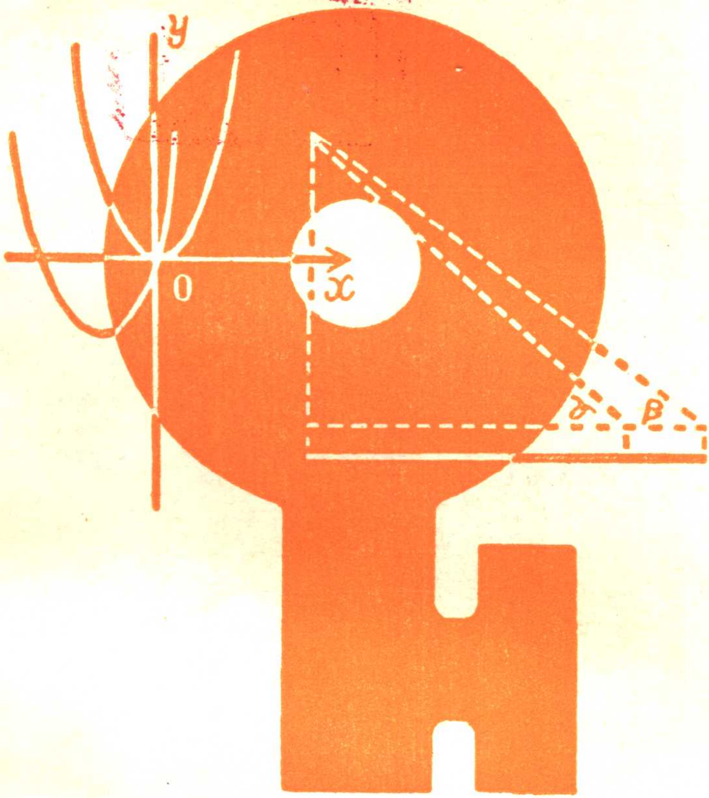


代数问答

DAI SHU WEN DA

江苏少年儿童出版社

初 中 二 年 级

代 数 问 答

王 永 建　　主编

江苏少年儿童出版社

初中代数问答

二 年 级

江苏少年儿童出版社出版
江苏省新华书店发行　　海门印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32 印张3.25 字数72,000
1985年6月第1版　1985年6月第1次印刷
印数1—227,330册

书号：R7352·075　定价：0.48元
责任编辑　冯家俊

目　　录

第九章　数的开方

1．这一章主要有哪些内容？

答：本章主要内容是数的开平方、开立方并由此引出实数的概念。

开方是乘方的逆运算，是第六种运算。本章教材着重研究二次方根即平方根，为此，首先需要研究二次方根的定义，尤其是算术根的意义。

求一个数的平方根的运算方法，教材P.36“附录”中作了详细的说明，显然，把一个数开平方，过程是比较复杂的。为了计算上的方便，于是书上专门讲了“平方根表”一节，与此类似的，P.19§9-5又讲了“立方根表”。有了这两个表，我们的运算就方便得多。

把一个数开方，许多情况下是开不尽的，即开出的结果，既不是有限小数，也不是无限循环小数，而是一种新的数——无限不循环小数，它就是无理数。有了无理数，加上原来学过的有理数，数系发展到实数，这是数的概念的又一次扩张，而且是一次很重要的扩张。

2．为什么要学习开方？

答：知道两个数，求它们的和，这是加法。如已知两数a、b，它们的和是c，则

$a+b=c$。

知道了两数的和以及两个加数中的某一个，要求另一个加数，这是减法。如已知两数的和是c，某一个加数是a，则

$c-a=b$。

加法与减法是一对互逆的运算。

知道两个数，求它们的积，这是乘法。如已知两数为a、b，它们的积是c，则

$$a \cdot b = c.$$

知道了两数的积以及两个乘数中的某一个，要求另一个乘数，这是除法。如已知两数的积是c，某一个乘数是a，则

$$c \div a = b.$$

乘法与除法是一对互逆的运算。

知道底数及指数，求幂，这是乘方。如底数为a，指数为b，则幂为

$$c = a^b.$$

知道了幂，又知道了指数，求底数，这是开方。如幂为c，指数为b，则底数

$$a = \sqrt[b]{c}.$$

乘方和开方，是一对互逆的运算。

正如加、减、乘、除、乘方五则运算都是由于实际运算的需要而产生的一样，开方也是由于实际运算的需要而产生的。我们在初一学习了一次方程，解一次方程并不需要开方。但是，根据实际问题列出的方程并不一定都是一次方程，常常是高于一次的，为了解这些方程，不掌握开方的法则是不行的。在初二代数中，开方——尤其是开平方，是学习第十章二次根式以及第十一章一元二次方程的基础。

