力学参考资料(三)

随机振动

科学技术文献出版社重庆分社

随机振动（力学参考资料）

中国科学技术情报研究所重庆分所编辑
科学技术文献出版社重庆分社出版
重庆市市中区胜利路91号
四川省新华书店重庆发行所发行
重庆印制第一厂印制

开本：787×1092毫米1/16　印张13.5　字数：35万
1976年3月第1版　　1976年3月第1次印制
印　数：4200

统一书号：13176·13　　定价：1.40元

线性随机振动及有关问题*

一、绪　　言

在汽车、火车、飞机、火箭、船舶、地面建筑物等的振动问题中，由于经常要处理不规则振动现象，所以导入了随机过程的概念。可以说，这一领域的基础知识现在已经成为机械工程人员不可缺少的素养之一。这里使用的分析工具并不是什么新东西，而是在布朗运动，统计力学的研究中物理学者使用过的，也是在通信工程的噪声研究中许多通信技术人员使用过的工具。但是随机振动引起的疲劳破坏问题是机械工程人员所特有的问题，而关于它的分析工具目前还不能说已经成熟。

在机械设计问题中，首先必须调查该机器的运用环境条件，然后预测在这种条件下机器设计性能的发挥情况。这种预测免不了带有某种不确定性。在振动问题中首先也必须调查振源（例如路面不平度、机械噪声、湍流、突风、波浪、地震等等）的特性，预测机器各部分对这些振源的响应，然后再根据既定标准来评价这响应。按既定标准来确定机器的特性（例如材料、尺寸、形状、装配方法等等）时，当然也要考虑到加工、维修、成本等经济性问题（参考图1.1）。许多振动问题中，无论振源特性或机器特性都带有某种不确定性，因而待评价的机器响应也往往带有不确定性。

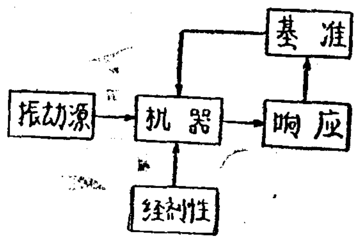

图1.1　机器的设计问题

在数学上，如采用处理确定现象的方法来解决上述问题是有困难的，但是可以引入统计的方法来解决这一问题。也就是从一个大量现象的集合中取出多个样本，从中整理出这一集合所具有的倾向性或统计规律性，而不去计较各个样本本身。必须注意的是：这里所谓带有某种不确定性的现象指的是随机现象，它是一个大量现象的抽象模型。一个振动现象，它究竟属于确定现象，还是属于随机现象，应该根据大量观测或实验来确定。在只有一个振动现象被记录下来的情形下，将它作为具有周期性的确定现象来处理呢？还是作为随机现象来处理？这应该根据具体情况分析而定。

---

* 原作者：下乡太郎；标题略有改动——编者。

二、随机振动的性质及其描述法

§2·1 概率密度函数

对于随机振动现象，由于不可能用时间函数来完全地描述它，因而不可能预测它在任何时刻的确定值。但是可以考察它取值于某个范围内的概率。在同样的条件下，对这种振动重复进行记录，尽管这些记录（称为样本函数）绝不相同，但它们的统计性质（例如平均值）往往大致相同。

现考虑某母函数 $x(t)$，设它代表某个随机过程。它可以代表力、应力、加速度、位移等物理量，而自变量 t 也可以不一定代表时间。从这母函数中采出图 2.1 所示N个样本函数 $x_1(t)$、$x_2(t)$、……$x_N(t)$，构成母函数 $x(t)$的一个子样。

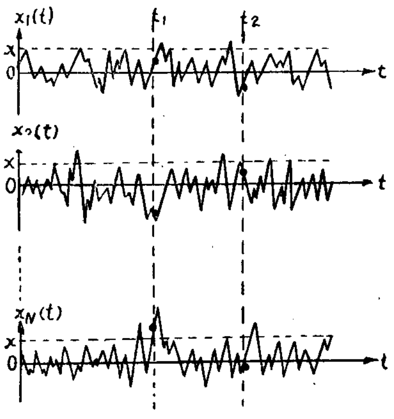

图2.1 样本函数

首先我们将各样本函数于时刻 t_1 的值 $x_1(t_1)$、$x_2(t_1)$、……$x_N(t_1)$与特定的 x 值进行比较，设其中不大于x的有 n 个，可象图 2.2 那样，对于 x 画出 $^n/_N$。若作对应于各个不同 x 值的$^n/_N$ 图，则可得如图 2.2 所示的非减函数。而且当$x=-\infty$时，有$^n/_N=0$；当 $x=\infty$ 时，有$^n/_N=1$。$^n/_N$ 称为该子样中（于时刻 t_1）出现不大于x这一事件的频率。从大量子样来看，可以发现这一频率将稳定于某个数附近，这个数就定义为母函数$x(t)\equiv X$不大于x的概率$P[X\leqslant x]$。它亦称为随机变量X（于时刻 t_1）的一维概率分布函数。我们用

$$F(x,t_1)=P[X\leqslant x,t_1] \tag{2.1}$$

来表示它。显然有

$$F(-\infty,t_1)=0\text{，}F(\infty,t_1)=1 \tag{2.2}$$

变量X取值于微小区间$(x,\ x+\Delta x)$内的概率为：

$$F(x+\Delta x,t_1)-F(x,t_1)$$
$$=\Delta F(x,t_1),$$

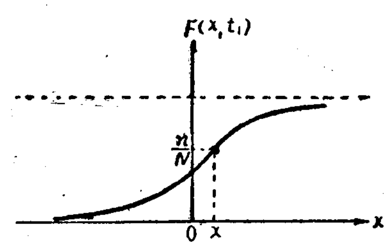

图2.2 一维概率分布函数（时刻t_1）

若假定它与 Δx 成正比，而每单位区间的概率，即概率密度假定为 $f(x,t_1)$，则可得 $\Delta F(x,t_1)=f(x,t_1)\Delta x$。若让$\Delta x\to 0$，则可定义变量$X$的一维概率密度函数为

$$f(x,t_1)=dF(x,t_1)/dx \tag{2.3}$$

（参考图 2.3）。因而有

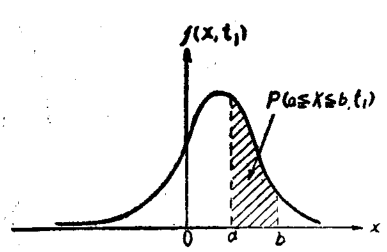

图2.3 一维概率密度函数（时刻t_1）

$$\left.\begin{aligned}F(x,t_1)&=\int_{-\infty}^{x}f(x,t_1)dx,\\F(\infty,t_1)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t_1)dx=1\text{。}\end{aligned}\right\}\quad(2.4)$$

