

A small, ornate globe on a wooden stand. The globe is covered in a map of the world, with a decorative band around the top. The stand is made of dark wood and has four legs.

岐戈

选择题卷



河北少年儿童出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

世界数学奥林匹克解题大辞典. 选择题卷/吴振奎
主编. 石家庄: 河北少年儿童出版社, 2002

ISBN 7-5376-2404-6

I. 世… II. 李… III. 数学课-中学-竞赛题-解
题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 77371 号

世界数学奥林匹克解题大辞典

选择题卷

中国数学奥林匹克委员会 南开大学数学系

河北少年儿童出版社出版

河北新华印刷一厂印刷

新华书店经销

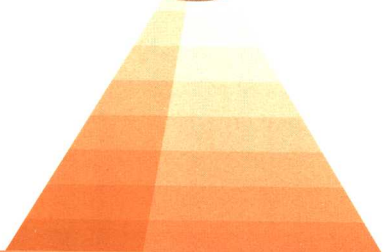
开本 850×1168 毫米 1/32 印张 34.125

2002 年 5 月第 1 版 2005 年 8 月第 2 次印刷

印数: 1—3000

ISBN 7-5376-2404-6

G·1288 定价: 50.00 元



世界数学奥林匹克解题大辞典

中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系





《世界数学奥林匹克解题大辞典》编委会

顾 问

吴大任

名誉主编

陈省身

主 编

周学光

副主编

许以超 李成章(常务) 侯自新
韩凤岐 袁宗沪

委 员

王连笑 刘玉翘 许以超 李成章
吴振奎 侯自新 张筑生 杜锡录
周学光 胡晓光 夏兴国 黄玉民
韩凤岐 袁宗沪 舒五昌

代数卷主编

黄玉民 夏兴国

几何卷主编

吴振奎 王连笑 刘玉翘

数论卷主编

王连笑

组合卷主编

李成章

选择题卷主编

吴振奎

序 言



王元

数学奥林匹克是对青少年极其有益的一项活动.它通过科学与趣味相统一的丰富多彩的题目,使许许多多的优秀学生在中学时期就经受了考验,接受了各种现代数学思想的熏陶,使他们提高了能力,增长了知识,开阔了眼界.数学奥林匹克活动的广泛开展,不仅丰富了中学生的课外活动,促进了中学数学教学的改革,而且发现和培养了一大批有才能的青年,这些青年将成为我国科学界在 21 世纪赶超世界先进水平的中坚力量.

数学竞赛中没有失败者.虽然每年参加中国数学奥林匹克的选手百余人,作为国家队出国参加国际数学奥林匹克的选手也只有六人,但是,那些因为运气不佳,培训不足,见识不广或临场发挥不理想等因素而没有获胜的学生也不是失败者.他们在参加竞赛及培训中所培养起来的求解难题的兴趣和欲望,那种永不满足,勇攀高峰的精神,分析问题的严密的逻辑思维,解决问题的灵活多样的应变能力以及对现代数学思想的理解和积累,正是进行成功的科学研究并在将来成为科学家的必要条件.因此说,这远比在一次竞赛中获胜更为宝贵.他们中的许多人进入大学后成为学习尖子,有些人正在攻读硕士和博士学位并成为数学研究队伍中的后起之秀,就是最有力的证明.即使对于那些进入大学后改学其他

序
言

专业的学生,他们也将因思维敏捷,头脑灵活,勇于创新 and 具有较强的数学能力而使自己终身受益.因此,数学奥林匹克必将继续下去.

数学奥林匹克已有一百多年的历史,且越来越受到重视.现在,每年举办数学奥林匹克的国家和地区已超过 70 个.已有的竞赛题目成千上万,其中构思独特,新颖别致,灵活深邃的题目有几千道之多,而且还在以每年几百道的速度继续增长.这些题目散载于国内外的各种书籍与杂志之中,任何个人手中的资料都很不完整,使用起来极不方便.这次河北少年儿童出版社邀请国内数学奥林匹克界的专家、教授和高级教练员共同精选了国内外数学奥林匹克的试题,并给出精辟、准确的解答,编写了这套《世界数学奥林匹克解题大辞典》.这是一次很有意义的壮举,是一项艰苦而又巨大的工程,是我国数学奥林匹克事业的一项基本建设.本书的出版,必将推动我国的数学奥林匹克事业稳步地向前发展,有助于我国在国际数学奥林匹克中保持优势,立于世界数学强国之林.就此我以兴奋的心情对这套解题大辞典的出版表示热烈的祝贺,并对在此书编写过程中付出辛勤劳动的各位作者和出版过程中做出多方面努力的编辑人员及支持本书出版的各位领导表示衷心的感谢.

