标准化题型

解题思路精析

数学·初中三年级用

山西高校联合出版社

标准化题型解题思路精析

（代数·初三年级用）

耿淑云　薛喜娥
畅　俊　阴卫星
卢云飞

山西高校联合出版社

责任编辑：张小芒
封面设计：阿　媛

标准化题型解题思路精析

（代数·初三年级用）

耿淑云　薛喜娥
畅　俊　阴卫星
卢云飞

*

山西高校联合出版社出版发行

（邮编：030012　太原市并州路 267 号）

各地新华书店发行　山西省新闻出版局老龄委晋阳印刷厂印刷

*

开本：32K　印张：31.5 个印张　字数：673.9 千字

1996 年 1 月第 1 版　1996 年 1 月　第 1 次印刷

印数：1——10000 册

*

ISBN 7-81032-836-0
0·77　全套定价：26.40 元

目　录

第十二章　一元二次方程

一、一元二次方程

习　题12.1

A　组

2. 把下列方程先化成一元二次方程的一般形式，写出它的二次项系数、一次项系数及常数项：

(1)$6x^2=3-7x$；　　(2)$5x^2+5=26x$；

(3)$3x(x-1)=2(x+2)-4$；

(4)$(2x-1)^2-(x+1)^2=(x+3)(x-3)$；

(5)$(3y+2)^2=4(y-3)^2$；

(6)$(y+\sqrt{y})(y-\sqrt{y})+(2y+1)^2=4y-5$.

B　组

1. 写出下列一元二次方程的二次项系数、一次项系数及常数项：

(1)$abx^2+cx+d=0\quad(ab\neq0)$；

(2)$(m-n)x^2+m+n=0\quad(m\neq n)$.

2. 把方程 $mx^2-nx+mx+nx^2=q-p\quad(m+n\neq0)$ 化成一元二次方程的一般形式，再写出它的二次项系数、一次项系数及

常数项。

答案：

A 组

2. (1) $6x^2+7x-3=0, 6, 7, -3$；

(2) $5x^2-26x+5=0, 5, -26, 5$；

(3) $3x^2-5x=0, 3, -5, 0$；

(4) $2x^2-6x+9=0, 2, -6, 9$；

(5) $5y^2+36y-32=0, 5, 36, -32$；

(6) $5y^2-y+6=0, 5, -1, 6$.

B 组

1. (1) ab， c， d；　(2) $m-n$， 0， $m+n$.

2. $(m+n)x^2+(m-n)x+p-q=0, m+n, m-n, p-q$.

【精析】

A 组

2. (4)方法Ⅰ：方程的左边利用完全平方公式展开，方程的右边利用平方差公式展开得：

$4x^2-4x+1-(x^2+2x+1)=x^2-9$.

去括号，移项，合并同类项，得方程的一般形式：

$2x^2-6x+9=0$.

方法Ⅱ：方程左边先用平方差公式分解因式，得：

$$[(2x-1)+(x+1)][(2x-1)-(x+1)]=(x+3)(x-3),$$

$$3x(x-2)=x^2-9,$$

$$3x^2-6x=x^2-9,$$

得一般式：$2x^2-6x+9=0$.

(6) $y^2-(\sqrt{y})^2+4y^2+4y+1=4y-5$,

$y^2-y+4y^2+6=0$,

$5y^2-y+6=0.$

B 组

2. 将含有 x^2 的项和含有 x 的项分别合并同类项，得

$(m+n)x^2+(-n+m)x=q-p$

整理，得一元二次方程的一般形式

$(m+n)x^2+(m-n)x+(p-q)=0.$

容易看出二次项系数为 $(m+n)$，一次项系数为 $(m-n)$，常数项为 $(p-q)$。

12.2 一元二次方程的解法

练 习(第 8 页)

2. 解下列方程：

(1) $(2x-3)^2=5$；　　(2) $(x+1)^2-12=0$；

(3) $(x-5)^2-36=0$；　　(4) $(6x-1)^2=25$.

答案：

2. (1) $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$；

(2) $x_1=-1+2\sqrt{3}$，$x_2=-1-2\sqrt{3}$；

(3) $x_1=11$，$x_2=-1$；　　(4) $x_1=1$，$x_2=-\dfrac{2}{3}$.

【精析】

2. (2) 将原方程变形为

$$(x+1)^2=12.$$

开方得

$$x+1=\pm 2\sqrt{3},$$
$$x=-1\pm 2\sqrt{3},$$
$$\therefore x_1=-1+2\sqrt{3}, x_2=-1-2\sqrt{3}.$$

(4)直接开方得

$$6x-1=\pm 5,$$
$$6x=1\pm 5,$$
$$x=\frac{1\pm 5}{6},$$
$$\therefore x_1=\frac{1+5}{6}=1, x_2=\frac{1-5}{6}=-\frac{2}{3}.$$

练　　习(第 12 页)

1. 填空:

(1)　$x^2+6x+\quad=(x+\quad)^2$;

(2)　$x^2-5x+\quad=(x-\quad)^2$;

(3)　$x^2+\frac{4}{3}x+\quad=(x+\quad)^2$;

(4)　$x^2-\frac{5}{2}x+\quad=(x-\quad)^2$;

(5)　$x^2+px+\quad=(x+\quad)^2$;

(6)　$x^2+\frac{b}{a}x+\quad=(x+\quad)^2$.

