omega D \cos \theta}{c} \quad (20)$$

在微穿孔板消声器中, 声波是掠入射, 由上式, γ_D 变为无穷大, 看起来似乎不能使用此式。可是, 事实上只有当管中声波是严格平面波时, 这种情况才可能发生。而在消声器中由于管壁附近大量消耗声能, 管道中部的声能不可能立即补充过去, 所以不可能是严格平面波。也就是说在管壁附近波阵面发生弯曲, 由于波的入射方向垂直于波阵面, 因而入射角不可能为 90° 此时的实际入射角可由如下方法求得。

考虑圆管中声压沿径向变化时可以表为^[3]:

$$P = P_0 J_0(k_r r) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (21)$$

式中, J_0 为 0 阶 Bessel 函数, $k_r^2 + k_z^2 = k^2$

$$u_z = \frac{j}{\rho \omega} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{k_z}{\rho \omega} P_0 J_0(k_r r) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (22)$$

$$u_r = \frac{j}{\rho \omega} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{j k_r}{\rho \omega} P_0 J_1(k_r r) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (23)$$

入射角 θ 应当满足

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{|u_z|_{r=R}}{|u_r|_{r=R}} \quad (24)$$

由 (22), (23) 两式可得

$$\frac{U_z}{U_r} \Big|_{r=R} = \frac{k_z}{-jkr} \frac{J_0(krR)}{J_1(krR)} \quad (25)$$

在壁面上 $\frac{P}{U_r} \Big|_{r=R} = \rho c \xi$ 即

$$\frac{J_0(krR)}{-\frac{jkr}{\omega\rho} J_1(krR)} = \rho c \xi$$

$$\frac{J_0(krR)}{J_1(krR)} = -j \frac{kr}{k} \xi \quad (26)$$

将此式代入(25)式得

$$\frac{U_z}{U_r} \Big|_{r=R} = \frac{k_z}{k} \xi \quad (27)$$

由此式可以看出，当管壁为绝对刚性壁时， ξ 为无穷大，入射角即为 90° 。非刚性壁时入射角小于 90° ，其大小与管壁声阻抗率 ξ 和管中轴向波数 k_z 与波数 k 的比值有关。

下面的问题是求 k_z ，由(26)式知，波数分量与 J_0 和 J_1 有关，为此我们利用 Bessel 函数的级数表达式 [4]：

$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$
我们讨论的是准平面波， k_r 近于 0，因而可取 J_0 和 J_1 级数表达式的第一项。

$$J_0(krR) \approx 1 \quad J_1(krR) \approx \frac{krR}{2}$$

代入(26)式得到

$$k_r^2 = \frac{2jk}{R\xi}$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_r^2} = k \sqrt{1 - \frac{2j}{Rk\xi}} \approx k - \frac{j}{R\xi}$$

$$\frac{U_z}{U_r} \Big|_{r=R} = \left(k - \frac{j}{R\xi}\right) \frac{\xi}{k} = \xi - \frac{j}{Rk}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \xi - \frac{j}{Rk} \right| = \left[r^2 + \left(\omega m - \frac{1}{\cos \theta} \operatorname{ctg} \frac{\omega D \cos \theta}{c} - \frac{1}{Rk} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

取 $\operatorname{ctg} \frac{\omega D \cos \theta}{c} = \frac{c}{\omega D \cos \theta} - \frac{\omega D \cos \theta}{3c}$ 上式就化为

$$\sec^2 \theta - 1 = r^2 + \left(\omega m + \frac{kD}{3} - \frac{1}{kR} - \frac{1}{kD} \sec^2 \theta \right)^2 \quad (28)$$

(28)式是关于 θ 的四次方程，会得出四个根，其中两个虚根显然不合理，还有一个根代入后使得共振峰以上声抗为负值（质量抗小于劲度抗），这也是不合理的。所以四个根中只有一个合理的根，即二次方程求根公式中根号前取负号的那个根。