而变量X取值于任意区间(a,b)内的概率则由下式给出：

$$\begin{aligned}P[a\leqslant X\leqslant b,t_1]&=F(b,t_1)-F(a,t_1)\\&=\int_a^b f(x,t_1)dx\text{。}\end{aligned}\qquad(2.5)$$

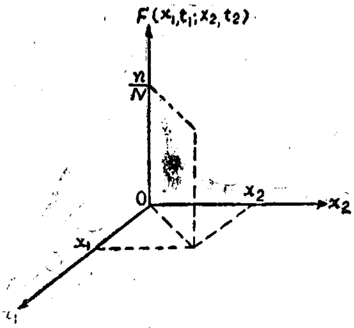

图24. 二维概率分布函数（时刻 t_1,t_2）

进一步设在N个样本函数中，于时刻t_1不大于某个特定值x_1，并且于时刻t_2不大于某个特定值x_2的样本函数有n个，则如图2.4那样，对x_1、x_2画出$^n/_N$。考虑到$x(t)$的大量子样，同样地可以定义变量X（于时刻t_1、t_2）的二维概率分布函数。它可以表示为

$$\begin{aligned}&F(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2)\\&=P[X\leqslant x_1,t_1;\ X\leqslant x_2,t_2]\text{。}\end{aligned}\qquad(2.6)$$

并且具有下列性质：

$$\left.\begin{aligned}&F(x_1,\ t_1;\ -\infty,\ t_2)\\&\quad=F(-\infty,\ t_1;\ x_2,\ t_2)\\&\quad=F(-\infty,t_1;-\infty,t_2)=0,\\&F(\infty,\ t_1;\ \infty,\ t_2)=1\text{；}\end{aligned}\right\}(2.7)$$

$$\left.\begin{aligned}&F(\infty,t_1;\infty,t_2)=F_1(x_1,t_1)\\&\quad=P[X\leqslant x_1,t_1],\\&F(\infty,t_1;x_2,t_2)=F_2(x_2,t_2)\\&\quad=P[X\leqslant x_2,t_2]\text{。}\end{aligned}\right\}\quad(2.8)$$

(2.8)式即一维概率分布函数。变量X的二维概率密度函数可由下式定义：

$$\begin{aligned}&f(x_1,t_1;x_2;t_2)\\&=\partial^2F(x_1,t_1;x_2,t_2)\Big/\partial x_1\partial x_2\text{。}\end{aligned}\quad(2.9)$$

因而有

$$\left.\begin{aligned}F(x_1,t_1;x_2,t_2)&=\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_2}f(x_1,t_1;x_2,t_2)dx_1dx_2,\\F(\infty,t_1;\infty,t_2)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,t_1;x_2,t_2)dx_1dx_2=1\text{。}\end{aligned}\right\}\qquad(2.10)$$

变量X在时刻t_1取值于区间（a_1，b_1）内，且在时刻t_2取值于区间（a_2，b_2）内的概率由下式确定：

$$P[a_1\leqslant X\leqslant b_1,\ t_1;\ a_2\leqslant X\leqslant b_2,\ t_2]=\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}f(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2)dx_1dx_2.\quad(2.11)$$

另外有

$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2)dx_2=f_1(x_1,\ t_1)=\partial F_1\Big/\partial x_1\ ,\right\}\qquad(2.12)$$

它们即一维概率密度函数。

类似地可以定义变量X的n维概率分布函数与n维概率密度函数。一般般说来，当尚未确定所有各维概率分布时，也就不能完全确定变量X的统计性质；但是在许多振动问题中往往只要确定一维与二维概率分布就已经足够了。

§2.2 平均值与方差、协方差

概率密度函数$f(x,t_1)$一般可由它的n次矩

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}x^nf(x,t_1)dx=E[X^n]\\&\qquad=\overline{X}^n,(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)\end{aligned}\qquad(2.13)$$

完全确定。一次矩即随机变量X的平均值$\overline{X}$，在振动问题中，通常有$\overline{X}=0$。相对于平均值的二次矩称为方差，即有

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-\overline{X})^2 f(x,t_1)dx$$

$$=\overline{X^2}-(\overline{X})^2=\sigma_x{}^2。\tag{2.14}$$

当$\overline{X}=0$时，有$\sigma_x{}^2=\overline{X^2}$。这时，方差即等于均方值。方差的平方根称为标准偏差。它往往取为表征变量X的分散度的测度。当$\overline{X}=0$时，标准偏差亦称均方根值，简记为rms值。后者常常被用来表示信号“电平”。

利用二维概率密度函数，可得二变量X_1、X_2的协方差：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\overline{X}_1)\ (x_2$$

$$-\overline{X}_2)f(x_1,t_1;x_2,t_2)dx_1dx_2$$

$$=\overline{X_1\ X_2}-\overline{X}_1\ \overline{X}_2=\sigma_{12}^2。\tag{2.15}$$

当$\overline{X}_1=\overline{X}_2=\overline{X}=0$时，有$\sigma_{12}^2=\overline{X_1\ X_2}$；这时协方差等于二变量乘积的平均值。$\sigma_{12}^2$亦称为相关函数。它用来表征$X_1$、$X_2$之间相关性的测度。进一步当$t_1=t_2$时，它就等于方差$\sigma_x^2$，而

$$\rho=\sigma_{12}^2\Big/\sigma_x^2 \tag{2,16}$$

这一比值称为自相关系数。当X_1与X_2相互独立时，二维概率密度函数就是各个一维概率密度函数之积，即

$$f(x_1,t_1;x_2,t_2)$$

$$=f_1(x_1,t_1)f_2(x_2,t_2)。\tag{2.17}$$

从(2.15)式可以看到，这时有$\sigma_{12}^2=0$，故有

$$\rho=0。\tag{2.18}$$

但是，当$\rho=0$时，却不能说X_1与X_2必定是独立的。

以上所述二变量X_1、X_2都是指从同一个母函数中采出的样本函数。如果二变量X_1、X_2是分别从不同的母函数中采出的样本函数，这时协方差σ_{12}^2称为互相关函数。