答案:

1. (1) 9, 3;　(2) $\frac{25}{4}$, $\frac{5}{2}$;　(3) $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{3}$;

(4) $\frac{25}{16}$, $\frac{5}{4}$;　(5) $\frac{P^2}{4}$, $\frac{P}{2}$;　(6) $\frac{b^2}{4a}$, $\frac{b}{2a}$.

【精析】

1. 本题的六个小题都是同一类型的填空题,等式右边是

两数和或差的平方,左边是右边完全平方式的展开式。根据完全平方公式的结构特征可知,等式左边的空应为右边括号中第二项的平方,而寻找该项可将 x 的一次项写成“x 与另一个数的积的 2 倍”,那么这另一个数就是右边括号中的第二项,由此很容易地就得出了左边空上的数,如第(6)小题,先将 x 的一次项$\frac{b}{a}x$写成 $2\cdot\frac{b}{2a}x$ 的形式,则右边括号中的空应填“$\frac{b}{2a}$”,左边的空是该项的平方“$\frac{b^2}{4a^2}$”。

想一想(第 12 页)

1. 当 $x^2=c$ 时,c 必须是一个非负数,方程才有解,为什么?

2. $a^2+2ab+b^2$ 是一个完全平方式,即:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

试用上式说明,

$$x^2+8x$$

必须加上 4^2(即一次项系数 8 的一半的平方),才能得到一个完全平方式。

【精析】

1. 当 c 为负数时,$x^2=c$ 在实数范围内无意义,因为任何一个实数的平方都不能成为负数。

2. 完全平方公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ 的意义是两个数的平方和加上这两个数积的 2 倍,等于这两个数和的平方,式子 x^2+8x 中将 x 看作第一个数,8x 看作两数积的 2 倍,那么第二个数就是 4,所以还必须加上第二个数的平方“4^2”,才能等于两数和的平方,构成完全平方式。

练　习(第 16 页)

2. 用公式法解下列方程：

(1) $2x^2+5x-3=0$；　　(2) $6x^2-13x-5=0$；

(3) $2y^2-4y-1=0$；　　(4) $\frac{5}{2}y^2+2y=1$；

(5) $t^2+2t=5$；　　(6) $p(p-8)=16$；

(7) $0.3x^2+x=0.8$；　　(8) $x^2+3=2\sqrt{3}x$.

3. 用公式法解方程 $x^2+3x-5=0$(精确到 0.01).

4. 解关于 x 的方程 $2x^2-mx-n^2=0$.

答案：

2. (1) $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-3$；

(2) $x_1=\frac{2}{5}, x_2=-\frac{1}{3}$；

(3) $y_1=1+\frac{\sqrt{6}}{2}, y_2=1-\frac{\sqrt{6}}{2}$；

(4) $y_1=\frac{-2+\sqrt{14}}{5}, y_2=\frac{-2-\sqrt{14}}{5}$；

(5) $t_1=-1+\sqrt{6}, t_2=-1-\sqrt{6}$；

(6) $p_1=4+4\sqrt{2}, p_2=4-4\sqrt{2}$；

(7) $x_1=\frac{2}{3}, x_2=-4$；

(8) $x_1=x_2=-\sqrt{3}$.

3. $x_1=1.19$，　$x_2=-4.19$.

4. $x_1=\frac{m+\sqrt{m^2+8n^2}}{4}, x_2=\frac{m-\sqrt{m^2+8n^2}}{4}$.

【精析】

2.(4)方法Ⅰ：

解：$\frac{5}{2}y^2+2y=1$，

$$\frac{5}{2}y^2+2y-1=0.$$

把 $a=\frac{5}{2}$，$b=2$，$c=-1$ 代入公式得

$$y=\frac{-2\pm\sqrt{4+10}}{5}=\frac{-2\pm\sqrt{14}}{5},$$

$$y_1=\frac{-2+\sqrt{14}}{5},y_2=\frac{-2-\sqrt{14}}{5}.$$

方法Ⅱ：

将方程两边同乘以 2 变为整数系数方程

$$5y^2+4y-2=0.$$

把 $a=5$，$b=4$，$c=-2$ 代入公式得

$$y=\frac{-4\pm\sqrt{16+40}}{10}=\frac{-4\pm2\sqrt{14}}{10}=\frac{-2\pm\sqrt{14}}{5}$$

$$y_1=\frac{-2+\sqrt{14}}{5},y_2=\frac{-2-\sqrt{14}}{5}$$

一般来说，将方程中的分数系数变为整数系数代入方程能使运算简便，但比较上述两种方法发现，方法Ⅱ并不比方法Ⅰ简单，这是因为对于方程“$\frac{5}{2}y^2+2y+1=0$”其二次项系数 $a=\frac{5}{2}$，是分母为“2”的分数，而公式中出现的是“4ac”和“2a”，正好是 a 的偶数倍，而且 a，b，c 中只有 a 一个分数，所以直接代入公式计算更为简单。