由(28)式解出入射角，即可求得微穿孔板和板后空腔总的声抗率：

$$r = \omega m - \frac{1}{\cos \theta} \operatorname{ctg} \frac{\omega D \cos \theta}{c} \quad (29)$$

应该注意求入射角时我们用了近似关系式

$$k_z = k \sqrt{1 - \frac{2j}{kR\xi}} \approx k \left(1 - \frac{j}{kR\xi} \right)$$

此近似只有当 $\left| \frac{2j}{kR\xi} \right| \ll 1$ 时才可用，此条件在中高频能满足，低频就满足不了，低频时的入射角只能由曲线外延方法得到。

求入射角计算实例：一微穿孔板消声器， $t = 0.8 \text{ mm}$ ，

$d = 0.7 \text{ mm}$ ， $\sigma = 0.9\%$ ， $B = 12.5 \text{ cm}$ ， $L = 10 \text{ cm}$ 。首

先求得 r 和 m 之后便可由 (28) 式求解。此例在 1 千赫时 $\left| \frac{z}{kR\xi} \right| < 0.34$ ，

此频率及其以上由解方程得解，低频由曲线外延法估计。其结果列于

图 2。由图中看出， $\sec \theta$ 的低频极限趋于 1，此时声波波长和空腔长

度相比很大，可将空腔看作集总系统，声阻抗与入射方向无关，(20)

式的 $\cos \theta$ 必为 1。由图还可看出， $\sec \theta$ 值随频率单调上升，频率

越低程度越小，在 1 千赫以下 $\sec \theta$ 值变化很小，所以在此区间进行

曲线外延不致造成大的误差。

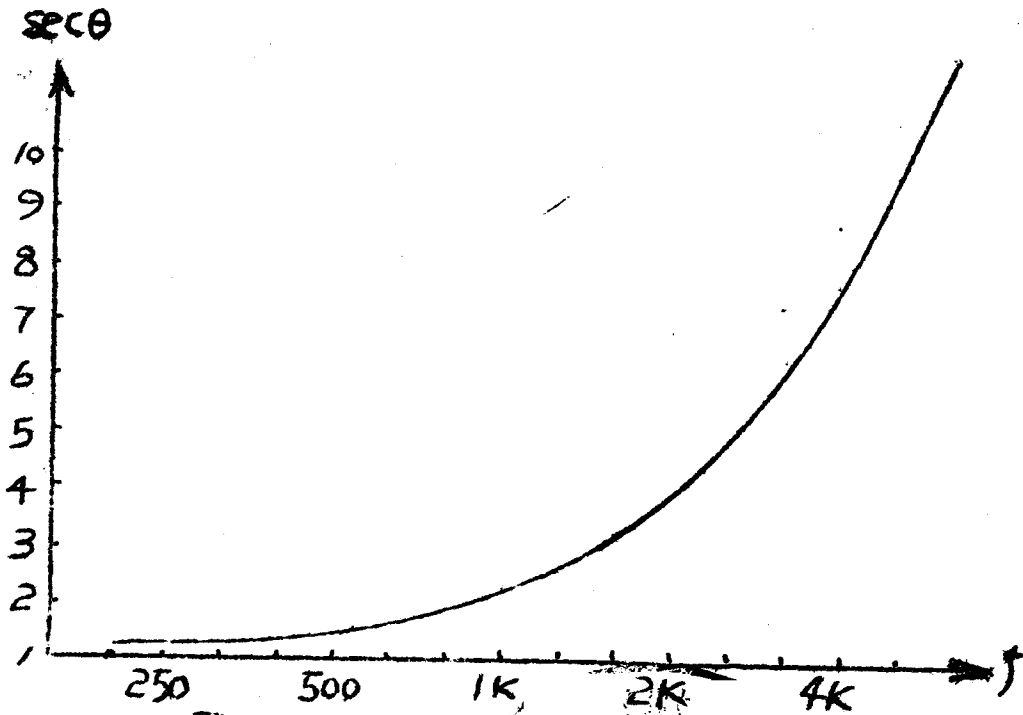


图 2 消声器管壁上声波的入射角

消声量最大的频率即共振频率满足：

$$\omega_0 m - \frac{1}{\cos\theta} \operatorname{ctg} \frac{\omega_0 D \cos\theta}{c} = 0$$