而

$$\rho_{12}=\sigma_{12}^2\ \ \sigma_1\sigma_2 \tag{2.19}$$

称为互相关系数。式中σ_1、σ_2分别是X_1、X_2的标准偏差。当X_1与X_2独立时，有$\rho_{12}=0$。但其逆未必成立。

§2.3　各态历经过程

一般在求平均值与方差时，为了确定概率密度函数，必须记录许多个样本函数。根据样本函数的集合所取的平均值称为集合平均值。

当分布函数不依赖于样本函数中时刻t_1的选取时，就称这种样本函数的集合构成所谓定常随机过程（即平稳随机过程，以后统一用“定常”二字）。当由定常随机过程确定的概率分布，与从其任一样本函数求得的概率分布都相等时，就称这种样本函数的集合构成所谓各态历经过程。各态历经过程一定是定常随机过程，但其逆未必成立。因此，即使是定常随机过程的情形，也不一定能选出哪个样本函数来作为代表。

从一个样本函数来求概率分布时，设在变量X的记录时间T内$X\leqslant x$的时间总计为ΔT，则关于$\Delta T/T$对x作图，可得图2.5所示。不难看出，当$x=-\infty$时，有$\Delta T/T\to 0$；当$x=\infty$时，有$\Delta T/T\to 1$。当为各态历经过程时，就没有必要记录许多样本函数，而只要根据一个充分长的记录来求概率

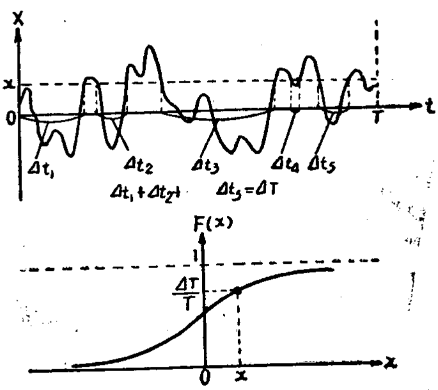

图2.5　各态历经过程的概率分布函数

分布就可以了。

这时，其 n 次矩可由下述求时间平均的方法确定

$$\overline{X}^n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^n(t)dt \qquad (2.20)$$

式中 $x(t)$ 是定义于 $-T/2 \leqslant t \leqslant T/2$ 的函数。令 $x_1 = x(t)$，$x_2 = x(t+\tau)$，$\tau = t_2 - t_1$，则可按下式

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt, \qquad (2.21)$$

定义自相关函数，它仅仅是时差 τ 的函数。且有

$$R_x(o) = \overline{X}^2。 \qquad (2.22)$$

令 $x_1 = x(t)$，$x_2 = y(t+\tau)$，则可按下式

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t+\tau)dt, \qquad (2.23)$$

定义互相关函数。这样，将集合平均值用时间平均值来代替，可以使数据处理工作变得非常容易。

一般定常随机过程又有强定常与弱定常之分。上述概率分布不依赖于样本函数中时刻的选取时，称为强定常。仅平均值与自相关函数不依赖于样本函数中时刻的选取时，称为弱定常。实际的振动问题严格来说都是非定常的，但如果适当地划分时间范围，按定常性假定来求解并获得足够精度的情形也是很多的。这和实际的振动系统严格来说都是非线性的，但线性理论仍能广泛适用这一事实是相类似的。另外，调查实际的随机振动是否属于各态历经过程是困难的，但如能得到充分长的观测记录，考虑到几乎所有它的振动状态都已能充分表现出来，一般也就假定它是各态历经过程。

§2.4 Gauss 随机过程

一般所谓具有不确定性的现象，可考虑是由无限多个相互无关的各种细小因素集中表现的结果。根据中心极限定理可以证明：表征这种现象的随机变量 X 服从 Gauss 分布（亦称正态分布）。也就是说，如果从某个随机过程独立地采出无限多个样本函数，再由这些样本函数之和组成一系列新的样本函数，则这一新的样本函数集合即为 Gauss 过程，其概率密度函数可表述如下（为方便起见，设为定常过程）：

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\overline{X})^2}{2\sigma_x^2}\right] \qquad (2.24)$$

而且不论原来的随机过程是否 Gauss 过程，上述性质都成立。利用以下变换：

$$(x-\overline{X})/\sigma_x = \xi, \qquad (2.25)$$

对(2.24)式进行改写，得

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/2}。 \qquad (2.26)$$

它在 $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$ 的范围内积分大约等于 0.68，在 $-2 \leqslant \xi \leqslant 2$ 范围内积分约为 0.954，在 $-3 \leqslant \xi \leqslant 3$ 范围内积分约为 0.997。又 Gauss 误差函数为

$$erf\quad u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-v^2}dv。 \qquad (2.27)$$

它与 Gauss 过程的概率分布函数 $F(\xi)$ 之间的关系由下式给出

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f(\xi)d\xi = \frac{1}{2}\left\{1 + erf\left(\xi/\sqrt{2}\right)\right\}。 \qquad (2.28)$$

二维 Gauss 随机过程的概率密度函数可表述如下：

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}}$$

$$\exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho_{12}^2)}\left\{\frac{(x_1-\overline{X}_1)^2}{\sigma_2^2}\right.\right.$$

$$-2\rho_{12}\frac{(x_1-\overline{X}_1)(x_2-\overline{X}_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$+\frac{(x_2-\overline{X}_2)^2}{\sigma_2^{\,2}}\Big\}\Big]。\quad(2.29)$$

这里，若令

$$(x_1-\overline{X}_1)/\sigma_1=\xi_1,$$
$$(x_2-\overline{X}_2)/\sigma_2=\xi_2,\quad(2.30)$$

可得

$$f(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{12}^2}}\exp\Big[-\frac{\xi_1^2-2\rho_{12}\xi_1\xi_2+\xi_2^2}{2(1-\rho_{12}^2)}\Big]。\quad(2.31)$$

Gauss随机过程的特征可归纳为如下三点：

(a) 许多自然现象可表示为Ganss过程的样本函数。因而在许多情形下，随机振动的振源可以看作是Gauss过程。

(b) 从中心极限定理可以看到，Gauss随机过程是由许多个变量之和所组成。因而由二个以上的Gauss过程之和组成的随机过程亦将是Gauss过程。故对Gauss过程进行线性运算，所得结果仍是Gauss过程，但如进行非线性运算，那末所得结果就已经不再是Gauss过程了。

(c) 从Gauss过程的概率密度函数所具的形式可以看到，Gauss过程的性质根据其平均值与方差就可以完全确定了。一般情形下，如果没有给出一次矩到无限次矩的话，就不可能确定概率密度；但是在Gauss过程中，根据一次矩与二次矩就可以确定所有各高次矩。例如，当$\overline{X}=0$时，四次矩为

$$\overline{X_1X_2X_3X_4}=\overline{X_1X_2}\cdot\overline{X_3X_4}+\overline{X_2X_3}\cdot\overline{X_1X_4}+\overline{X_1X_3}\cdot\overline{X_2X_4}\quad(2.32)$$