(6)$p(p-8)=16$

解：$p^2-8p=16$

把 $a=1,b=-8,c=-16$ 代入公式得

$$p=\frac{8\pm\sqrt{64+64}}{2}=\frac{8\pm8\sqrt{2}}{2}=4\pm4\sqrt{2},$$

$$p_1=4+4\sqrt{2},\quad p_1=4-4\sqrt{2}.$$

(7)$0.3x^2+x=0.8.$

解：方法 I

$$0.3x^2+x-0.8=0$$

把 $a=0.3,b=1,c=-0.8$ 代入公式得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+0.96}}{0.6}=\frac{-1\pm1.4}{0.6},$$

$$x_1=\frac{0.4}{0.6}=\frac{2}{3},\quad x_2=\frac{-2.4}{0.6}=-4.$$

方法 I：

方程两边同乘以 10，将小数系数变为整数系数，方程变为

$$3x^2+10x-8=0.$$

把 $a=3,b=10,c=-8$ 代入公式得

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{100+96}}{6}=\frac{-10\pm14}{6},$$

$$x_1=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},x_2=\frac{-24}{6}=-4.$$

显然方法 I 较为简便。

(8)$x^2+3=2\sqrt{3}x.$

解：$x^2-2\sqrt{3}+3=0.$

把 $a=1,b=-2\sqrt{3},c=3$ 代方公式得

$$x=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-12}}{2}=\frac{2\sqrt{3}\pm0}{2}=\sqrt{3},$$

$x_1=x_2=\sqrt{3}$.

4. 方程 $2x^2-mx-n^2=0$ 中二次项系数 $a=2$，一次项系数 $b=-m$，常数项 $c=-n^2$，代入公式得

$$x=\frac{-(-m)\pm\sqrt{(-m)^2-4\cdot 2\cdot(-n^2)}}{2\cdot 2}$$

$$=\frac{m\pm\sqrt{m^2+8n^2}}{4}.$$

$$x_1=\frac{m+\sqrt{m^2+8n^2}}{4},x_2=\frac{m-\sqrt{m^2+8n^2}}{4}.$$

习 题 12.2(1)

A 组

1. 用直接开平方法解下列方程：

(1) $x^2-1=0$；　(2) $x^2-16=0$；

(3) $y^2-121=0$；　(4) $2x^2=128$；

(5) $2x^2-\frac{1}{2}=0$；　(6) $3y^2=\frac{4}{3}$；

(7) $x-x^2=5x^2+x$；　(8) $7-2x^2=-15$.

2. 用直接开平方法解下列方程：

(1) $(x+5)^2=16$；　(2) $(x+17)^2=49$；

(3) $(3y-7)^2=1$；　(4) $(y+6)^2=100$.

3. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+6x+8=0$；　(2) $x^2+4x-12=0$；

(3) $x^2-10x=-24$；　(4) $x^2-8x+15=0$；

(5) $x^2+2x-99=0$；　(6) $y^2+5y+2=0$；

(7) $3x^2-1=4x$；　(8) $2x^2+\sqrt{2}x-30=0$.

4. 用配方法解关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$.

5. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2+2x-2=0$；　(2) $3x^2+4x-7=0$；

(3) $2y^2+8y-1=0$；　(4) $x^2-2.4x-13=0$；

(5) $2x^2-3x+\frac{1}{8}=0$；　(6) $\frac{3}{2}t^2+4t=1$；

(7) $3y^2-2y=1$；　(8) $3y^2+1=2\sqrt{3}y$.

6. 用公式法解下列方程，并求根的近似值(精确到 0.01)：

(1) $x^2-3x-7=0$；　(2) $x^2-3\sqrt{2}x+2=0$.

7. 用适当方法解下列方程：

(1) $3x^2=54$；　(2) $4(x-5)^2=16$；

(3) $x^2-4x=8$；　(4) $x(x+8)=609$；

(5) $3x^2+2x-3=0$；　(6) $3x^2-1=2x$；

(7) $6x^2-4=3x$；　(8) $3x^2+5(2x+1)=0$.

8. 解下列关于 x 的方程：

(1) $mx^2-(m-n)x-n=0(m\neq 0)$；

(2) $x^2-(2m+1)x+m^2+m=0$.

B 组

1. 解下列关于 x 的方程：

(1) $\frac{x^2}{a}=1(a>0)$；　(2) $x^2-a=0(a\geqslant 0)$；

(3) $(x-a)^2=b^2$；　(4) $(ax+c)^2=d(d\geqslant 0,a\neq 0)$.

2. 解下列方程：

(1) $5(2y-1)^2=80$；　(2) $4(3x-2)^2=36$；

(3) $3(2y-1)^2=27$；　(4) $10(3x+7)2=1000$.

3. 解下列关于 x 的方程：