3．为什么说乘方的逆运算有两种？

答：加法和乘法都只有一种逆运算，它们分别叫做减法和除法。而乘方却有两种逆运算问题：求底数和求指数。

在等式

$$a^b = c$$

中，共有三个数，若已知幂c及指数b，求底数a，这种运算叫做开方，这就是本章所学的内容。如果已知幂c及底数a，求指数b，这显然不是开方，而是另一种新的运算——第七种运算，它也是乘方的一种逆运算，我们将在初三代数中学这种运算。所以，乘方有两种逆运算，这是与一级运算、二级运算不同的地方。

为什么乘方有两种逆运算，而加法和乘法却只有一种逆运算呢？这是因为参加加法运算的两个数的地位是一样的，它们的位置可以交换；乘法也是这样；而乘方的底数和指数地位却不一样，一般来说是不能交换位置的（$a^b \neq b^a$），所以参加加法或乘法运算的两个数可以用同一种方法求出来，而乘方的底数和指数就要用不同的方法来求。

4．以加法、乘法、乘方作为原运算，说明它们的逆运算的复杂性。

答：逆运算比之原运算是复杂的，它主要表现在以下两个方面：

第一，在一定数的集合内，原运算可以进行，而它们的逆运算就不一定可行。比如，在正有理数的集合内，加法都是有定义的，即如果a、b是两个正有理数，则a＋b必然也是正有理数。但是，a－b就未必有定义了，因为当$a \leqslant b$时，a－b就不是正有理数。

又如，在整数集合内，乘法都是可以进行的，即如果a、b是两个整数，则a·b必然也是整数。但是，$\frac{a}{b}$就未必是可行的，因为a不一定能被b整除。

与此类似的，如在实数的集合内，乘方都是可行的，即如果a、b是两个实数，则a^b必定也是实数。但是，在实数集合内，

开方就未必都是可行的。事实上，负实数开偶次方就没有意义。

第二，运算如果可行，结果也往往不是唯一的。加、减、乘、除、乘方五种运算如果可行，结果都是唯一的。但是，开方就不然，比如，一个正数的平方根，应该是一对相反的数：

9的平方根等于$+3$和-3。

正因为逆运算比它的原运算复杂，因此，我们在学习逆运算，尤其是开方这部分内容时要特别小心，弄清教材中所作的某些说明和规定，注意题目的条件，不能想当然地去解题，不然是容易出错的。

5．为什么负数没有平方根？

答：负数不仅没有平方根，任何偶次方根都不存在。

求负数的平方根，比如说求-5的平方根，就是要求出这样的一个数，它的平方等于-5，我们知道，任何数的平方都不可能等于-5，因此，所求的这样的数是不存在的。因而我们说，负数没有平方根。

6．"$\sqrt{\ }$"是怎么产生的？

答：公元1220年，意大利人飞波纳奇第一次使用符号"R"来表示平方根号，这个符号是从拉丁文Radix取它的头尾两个字母合并得来的。飞波纳奇是一位熟悉数学的商业家，曾到东方旅行过，回到意大利后，他把旅途中搜集到的许多算术和代数的材料写成《算盘之书》。

十七世纪初叶，法国数学家笛卡儿在他的著作《几何学》中第一次用"$\sqrt{\ }$"表示根号。这本书的名字叫《几何学》，实际上大部分内容是研究代数方程的，在这本书中，出现了象

$$\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$$

的式子，和今天书写稍有不同的，只是他仍旧把a^2写作aa，b^2写作bb。"$\sqrt{\ }$"这个符合包括两个意思：

"√"是由拉丁字母"r"演变而来，它的原词是"root"，是方根的意思；

"$\sqrt{\ }$"上面这条横线"—"是括线，相当于我们现在使用的括号。

把符号"√"和"—"连在一起，既有结合符号的意思，又有运算符号的意思。如上面所讲，式子

$$\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$$

中，首先根据括线"—"所在，应先算$\frac{1}{4}aa+bb$，然后根据根号"√"把$\frac{1}{4}aa+bb$开平方，最后才能与$\frac{1}{2}a$合并。