当 $X_1=X_3$，$X_2=X_4$ 时，有

$$\overline{X_1^2X_2^2}=\overline{X_1^2}\cdot\overline{X_2^2}+2(\overline{X_1X_2})^2。\quad(2.33)$$

§2.5 功率谱密度

在描述一个振动现象的性质时，从概率密度就可以得到有关其幅度的信息；但要得到有关波形的信息，则必须调查它含有何种频率分量。对于处理线性问题来说，频率分析法是非常有效的，因而普遍采用将函数表为Fourier级数或Fourier积分的形式。但在随机振动中不能照搬这一方法。

假设 $x(t)$ 是周期函数，则可表为Fourier级数：

$$\left.\begin{aligned}&x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,e^{jn\omega t},\\&(\omega\text{：圆频率，}\ j=\sqrt{-1})\\&c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,e^{-jn\omega t}dt,\\&(T\text{：周期})\end{aligned}\right\}\quad(2.34)$$

$x(t)$的均方值由Parseval公式给出：

$$\overline{x^2}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nc_{-n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2。\quad(2.35)$$

关于 $|c_n|^2$ 对各频率 $n\omega$ 作图，可得离散谱，该谱的和就等于$\overline{x^2}$。

假设 $x(t)$ 是非周期函数，则可表示为Fourier积分：

$$\left.\begin{aligned}&x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}c(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega,\\&c(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\omega t}dt;\end{aligned}\right\}(2.36)$$

或

$$\left.\begin{aligned}&x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(jf)\,e^{j2\pi ft}df,\\&(f={}^{\omega}/_{2\pi})\\&c(jf)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j2\pi ft}dt。\end{aligned}\right\}(2.37)$$

且应有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|<\infty。\qquad (2.38)$$

这时 Parseval 公式为

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}c(jf)c(-jf)df$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|c(jf)|^2df。\qquad (2.39)$$

现设 $x(t)$ 是定常随机过程的一个样本函数，尽管它是定义于 $-\infty\leqslant t\leqslant\infty$ 的一个非周期函数，但它不满足（2.38）式的条件，因而不能表为 Fourier 积分。因此，首先引入下述辅助函数 $x_T(t)$：

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } -{}^T/_2\leqslant t\leqslant{}^T/_2\text{ 时，}\\ \text{有 } x_T(t)=x(t),\\ \text{当 } t<-{}^T/_2\text{ 或 } t>{}^T/_2\text{ 时，}\\ \text{有 } x_T(t)=0\text{ 。}\end{array}\right\}\qquad (2.40)$$

由于 $x_T(t)$ 满足（2.38）式条件，因而可表为Fourier 积分，其均方值为

$$\overline{x_T{}^2}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_T{}^2(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x_T{}^2(t)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|c_T(jf)|^2df,\qquad (2.41)$$

式中 $c_T(jf)$ 为 $x_T(t)$ 的 Fourier 变换。上式中当 $T\to\infty$ 时，有 $\overline{x_T{}^2}\to\overline{x^2}$；假设右边的积分与求极限的运算是可以交换的，则有

$$\overline{x^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}|c_T(jf)|^2\right]df$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)df,\qquad (2.42)$$

式中

$$S_x(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|c_T(jf)|^2,\qquad (2.43)$$

它称为 $x(t)$ 的功率谱密度。关于 $S_x(f)$ 对频率 f 作图，可得连续谱，该谱的积分值就等于$\overline{x^2}$。可见，$S_x(f)$相当于离散谱情形的 $|c_n|^2$。

一般谐振动的功率或能量与其振幅的平方或均方值成比例。例如质点动能的最大值 $ma^2\omega^2/2$（m:质量），弹簧势能的最大值 $ka^2/2$（k:弹簧常数），阻尼在每个周期内的消散能量 $ca^2\pi\omega$（c:阻尼系数）都与 a的平方成比例。因此，从（2.42）式可以看到，功率谱密度是每单位频带宽内的谐和分量的均方值，即相当于能量。如果将 $x(t)$ 通过带宽为 Δf 的滤波器来求其均方值，则得 $S_x(f)\Delta f$，而若在全带域内对这一能量求总和的话，则就等于总的均方值$\overline{x^2}$。这样，功率谱密度表征着能量按频率的分布情况。因而通过对功率谱密度的调查，可以

(a) 有助于理解振动的物理机理，

(b) 有助于振动模拟，

(c) 有助于设计工作。

另外，即使在$\overline{x^2}$不表示功率或能量等物理量的情形，我们仍从广义上称$S_x(f)$为功率谱密度。

在（2.42）式中我们曾把 $S_x(f)$ 设为定义于 $-\infty\leqslant f\leqslant\infty$的偶函数，而如果把定义于 $0\leqslant f\leqslant\infty$的功率谱密度设为$W_x(f)$，则有

$$\left.\begin{array}{l}W_x(f)=2S_x(f),\\ \overline{x^2}=\displaystyle\int_0^{\infty}W_x(f)df\end{array}\right\}\qquad (2.44)$$

又设对应于圆频率 ω 作图所得功率谱密度为 $S_x(\omega)$，则有

$$\left.\begin{array}{l}S_x(\omega)=S_x(f)/2\pi,\\ \overline{x^2}=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)d\omega。\end{array}\right\}\qquad (2.45)$$

因此，必须注意功率谱密度的自变量与其定义域。

实际物理现象的功率谱密度，其分布一般说来是不均等的，但在比较宽的频带域（例如频带宽度的数量级不低于其中心频率

的数量级）内有着大致均匀分布的情形下，将它理想化，就有

$$\text{于} -\infty \leqslant f \leqslant \infty, \quad S_x(f) = S_o = \text{常数}, \tag{2.46}$$

这时的 $x(t)$ 称为理想白噪声。由于这时有

$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_o df = \infty$，因而实际上理想白噪声是不存在的。但在调查具有共振特性的振动系统的响应时，将振源看作白噪声来进行近似分析有着方便之处。当白噪声只具有有限带宽时，即

$$\left.\begin{array}{ll} \text{于} f_1 \leqslant |f| \leqslant f_2, & S_x(f) = S_o, \\ \text{于} |f| < f_1, & \\ \quad |f| > f_2, & S_x(f) = 0 。\end{array}\right\} \tag{2.47}$$

这时，有 $\overline{x^2} = 2S_o(f_2 - f_1) < \infty$。

这里，我们设 $x(t)$ 是定常过程的一个样本函数并定义了它的功率谱密度。如果是各态历经过程，则不管取哪个样本来考虑，其功率谱密度都是相同的。如果不是各态历经过程的话，必须考察所有样本函数的功率谱密度的集合平均。