近 10 年来,我国学生在国际数学奥林匹克中不断取得好成绩,我国所提供的候选题也接连被选为试题,这是值得高兴的事情.但是,我们也应清醒地看到,与一些先进国家相比,我国开展数学奥林匹克和参加国际数学奥林匹克的时间毕竟不长,这方面的资料也不很完全.因此,这套辞典的内容也是不很完全的.此外,以后每年新出现的竞赛题目也要补充进来.希望大家继续努力,不断完善这套大辞典的内容,为数学奥林匹克事业做出新贡献.



目 录

代数篇

第一章 数与式	3
第1节 整式与分式	3
第2节 根式	26
第3节 代数式的应用	43
第二章 代数方程	54
第1节 一元一次方程	54
第2节 一元二次方程	57
第3节 绝对值方程	86

第4节	一元高次方程	94
第5节	分式方程	101
第6节	无理方程	105
第三章	代数方程组	110
第1节	方程组	110
第2节	方程组的应用	116
第四章	代数不等式	139
第五章	初等代数函数	165
第1节	正、反比例函数,一次函数及其他	165
第2节	二次函数	171
第六章	初等超越函数(一)	183
第1节	指数与指数函数	183
第2节	对数与对数函数	190
第七章	初等超越函数(二)	207
第1节	三角函数	207
第2节	解三角形	218
第3节	一般函数	243
第八章	初等超越方程	270
第1节	指数方程	270
第2节	对数方程	277
第3节	三角方程	286
第4节	函数方程	292
第九章	初等超越不等式	297
第1节	指数不等式	297
第2节	对数不等式	300
第3节	三角不等式及应用	305
第十章	数列与极限	319
第1节	数列的项	319

第2节 等差数列	329
第3节 等比数列	337
第4节 某些数列的和与积	345
第5节 无穷数列和与极限	355
第十一章 二项式定理	363
第十二章 复数	372
第十三章 最大与最小(极大与极小)	390
第1节 代数函数中的极(最)值	390
第2节 指数与对数函数中的极(最)值	409
第3节 三角函数中的极(最)值	412
第4节 数列中的最值	420
第十四章 初等概率	424
第十五章 集合与论证	443
第1节 集合与映射	443
第2节 命题与运算	452

几何篇(上) (平面几何)

第十六章 点,线,面	465
第十七章 三角形	478
第1节 三角形中的角	478
第2节 三角形中的边、线段	498
第3节 三角形的面积	542
第4节 三角形的形状与计数	567
第十八章 四边形	580
第1节 四边形	580
第2节 平行四边形	596
第3节 矩形	607

第4节 正方形	617
第5节 梯形	634
第十九章 多边形	646
第1节 五边形,六边形,……	646
第2节 n 边形	653
第3节 折多边形及其他	663
第二十章 圆	671
第1节 圆与直线	671
第2节 圆与三角形	688
第3节 圆与四边形、多边形	710
第4节 圆与圆	722
第二十一章 覆盖与折叠	734

几何篇(中) (立体几何)

第二十二章 直线与平面	747
第二十三章 多面体	756
第二十四章 旋转体	776

几何篇(下) (解析几何)