三次方根符号"ꟿ"最早是德国数学家鲁道夫在1525年首先使用的。今天我们使用的符号"$\sqrt[3]{\ }$"是十七世纪时法国人首先使用的。

***7．为什么说$\sqrt{2}$是无理数？**

答：在本书的初一分册中，我们曾经讲过，任何有理数都可以用分数来表示。要证明$\sqrt{2}$是无理数，就是要证明$\sqrt{2}$不可能是一个有理数，也就是要证明它不可能用一个分数来表示。

我们用一种新的方法来证明它。要证明"$\sqrt{2}$是无理数"，先假设"$\sqrt{2}$是有理数"，然后从这个假设出发，逐步进行推导，最后推出矛盾的结果。之所以推出这样矛盾的结果，就是因为原来作出"$\sqrt{2}$是有理数"的假设是不合理的，既然$\sqrt{2}$不可能是有理数，它就是无理数了。

下面我们来证明这个问题：

设$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$，（m、n是正整数，且$\frac{n}{m}$是最简分数）

则$2=\frac{n^2}{m^2}$，

$n^2=2m^2$。　　　　（1）

由等式（1）可知n^2含有2的因子，n一定也含有2的因子。

设$n=2n_1$　（n_1是正整数），

∴ $(2n_1)^2=2m^2$，

即$4n_1^2=2m^2$，

$2n_1^2=m^2$。　（2）

由等式（2）可知m^2含有因子2，m也一定含有2的因子，这样m、n都含有因子2，这与$\frac{n}{m}$是最简分数的假设是矛盾的。

∴$\sqrt{2}$不是有理数，它是一个无理数。

$\sqrt{2}$是一个无理数，用小数来表示，它是一个无限不循环小数，在实际计算时，我们常常需要将$\sqrt{2}$取到一定精确度的有限小数。最原始的办法，是把2按照开平方的法则一位小数一位小数地开下去，当然这种方法是很笨的。随着电子计算机的发展，计算$\sqrt{2}$到很多位数的小数，已经是不困难的事了。1971年10月，美国哥伦比亚大学杜卡，在利用电子计算机工作了47.5小时以后，把$\sqrt{2}$算到小数点后1,000,082位的精确数值，其实这种做法的实际意义是不大的。

8．数的开方，越开越小吗？

答：数的开方，有时越开越小，但有时也可能越开越大。

81开平方，算术根是9；9再开平方，取算术根，得3；3

再开平方，查平方根表得1.732，9—3—1.732，的确是越开越小。

0.0081开平方，算术根是0.09，即

$\sqrt{0.0081}=0.09$，

0.09再开平方，算术根是0.3，即

$\sqrt{0.09}=0.3$；

这样开下去，越开越大，0.09—0.3—……

可见，在正数的范围内，有的数开方后变小，有的数开方后反而变大。对开平方而言，在$\sqrt{a}$中，如$a>1$，则$\sqrt{a}<a$，越开越小；如$0<a<1$，则$\sqrt{a}>a$，越开越大。把正数开方都理解为越开越小，这种观念是错误的。

9．“9的平方根”与“$\sqrt{9}$”相同么？

答：这两个概念是不完全相同的，9的平方根$=\pm\sqrt{9}=\pm3$；$\sqrt{9}=3$。

∴9的平方根指的是一对相反的数，即$\sqrt{9}$与$-\sqrt{9}$；而$\sqrt{9}$只是9的算术平方根。

10．什么叫算术根？为什么要研究算术根？

答：教材对算术根的定义讲得很清楚：“正数a的正的平方根也叫做a的算术平方根”，“零的算术平方根仍旧是零”。对于这个定义，我们要注意以下两点：

第一，被开方数是正数或零，负数谈不上算术根。

第二，方根的值是正数或零。

求一个正数的平方根，只要先求出这个数的算术平方根，就可以直接写出这两个平方根来。例如，$\sqrt{9}=3$，那么9的平方根就是$\pm\sqrt{9}=\pm3$，显然，求一个正数的平方根，答案是一对相反的数，但掌握其中算术根具有更重要的意义，因为只要知道了算术根，另一个根就不难写出了。

11．对于$\sqrt{a}$中的a有什么规定?