又当是Gausss过程（设其平均值为零）时因由其均方值完全可以确定概率密度，所以根据其功率谱密度就可以确定其所有的统计性质。当不是Gauss过程时，仅仅根据功率谱密度还不能确定其概率密度。

§2.6 自相关函数

当 $x(t)$ 是各态历经过程的一个样本函数时，其自相关函数 $R_x(\tau)$ 由（2.21）式所定义。为了导出它与功率谱密度 $S_x(f)$ 的关系，我们先来求（2.40）式所定义的辅助函数 $x_T(t)$ 的自相关函数 $R_T(\tau)$：

$$\begin{aligned} R_T(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)x_T(t+\tau)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} c_T(jf)e^{j2\pi f(t+\tau)}df\right]dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} c_T(jf)\ e^{j2\pi f\tau}\left[\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)\ e^{j2\pi ft}dt\right]df \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} c_T(jf)\ c_T(-jf)\ e^{j2\pi f\tau}\ df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}|c_T(jf)|^2\right]e^{j2\pi f\tau}\ df 。\end{aligned} \tag{2.48}$$

当 $T \to \infty$ 时，有 $R_T(\tau) \to R_x(\tau)$，因而利用（2.43）式，可得

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\ e^{j2\pi f\tau}\ df \tag{2.49}$$

即 $R_x(\tau)$ 等于 $S_x(f)$ 的 Fourier 逆变换。因此，$S_x(f)$ 就是 $R_x(\tau)$ 的 Fourier 变换，故可写为

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\ e^{-j2\pi f\tau}\ d\tau。 \tag{2.50}$$

所以 $R_x(\tau)$ 与 $S_x(f)$ 有着一一对应关系。(2.49)、(2.50) 式称为 Wiener-Хинчин 关系式。由于 $S_x(f)$ 是偶函数，因而有

$$
\begin{aligned}
R_x(\tau) &= \int_0^{\infty} S_x(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df + \int_0^{\infty} S_x(f)\, e^{-j2\pi f\tau}\, df \\
&= 2\int_0^{\infty} S_x(f) \cos 2\pi f\tau\, df \\
&= \int_0^{\infty} W_x(f) \cos 2\pi f\tau\, df \\
&= 2\int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau\, d\omega \\
&= \int_0^{\infty} W_x(\omega) \cos \omega\tau\, d\omega,
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

即 $R_x(\tau)$ 也是偶函数。对 $R_x(\tau)$ 进行变换，可得

$$
\left.
\begin{aligned}
S_x(f) &= 2\int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos 2\pi f\tau\, d\tau, \ (-\infty \leqslant f \leqslant \infty), \\
W_x(f) &= 4\int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos 2\pi f\tau\, d\tau, \ (0 \leqslant f \leqslant \infty), \\
S_x(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau, \ (-\infty \leqslant \omega \leqslant \infty), \\
W_x(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau, \ (0 \leqslant \omega \leqslant \infty),
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.52}
$$

当 $\tau=0$ 时，从 (2.49) 式可以看到，有

$$R_x(o)=\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\, df = \overline{X}^2。\tag{2.53}$$

一般情形下成立着如下关系：

$$|R_x(\tau)| \leqslant R_x(o)。\tag{2.54}$$

这是因为

$$
\begin{aligned}
&\{x(t) \pm x(t+\tau)\}^2 \\
&= x^2(t) \pm 2x(t)x(t+\tau) + x^2(t+\tau),
\end{aligned}
$$

上式两边对时间取平均，左边为非负，右边的 $\overline{x^2(t)} = \overline{x^2(t+\tau)} = R_x(o)$，$\overline{x(t)x(t+\tau)} = R_x(\tau)$，因而得 $R_x(\tau) \geqslant -R_x(o)$ 或 $R_x(\tau) \leqslant R_x(o)$。现可定性地来说明(2.54)式：当 τ 充分大时，$x(t)$ 与 $x(t+\tau)$ 的相关性变弱，因而 $x(t)x(t+\tau)$ 的值以零为中心，在正负两侧对称地分散，其平均值 $R_x(\tau)$ 接近于零。另一方面，当 τ 充分小时，相关性变强，$x(t)$ 与 $x(t+\tau)$ 容易取得相同的符号，故 $x(t)x(t+\tau) > 0$，因此 $R_x(\tau)$ 的值变大，而 $R_x(o)$ 取最大值。又从 (2.54) 式可以

看到，自相关系数$\rho = R_x(\tau)/R_x(o)$满足$0 \leqslant |\rho| \leqslant 1$的关系。

当$\overline{X} \neq 0$时，令$x(t) = \overline{x(t)} + \xi(t)$，得

$$R_x(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)}$$

$$= \overline{\{\overline{x(t)} + \xi(t)\}\{\overline{x(t+\tau)} + \xi(t+\tau)\}}$$

$$= \overline{x(t)}\ \overline{x(t+\tau)} + \overline{x(t)}\ \overline{\xi(t+\tau)} + \overline{x(t+\tau)}\ \overline{\xi(t)} + \overline{\xi(t)\xi(t+\tau)},$$

这里，令$\overline{x(t)} = \overline{x(t+\tau)} = \overline{X}$，$\overline{\xi(t)} = \overline{\xi(t+\tau)} = 0$，$\overline{\xi(t)\xi(t+\tau)} = R_\xi(\tau)$，得

$$R_x(\tau) = (\overline{X})^2 + R_\xi(\tau)。\qquad (2.55)$$

当$\tau = 0$时，有$\overline{X^2} = (\overline{X})^2 + \overline{\xi^2} = (\overline{X})^2 + \sigma_x^2$，它与(2.14)式是一致的。当$\tau \to \infty$时，有$R_\xi(\tau) \to 0$，因而有$R_x(\tau) \to (\overline{X})^2 \neq 0$。由此可见，当$\tau$充分大时，如果$R_x(\tau)$趋于一定值，那末它就等于$x(t)$的平均值的平方。

对于周期函数及其他解析函数也可以定义自相关函数。

现设

$$x(t) = a\ \sin(\omega t + \varphi), \qquad (2.56)$$

则有

$$R_x(\tau) = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} a^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\sin\ \{\omega(t+\tau) + \varphi\}\ dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \cos\ \omega\tau。\qquad (2.57)$$