第二十五章 点坐标,直线方程与性质	787
第二十六章 圆锥曲线	805
第二十七章 极(最)值与杂例	827

数论篇

第二十八章 算术	839
----------	-----

第二十九章 整除	855
第1节 数的整除与同余	855
第2节 式的整除与分解	868
第三十章 整数	881
第1节 奇数和偶数	881
第2节 素数	885
第3节 完全平方数	892
第三十一章 不定方程与不定方程组	901
第三十二章 数字和与计数	924
第1节 数与数字和, 积	924
第2节 计数	931
第3节 整边三角形	945
第三十三章 高斯函数与进制	954
第1节 整数的尾(个位)数 $\langle x \rangle$	954
第2节 高斯函数 $[x]$	962
第3节 实数的小数部分 $\{x\}$	975
第4节 循环小数	977
第5节 进制	979

组合篇

第三十四章 组合数	989
第三十五章 涂色, 取物, 剖分	993
第1节 涂色问题	993
第2节 取物问题	1000
第3节 剖分问题	1007
第三十六章 规律, 运动, 博弈	1017
第1节 规律	1017

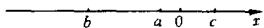
第2节	运动问题	1032
第3节	竞技与博弈	1045
第三十七章	格点	1054
附录		
	索引	1062
	历届国际数学奥林匹克概况	1077
	编者的话	1079

代 数 篇

第一章 数与式

第1节 整式与分式

1.1 实数 a, b, c 在数轴上的位置如下图所示:



则代数式 $|a| - |a+b| + |c-a| + |b-c|$ 的值等于
(A) $-a$. (B) $2a-2b$. (C) $2c-a$. (D) a . (E) 0 .

(中国部分省、市初中数学通讯赛, 1985年)

[解] $\because a < 0, \therefore |a| = -a$.
 $\because a < 0, b < 0, \therefore |a+b| = -(a+b)$.
 $\because c > 0, a < 0, \therefore |c-a| = c-a$.
 $\because b < 0, c > 0, \therefore |b-c| = -(b-c)$.
 $\therefore |a| - |a+b| + |c-a| + |b-c|$
 $= -a - [-(a+b)] + (c-a) + [-(b-c)]$
 $= -a + a + b + c - a - b + c = 2c - a$.

故选(C).

1.2 若 $x < -2$, 那么 $|1 - |1+x||$ 等于

(A) $2+x$. (B) $-2-x$. (C) x . (D) $-x$. (E) -2 .

(第25届美国高中数学考试, 1974年)

[解] 按定义 $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$
 若 $x < -2$, 那么 $1+x < 0$,
 则 $|1+x| = -(1+x)$,
 $\therefore |1-|1+x|| = |1+1+x| = |2+x|$.
 又若 $x < -2$, 那么 $2+x < 0$, 则 $|2+x| = -2-x$.
 故选(B).

1.3 化简 $\frac{a^2-b^2}{ab} - \frac{ab-b^2}{ab-a^2}$ 到最简项是

- (A) $\frac{a}{b}$. (B) $\frac{a^2-2b^2}{ab}$. (C) a^2 .
 (D) $a-2b$. (E) 以上答案都不正确.

(第1届美国高中数学考试, 1950年)

[解] 原式 $= \frac{a^2-b^2}{ab} - \frac{b(a-b)}{a(b-a)} = \frac{a^2-b^2}{ab} + \frac{b}{a}$
 $= \frac{a^2-b^2+b^2}{ab} = \frac{a^2}{ab} = \frac{a}{b}$,

故选(A).

1.4 化简 $\frac{a^4-a^2b^2}{(a-b)^2} \div \frac{a(a+b)}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a}$ 其结果为

- (A) $\frac{a^2}{a-b}$. (B) $\frac{a^2}{a+b}$. (C) $\frac{b^4}{a-b}$. (D) $\frac{b^4}{a+b}$.

(中国北京市初中数学竞赛, 1982年)

[解] 注意到

$$\begin{aligned} & \frac{a^4-a^2b^2}{(a-b)^2} \div \frac{a(a+b)}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a} \\ &= \frac{a^2(a+b)(a-b)}{(a-b)^2} \cdot \frac{b^2}{a(a+b)} \cdot \frac{b^2}{a} \\ &= \frac{b^4}{a-b}. \end{aligned}$$

故选(C).

1.5 若 x, y 和 $2x + \frac{y}{2}$ 是非零数, 那么

$$(2x + \frac{y}{2})^{-1} [(2x)^{-1} + (\frac{y}{2})^{-1}]$$