答:因为负数没有平方根，所以$\sqrt{a}$中的被开方数a一定要大于或等于零,即$a\geqslant 0$，如果$a<0$，$\sqrt{a}$是没有意义的。

例如,$\sqrt{(-6)^2}$不等于-6，因为这里a相当于$(-6)^2$即36,是正数,36的算术平方根是6，而不是-6。

12．指出下题中的错误。

$\because 4-10=9-15,$

等式两边同加$6\frac{1}{4}$:

$$4-10+6\frac{1}{4}=9-15+6\frac{1}{4},$$

即
$$2^2-2\times 2\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2=3^2-2\times 3\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2.$$

等式两边开平方，得到

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}.$$

两边同加$\frac{5}{2}$，得到$2=3$.

答:错误出自于等式

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2.$$

两边开平方得到

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}.$$

$\because 3-\frac{5}{2}>0$， $\therefore \sqrt{\left(3-\frac{5}{2}\right)^2}=3-\frac{5}{2}$；

而$\because 2-\frac{5}{2}<0$， $\therefore \sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2}$

$=\frac{5}{2}-2$。

现在把$\sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2}=2-\frac{5}{2}$，这个式子是错误的。

13．指出下列各题中的错误：

（1） $\sqrt{0.121}=0.11$；

（2） $\sqrt{4.9}=0.7$；

（3） $\sqrt{4.25}=2.5$；

（4） $\sqrt{4000}=200$；

（5） $\sqrt{1681}=49$。

答：

（1） $\sqrt{0.121}\approx 0.3479$， $\sqrt{0.0121}=0.11$。

（2） $\sqrt{4.9}\approx 2.2136$； $\sqrt{0.49}=0.7$。

（3） $\sqrt{4.25}\approx 2.0616$；整数部分和小数部分不能分别开方。

（4） $\sqrt{4000}\approx 63.2456$； $\sqrt{40000}=200$。

（5） $\sqrt{1681}=41$；被开方数分成两位一节，不能各自开方。

14．什么叫实数？实数包括哪些数？

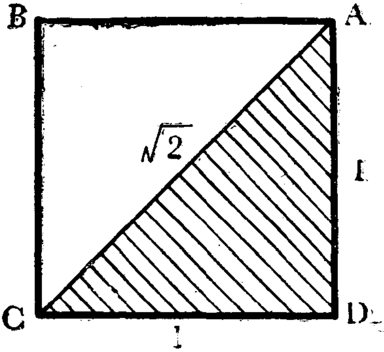
答：有理数和无理数统称为实数。

实数系如下表所示：

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数
      - 零
      - 负整数
    - 分数（有限小数或无限循环小数）
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数（无限不循环小数）
    - 正无理数
    - 负无理数

15．无理数是怎样产生的？

答：公元前六世纪，有一个以数学家毕达哥拉斯为首的数学学派叫毕达哥拉斯学派，这个学派认为整数是上帝创造的，分数是两个整数的比，世界上除了整数和分数外，不可能再有其它的什么数了。可是后来，毕达哥拉斯的一个学生希伯斯否定了这个论断。希伯斯研究了边长为1的正方形。根据毕达哥拉斯的发现，在直角三角形中，两条直角边的平方和等于斜边的平方。根据这个定理，希伯斯算出了直角三角形（ACD）的斜边(AC)的长：



（图 1）

$$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

希伯斯经过研究发现，$\sqrt{2}$既不是整数，又不是分数。（我们在本章第七问中已证明了$\sqrt{2}$的无理性。）也就是说$\sqrt{2}$不是有理数，而是一种新数。

希伯斯的发现动摇了毕达哥拉斯学派的基础，实际上也

就是动摇了反动“神权论”的基础，这在当时来说，是万万不允许的，于是毕达哥拉斯学派的人对希伯斯施加压力，竭力封锁他的发现。但希伯斯不畏强暴，坚持宣传自己的观点，最后在一艘海船上，他被凶手残酷地抛进大海淹死了。

16．无理数和根数有什么区别？

答：一个数开方开不尽，就得到无理数，这种无理数就是不尽根数，如$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{5}$等等。