即周期函数的自相关函数是与原周期函数具有相同的频率的周期函数，而其振幅为$a^2/2$。对于随机函数（设其平均值为零）与周期函数之和，其自相关函数也就是各自的自相关函数之和。当$\tau \to \infty$时，随机函数的自相关函数为零，而仅仅留下周期函数的自相关函数，即周期分量可分离出来，从而有可能检出隐含着的周期现象。这时，如(2.57)式所示，虽然可以找到它的振幅a以及圆频率ω，但已失去了有关相位的信息。当不含有周期分量时，其功率谱密度到处都具有有限值；但如含有周期分量时，则在其频率ω处功率谱密度将变为无限大。但是该尖峰值的宽度等于零，故只有有限面积，即成为离散谱之一。（当$\overline{X} \neq 0$时，于$\omega = 0$处亦具有同样的尖峰值。）因此，为了检出周期分量，最好利用自相关函数而不用功率谱密度。

为求白噪声的自相关函数，可以先对具有如下形式：

$$\left.\begin{array}{l} \text{当}\quad -\varepsilon \leqslant \tau \leqslant \varepsilon\ \text{时}, \\ \qquad R_x(\tau) = S_o/2\varepsilon, \\ \text{当}\quad \tau < -\varepsilon,\ \tau > \varepsilon\text{时}, \\ \qquad R_x(\tau) = 0 \end{array}\right\} \qquad (2.58)$$

的自相关函数，来求其对应的功率谱密度。这时，可得

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\ \cos\ 2\pi f\tau\ d\tau$$

$$= \frac{S_o}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos\ 2\pi f\tau\ d\tau$$

$$= S_o\ \sin\ 2\pi f\varepsilon / 2\pi f\varepsilon。\qquad (2.59)$$

因而当$\varepsilon \to 0$时，$S_x(f) \to S_o =$常数，而$R_x(\tau) \to S_o\delta(\tau)$[$\delta(\tau)$是Dirac δ函数]。由此可见，白噪声的自相关函数当$\tau = 0$时变为无限大，而当$\tau \neq 0$时变为零。故对于白噪声，它的过去与未来之间全然无关，可以说是完全随机的，(2.47)式所示的有限带宽白噪声的自相关函数为

$$R_x(\tau) = 2\int_0^{\infty} S_x(f)\ \cos\ 2\pi f\tau\ \ df$$

$$= 2S_o \int_{f_2}^{f_2} \cos\ 2\pi f\tau\ df$$

$$= 2S_o(\sin\ 2\pi f_2\tau - \sin\ 2\pi f_1\tau)/2\pi\tau。\qquad (2.60)$$

而$R_x(o) = \overline{X^2} = 2S_o(f_2 - f_1)$。当$f_2 \to \infty$，$f_1 \to 0$时，它与理想白噪声是一致。

除了$x(t)$是理想白噪声的情形外，对$x(t)$

的自相关函数求导数，得

$$R_x'(\tau)=\overline{x(t)x'(t+\tau)}。\qquad (2.61)$$

当为定常过程时，移动时间原点，可写为 $R_x(\tau)=\overline{x(t-\tau)x(t)}$ 对它求导数，则

$$R_x'(\tau)=-\overline{x'(t-\tau)x(t)}$$

$$=-\overline{x(t)x'(t-\tau)}。\qquad (2.62)$$

当 $\tau=0$ 时，按 (2.61)、(2.62) 式，有

$$\overline{x(t)x'(t)}=-\overline{x(t)x'(t)}。$$

因此，必须有 $\overline{x(t)x'(t)}=0$ 即从 (2.61) 式，有

$$R_x'(o)=0。\qquad (2.63)$$

由此可见，自相关函数在原点 $\tau=0$ 处具有水平切线。又因

$$\overline{x(t)x'(t)}=\overline{X\dot{X}}=0，\qquad (2.64)$$

故有位移与速度的相关函数等于零。由于 (2.61)式可写为 $R_x'(\tau)=\overline{x(t-\tau)x'(t)}$，再对它求导数，得

$$R_x''(\tau)=-\overline{x'(t-\tau)x'(t)}$$

$$=-\overline{x'(t)x'(t+\tau)}$$

$$=-R_{\dot{x}}(\tau)\qquad (2.65)$$

即 $-R_x''(\tau)$等于 $x'(t)$的自相关函数。因此，令 $\tau=0$ 得 $x'(t)$的均方值

$$R_x''(o)=-\overline{\dot{X}^2}。\qquad (2.66)$$

同样地可导出：

$$R_x'''(o)=0，$$

$$R_x''''(o)=\overline{\ddot{X}^2}。\qquad (2.67)$$

对 (2.51) 式求导数，得

$$R_x'(\tau)=-2\int_0^\infty S_x(\omega)\omega\sin\omega\tau\, d\omega，\qquad (2.68)$$

$$R_x''(\tau)=-2\int_0^\infty S_x(\omega)\,\omega^2\cos\omega\tau\, d\omega。\qquad (2.69)$$

因而当 $\tau=0$ 时，(2.68) 式与 (2.63) 式一致。而从 (2.69) 式可得

$$\overline{\dot{X}^2}=-R_x''(o)=2\int_0^\infty S_x(\omega)\,\omega^2\, d\omega。\qquad (2.70)$$

同样地可得

$$\overline{\ddot{X}^2}=-R_x''''(0)=2\int_0^\infty S_x(\omega)\,\omega^4\, d\omega。\qquad (2.71)$$

因而$\overline{\dot{X}^2}$、$\overline{\ddot{X}^2}$ 等可用X的功率谱密度来表示

§2.7 互相关函数

当为各态历经过程时，$x(t)$ 与 $y(t)$ 的互相关函数为 (2.23) 式所定义。现考察 (2.40) 式所定义的辅助函数 $x_T(t)$ 以及同样的辅助函数 $y_T(t)$，若求 $x_T(t)$ 与 $y_T(t)$ 的互相关函数，则有：

$$R_{x_Ty_T}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_T(t)y_T(t+\tau)\,dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_T(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}b_T(jf)\ e^{j2\pi f(t+\tau)}\,df\right]dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}b_T(jf)\ e^{j2\pi f\tau}\left[\int_{-T/2}^{T/2}x_T(t)\ e^{j2\pi ft}\,dt\right]df$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}b_T(jf)\ a_T(-jf)\ e^{j2\pi f\tau}\,df，\qquad (2.72)$$

式中 $a_T(jf)$、$b_T(jf)$ 分别为 $x_T(t)$、$y_T(t)$ 的 Fourier 变换。当 $T\to\infty$ 时，有 $R_{x_T y_T}(\tau)$，$\to R_{xy}(\tau)$，故有

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}a_T(-jf)\ b_T(jf)\right]e^{j2\pi f\tau}\ df$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xy}(f)\ e^{j2\pi f\tau}df。\tag{2.73}$$