取 $\operatorname{ctg} \frac{\omega_0 D \cos\theta}{c} = \frac{c}{\omega_0 D \cos\theta} - \frac{\omega_0 D \cos\theta}{3c}$ 可以得到

$$\omega_0 \left(m + \frac{D}{3c} \right) = \frac{1}{\cos^2\theta} \frac{c}{\omega_0 D}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\cos\theta} \sqrt{\frac{c}{D \left(m + \frac{D}{3c} \right)}}$$

所以 $f_0 = \frac{c}{2\pi D \cos\theta} \frac{1}{\sqrt{\frac{mc}{D} + \frac{1}{3}}}$ (30)

同文献〔2〕的(35)式相比较，可见微穿孔板消声器消声量的共振频率比其壁面吸声系数的共振频率增加 $\frac{1}{\cos\theta}$ 倍而移向高频。

综上所述，计算微穿孔板消声器消声量的步骤大致分为三步：第一步，由(18)、(19)式计算 r, m ，也可由文献〔2〕所给出的一组诺模图查得。此外文献〔2〕指出， r 的实测值比理论计算值大 50%，这是由于孔径回缩、孔内有毛刺或孔端不整齐所致，此现象具有普遍性。因此应将(18)式中的系数 0.335 修正为 0.503。第二步，由方程(28)解出 $\sec\theta$ ，从而算出微穿孔板和空腔总的声抗率。第三步，由(14)式或(17)式计算消声器的传递损失。

四、非线性效应和近似公式

在以上推导过程中，我们假定声压和质点速度成线性关系，就是说声阻抗不随声级而变，这在声级不太大时是成立的。当高声级时，会产生非线性效应，在共振频率尤为显著。此时由于通过微孔的质点速度很大，会在附近局部范围内形成湍流，声压和速度不再成线性关系，声阻抗率中会包含非线性项。根据 Ingard 等人的实验研究^[5]，声抗率随孔中速度的变化不大，一般可不予考虑。而声阻率随孔中速度的变化则非常明显。在共振频率附近，考虑非线性效应时的声阻表达式为^[6]

$$r = \frac{r_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_0}{2}\right)^2 + \frac{2 P_m}{\pi \sigma^2 \rho_0 c^2 r_0}} \quad (31)$$

式中 P_m 为峰值声压，上式根号内后项通常比前项小得多，于是可得

$$r = r_0 + \frac{2 P_m}{\pi \sigma^2 \rho_0 c^2 r_0}$$

此式等 2 项即为非线性声阻。实际计算中声压幅值用起来很不方便，如以声压级 L_p 表示，则上式化为：

$$r = r_0 + \frac{2 \times 2.9 \times 10^{-5}}{\pi \sigma^2 \rho_0 c^2 r_0} 10^{\frac{L_p}{20}} = r_0 + \frac{1.31}{\sigma^2 r_0} 10^{\frac{L_p}{20} - 10} \quad (32)$$

在其他频率，由于声抗的作用，孔中速度较小，相应地(32)式变为

$$r = r_0 + \frac{1.31}{\sigma^2 \sqrt{r_0^2 + X^2}} 10^{\frac{L_p}{20} - 10} \quad (33)$$