根数常常都是无理数，但无理数并不一定都是根数。例如，对于任意一个圆来说，它的周长与直径的比都是一个定值，这个定值就是圆周率

$$\pi = 3.14159265358979323\cdots\cdots$$

它是一个无限不循环小数，就是一个无理数。

以后我们还会学到许多并不是根数的无理数。由此可见，不尽根数只是无理数的一部分，无理数中还包括不是根数的无理数。

17．最早的圆周率是怎样计算的？

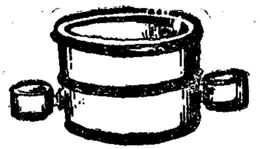
答：四千年前，埃及人已经能应用不少数学知识解决实际问题，其中就用到圆周率π，因为在进行有关圆形和球形器皿以及建筑物的计算时，就需要用到它。从后来发现的埃及古代数学文献“纸草”中了解到，当时取$\pi \approx 3.16$，这是世界上所见到的最早的圆周率。现在看来，π的这个近似值误差较大，但当时能算到这样的数值，已经很不容易了。

我国东汉（公元25年）以前，一直认为“径一周三”，也就是$\pi \approx 3$，这叫古率。公历纪元初年，汉朝的度量衡不统一，商业贸易很不方便，为了解决这个矛盾，当时的统治者命令数学家刘歆用金属制造了一种圆柱形的标准量器，名字叫做“律嘉量斛”。这种量斛是怎样计算出来的，当时没有记载，但是，我

们北京故宫博物院里现在还保存着一具这样的量斛。根据上面的说明不难推出，当时取π的近似值是

$$\pi\approx3.1547.$$

这个结果精确到0.1,比古率有些进步，但还是很不精确的。



律嘉量斛图

（图 2）

魏晋（公元265年左右）时，我国数学家刘徽应用割圆的方法，一直算到圆内接正三千零七十二边形，从而推得

$$3.141024<\pi<3.142704。$$

他的计算精确到0.01,比刘歆的结果有了进步。人们为了纪念他，把$\pi\approx3.14$称为徽率,我国理论数学的发展不及希腊,但刘徽得到的成就却超过他同时代的外国数学家。

18. 祖冲之对π的研究有何伟大贡献？

答：到了南北朝，我国伟大的数学家祖冲之（429—500）继续使用刘徽的割圆法，一直推算到圆内接正二万四千五百七十六边形，根据唐朝大臣刘徽等人所著的《隋书》的记载："祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒（nǜ）数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二数之间，密率：圆径一百一十三，周三百五十五；约率：圆径七，圆周二十二"。这里，"盈数"和"朒数"分别表示"过剩近似值"与"不足近似值"的意思，祖冲之计算出

$$3.1415926<\pi<3.1415927.$$

古代数学家习惯用分数来表示小数，祖冲之用下面两个分数表示π的近似值：

约率：$\pi = \frac{22}{7}$；

密率：$\pi = \frac{355}{113}$。

祖冲之当时没有我们今天这样的计算条件，但能把π算出精确到小数六位，实在是很不容易的事。在国外一千多年以后，欧洲人安托尼兹才算到同样精确度的小数。

祖冲之从小就喜欢钻研天文、数学，重视实践，经常提出大胆的想法，再通过实践来检验这些想法是否正确。他所写的数学专著《缀（zhuì坠）术》，到唐朝时被定为学校的数学教材，中世纪时，日本、朝鲜的学校也采用它作为课本，可惜这部书后来失传了。

19．怎样记忆圆周率？

答：圆周率是一个无限不循环小数，没有一定的规律，记忆起来很不方便，所以，人们常常想一些办法来帮助记忆。

有这样一段故事。从前，有个私塾先生要学生背圆周率到小数二十位，规定学生如果背不出来就不准回家吃饭，自己却上山喝酒去了。学生背了好长时间都背不得，一个学生急中生智，编了这样几句话：

“山巅一寺，一壶酒，尔（你）乐，苦煞吾，把酒吃，酒杀
3 . 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3

尔，杀不死，乐而乐！”
2 3 8 4 6 2 6

大家在这几句话的启发下，很快就背出二十二位小数。

在国外，由于单词发音不象汉字一字一音，记圆周率更为