上式中

$$S_{xy}(f)=\lim_{T\to\infty}\ \frac{1}{T}\left[\ a_T(-jf)\ b_T(jf)\ \right],\tag{2.74}$$

它称为协功率谱密度。$R_{xy}(\tau)$ 与 $S_{xy}(f)$ 之间的关系和 $R_x(\tau)$ 与 $S_x(f)$ 之间的关系一样，也是 Fourier 变换关系。

即

$$S_{xy}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xy}(\tau)\ e^{-j2\pi f\tau}\ d\tau\tag{2.75}$$

当 $x(t)=y(t)$ 时，$S_{xy}(f)$ 与 $S_x(f)$一致。

按 Schwarz 不等式，有

$$\overline{|x(t)y(t+\tau)|}\leqslant\sqrt{\overline{x^2(t)}\cdot\overline{y^2(t+\tau)}},$$

因而一般成立有如下关系

$$|R_{xy}(\tau)|\leqslant\sqrt{R_x(0)R_y(0)}。\tag{2.76}$$

再按几何平均值≤算术平均值，可得

$$|R_{xy}(\tau)|\leqslant\{R_x(0)+R_y(0)\}/2。\tag{2.77}$$

当 $\overline{X}\neq 0$，$\overline{Y}\neq 0$ 时，令 $x(t)=\overline{x(t)}+\xi(t)$，$y(t)=\overline{y(t)}+\eta(t)$，得

$$R_{xy}(\tau)=\overline{\{x(t)+\xi(t)\}\{y(t+\tau)+\eta(t+\tau)\}}=\overline{x(t)}\cdot\overline{y(t+\tau)}+\overline{x(t)}$$

$$\cdot\overline{\eta(t+\tau)}+\overline{y(t+\tau)}\cdot\overline{\xi(t)}+\overline{\xi(t)\eta(t+\tau)},$$

这里，令 $\overline{x(t)}=\overline{X}$，$\overline{y(t+\tau)}=\overline{Y}$，$\overline{\xi(t)}=\overline{\eta(t+\tau)}=0$，$\overline{\xi(t)\eta(t+\tau)}=R_{\xi\eta}(\tau)$

得

$$R_{xy}(\tau)=\overline{X}\,\overline{Y}+R_{\xi\eta}(\tau)。\tag{2.78}$$

当 $\tau=0$ 时，有 $\overline{XY}=\overline{X}\,\overline{Y}+\sigma^2_{\xi\eta}$，它与(2.15)式所得结果相同。当 $\tau\to\pm\infty$ 时，有 $R_{\xi\eta}(\tau)\to 0$；因而 $R_{xy}(\tau)\to\overline{X}\,\overline{Y}$。当 $\overline{X}=0$ 或 $\overline{Y}=0$ 时，有 $R_{xy}(\pm\infty)=0$。又从 (2.76) 式可以看到，互相关系数 $\rho_{xy}={}^{R_{xy}(\tau)}/\sqrt{R_x(0)R_y(0)}$ 满足 $0\leqslant|\rho_{xy}|\leqslant 1$ 的关系。

若考虑到定常性，于是有

$$R_{xy}(\tau)=\overline{x(t)y(t+\tau)}$$

$$=\overline{y(t)x(t-\tau)}=R_{yx}(-\tau)。\tag{2.79}$$

由于 $R_{xy}(\tau)$ 与 $R_{xy}(-\tau)$ 一般没有关系，故 $R_{xy}(\tau)$ 与 $R_{yx}(\tau)$ 没有关系。在这一点上是与自相关函数不相同的。对 (2.75) 式进行改写，得

$$S_{xy}(f)=\int_0^{\infty}R_{xy}(\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\ d\tau+\int_0^{\infty}R_{yx}(\tau)\ e^{j2\pi f\tau}\ d\tau。\tag{2.80}$$

因而如果 $R_{xy}(\tau)$ 与 $R_{yx}(\tau)$ 没有关系的话，一般 $S_{xy}(f)$ 是复函数〔与此相反，功率谱密度 $S_x(f)$ 则为实函数〕。将 (2.79) 式代入 (2.75) 式，得

$$S_{xy}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{yx}(-\tau)\ e^{-j2\pi f\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}R_{yx}(\tau)\ e^{j2\pi f\tau}\ d\tau \tag{2.81}$$

另一方面，有

$$S_{yx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{yx}(\tau)\ e^{-j2\pi f\tau}\ d\tau \tag{2.82}$$

由此可见，$S_{xy}(f)$ 与 $S_{yx}(f)$ 有着共轭复数关系。又从 (2.79) 式可以看到，有

$$S_{xy}(f)=S_{yx}(-f)。 \tag{2.83}$$

二个定常各态历经过程 $x(f)$ 与 $y(f)$ 之和

$$Z(f)=x(t)+y(t) \tag{2.84}$$

的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_z(\tau)&=\overline{\{x(t)+y(t)\}\{x(t+\tau)+y(t+\tau)\}}=\overline{x(t)x(t+\tau)}+\overline{x(t)y(t+\tau)}\\&+\overline{y(t)x(t+\tau)}+\overline{y(t)y(t+\tau)}=R_x(\tau)+R_{xy}(\tau)+R_{yx}(\tau)\\&+R_y(\tau)。\end{aligned} \tag{2.85}$$

考虑在上式两边取 Fourier 变换，得

$$\begin{aligned}S_Z(f)&=S_x(f)+S_{xy}(f)\\&+S_{yx}(f)+S_y(f)。\end{aligned} \tag{2.86}$$

如果 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是相互独立的，则有

$R_{yx}(\tau)=R_{yx}(\tau)=0$，因而有

$$\left.\begin{aligned}R_Z(\tau)&=R_x(\tau)+R_y(\tau),\\S_Z(f)&=S_x(f)+S_y(f)。\end{aligned}\right\} \tag{2.87}$$

即两个独立的定常随机过程之和的自相关函数（或功率谱密度）等于各自的自相关函数（或功率谱密度）之和。

$x(t)$ 与 $y(t)$ 之积

$$Z(t)=x(t)y(t) \tag{2.88}$$

的自相关函数为

$$R_Z(\tau)=\overline{x(t)y(t)x(t+\tau)y(t+\tau)} \tag{2.89}$$

一般它不可能仅仅用二次矩来表示，但当 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是Gauss过程时，利用(2.32)式，可得

$$\begin{aligned}R_Z(\tau)&=\overline{x(t)x(t+\tau)}\cdot\overline{y(t)y(t+\tau)}\\&+\overline{x(t)y(t+\tau)}\cdot\overline{y(t)x(t+\tau)}\\&+\overline{x(t)y(t)}\cdot\overline{x(t+\tau)y(t+\tau)}\\&=R_x(\tau)R_y(\tau)+R_{xy}(\tau)R_{yx}(\tau)\\&+R^2_{xy}(0)。\end{aligned} \tag{2.90}$$