这就是声阻的非线性效应修正式子。以此声阻值代入消声量公式中计算，总的趋势是使消声曲线共振峰降低，对远离共振峰的频带影

响很小。

由(14)式算得的数值和实测值相比，消声曲线的形状和共振峰的位置都良好的符合。但是同一切计算消声量的理论公式类似，其理论值往往比实测值高。其原因是多方面的。象金属板的固体传声、薄板振动产生再生噪声等，都使消声器实际上达不到理想的情形。在使用理论公式时我们发现，其偏离的程度与穿孔率和通道直径有密切关系，通过对多个微穿孔板消声器的正交实验总结，如将(14)式中的系数 $8 \cdot 68$ 修正为 $\sqrt{\frac{R}{\sigma}}$ ，得到一个经验公式，则计算值与实测值比较一致。

至此为止，我们已经完成了理论推导的整个工作。但是，计算式(17)式太复杂，不便于实际应用。在一定条件下，此式可进行适当的化简和近似。

除在共振频率附近之外， $\left[k^2 - \frac{2kX}{R(r^2 + X^2)} \right]^2$ 都要比 $\frac{4k^2 r^2}{R^2(r^2 + X^2)^2}$ 大得多，于是我们可化简 μ 的表达式如下：

$$\begin{aligned}
 2\mu^2 &= \frac{2kX}{R(r^2 + X^2)} - k^2 + \left[k^2 - \frac{2kX}{R(r^2 + X^2)} \right] \sqrt{1 + \frac{4k^2 r^2}{R^2(r^2 + X^2)^2 \left[k^2 - \frac{2kX}{R(r^2 + X^2)} \right]^2}} \\
 &\approx \frac{2kX}{R(r^2 + X^2)} - k^2 + \left[k^2 - \frac{2kX}{R(r^2 + X^2)} \right] \left\{ 1 + \frac{2k^2 r^2}{R^2(r^2 + X^2)^2 \left[k^2 - \frac{2kX}{R(r^2 + X^2)} \right]^2} \right\} \\
 &= \frac{2k^2 r^2}{R^2(r^2 + X^2)^2 \left[k^2 - \frac{2kX}{R(r^2 + X^2)} \right]} \quad (34)
 \end{aligned}$$

由此得到：

$$\alpha = \frac{kr}{R(r^2+x^2)\sqrt{k^2 - \frac{2Bx}{R(r^2+x^2)}}} = \frac{r}{R(r^2+x^2)\sqrt{1 - \frac{2x}{Rk(r^2+x^2)}}$$

根号内的后项是小量，又可取其幂级数展开式的前两项。

$$\alpha = \frac{r}{R(r^2+x^2)\left[1 - \frac{2x}{Rk(r^2+x^2)}\right]} = \frac{r}{R(r^2+x^2) - \frac{2x}{k}} \quad (35)$$

这样，近似的消声量计算公式就是：

$$TL = \sqrt{\frac{R}{5}} \frac{kr}{R(r^2+x^2) - \frac{2x}{k}} \quad (36)$$

在共振频率处，如通道半径比较大，还可满足近似条件，仍可使用近似式，各种情况下的计算表明当半径 \$B\$ 大于 \$10 \text{ cm}\$ 时，近似式的误差不超过 \$5\%\$（约 \$1 \text{ dB}\$ 左右），只有在 \$B\$ 小于 \$10 \text{ cm}\$ 的共振频率处误差较大，仍需由 (17) 式进行计算。其他所有情况，可直接用 (36) 式计算消声量。

下面对各种不同参数的微穿孔板消声器分别用精确式和近似式计算了消声量，计算结果列于图 3 (1—4) 中，图中实曲线为精确式计算值，虚线为化简式计算值。从图中看出，两条曲线是比较吻合的，特别是在共振峰以上，两条曲线重合为一条。在共振峰附近有所偏离，此时用近似式计算的消声量峰值偏高。

五、实验验证

微穿孔板消声器的消声量公式中含有多个参数，为了验证消声量与每个参数的关系，我们采用正交实验法，考虑三个因素两个水平。三个因素即通道直径、腔深和穿孔板。穿孔板的板厚、孔径、孔心距