如果 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是相互独立的，一般按 (2.89) 式，可得

$$\begin{aligned}R_Z(\tau)&=\overline{x(t)x(t+\tau)}\cdot\overline{y(t)y(t+\tau)}\\&=R_x(\tau)R_y(\tau)。\end{aligned} \tag{2.91}$$

这时，上述两个独立的随机过程之积的自相关函数等于各自的自相关函数之积。

参考书简介

[6]、[7]、[8]、[23]作为机械系统随机振动的概述是很合适的。关于随机振动理论的数学基础——随机过程论，可列举[1～4]、[9]、[10]、[12]、[13]、[16～22]、[24～33]。[4]统地阐述了 Марков 理论，同时着重地讲述了它在物理、化学、生物、天文、运筹学等方面的应用。[10]着重于阐述概率论与随机过程论的数学基础。[19]、[27]是有关自动控制书，但在[19]的第二、三章中引入了适当的例题，因而可以作为概率论与随机过程论的很好的入门读物。[20]、[21]是有关通信理论的，[21]引了大量的文献。[28]是有关随机过程论、信息论

的文献汇总。[30]中汇集了随机过程论的六篇经典论文，其中之一即S.O.Rice的《噪声的数学分析》。[31]是有关预测、滤波的经典著作。有关概率论的可举出[5]、[11]；[5]重点阐述集合论；[11]是众知的名著，上卷处理离散变量，下卷处理连续变量。另外，手册中讲述随机振动的有[14]、[15]。

[1] N. J. Bailey: The Elements of Stochastic Processes with Applications to the Natural Sciences, Wiley, 1964

[2] M. S. Bartlett: An Introduction to Stochastic Processes, Cambridge Univ. Press, 1966

[3] J. S. Bendat: Principles and Applications of Random Noise Theory, Wiley, 1958

[4] A. T. Bharucha-Reid: Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications, McGraw-Hill, 1960

[5] H. Cramer: Methematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press, 1946

[6] S. H. Crandall and W. D. Mark: Random Vibration in Mechanical Systems, Academic Press, 1963

[7] S.H. Crandall ed.: Random Vibration, MIT, Wiley, 1958

[8] S. H. Crandall ed.: Random Vibration, Vol. 2, MIT, Press, 1963

[9] W. B. Davenport and W. L. Root: An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, McGraw-Hill, 1958

[10] J. L. Doob: Stochastic Procsses, Wiley, 1953

[11] W. Feller.: Probability Theory and Its Applications, Wiley, Vol. 1, 1950, Vol. 2, 1966

[12] J. J. Freeman: Principles of Noise, Wiley, 1958

[13] U. Grenander and M. Rosenblatt: Statistical Analysis of Stationary Time Series, Wiley, 1957

[14] C. M. Harris and C. E. Crede ed: Shock and Vibration Handbook, Vol. 1, Chap. 11, Vol. 2, Chap. 21, 22, Vol. 3, Chap. 48, Mc Graw-Hill, 1961

[15] C. M. Harris: Handbook of Noise Control, Mc Graw-Hill, 1957

[16] H. M. James, N. B. Nichols and R.S. Phillips: Theory of Servomechanisms, McGraw-Hill, 1947

[17] 河田：确率过程论の応用（现代応用数学讲座），岩波，1957

[18] 北川编：确率过程论（情报科学讲座），共立出版，1966

[19] J. H. Laning and R. H. Battin: Random Processes in Automatic Control, McGraw-Hill, 1956

[20] Y. W. Lee: Statistical Theory of Communications, Wiley, 1960

[21] D. Middleton: An Introduction to Statistical Communication Theory, McGraw-Hill, 1960

[22] E. Parzen, Stochastic Processes, Holden-Day: 1962

[23] J. D. Robson: An Introduction to Rondom Vibration, Edinburgh Univ. Press, 1964

[24] M. Rosenblatt: Random Processes, Oxford Univ. Press, 1962

[25] 椹木，添田，中沟：统计的自动制御理论，コロナ社，1966

[26] A. V. Skorokhod: Studies in the Theory of Random Processes, Addison-Wesley, 1965

[27] V. V. Solodovnikov: Introduction to the Statistical Dynamics of Automatic Control Systems, Dover, 1960

[28] F. L. Stumpers: A Bibiography of Information Theory(Communication Theory-Cybernetics), MIT Research Laboratory of Electronics, Feb. 1953

[29] H. J. Tsien: Engineering Cybernetics, McGraw-Hill, 1954

[30] N. Wax: Selected Papers on Noise and Stochastic Processes Dover, 1954

[31] N. Wiener: Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications, MIT Press, 1949

[32] H. Wold: A Study in the Analysis of Stationary Time Seres, Almquist and Wiksell, 1954

[33] A. M. Yaglom: Theory of Stationary Random Functions, Prentice Hall, 1962

三、单自由度线性系统对随机振动的响应

§3.1 线性振系的响应

一个机械系统受到随机振动的激励时，系统的响应（位移、速度、加速度、应力等）也将是随机振动。因此，需要考察表征系统响应特性的概率密度、功率谱密度、自相关函数与系统输入的相应量之间的关系。

这时，假设表征系统特性的参数是确定的，并且不随时间变化，则对于具有定常各态历经特性的输入，系统的响应也将具有定常各态历经特性。若再假设系统是线性的，则对于Gauss过程的输入，系统的响应也将是Gauss过程。这一性质已于§2.4中讲过。但是，即使在输入并非Gauss过程的情形，只要系统具有尖峰共振特性，由中心极限定理可以证明：这时系统的响应仍然可以近似地看作是Gauss过程。

一般说来，对于参数不随时间变化的线性振系，其特性都可以用脉冲响应或者频率特性来表示。脉冲响应指的是系统对于单位脉冲函数（即Dirac δ 函数）的响应，它表征着时间域内的响应特性。现令其为$h(t)$，则对于输入 $x(t)$，系统的输出 $y(t)$ 可表示如下式：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{0}^{\infty}x(t-\tau_1)h(\tau_1)d\tau_1。\qquad(3.1)$$

这是将输入$x(t)$用一列连续分布的脉冲来代替，将输出 $y(t)$ 用对应于任意时刻 τ 的脉冲$x(\tau)\Delta\tau\,\delta(t-\tau)$（脉冲函数）的响应$x(\tau)\Delta\tau h(t-\tau)$之和来表示而得到的。特别当$t<0$时，$x(t)=0$的情形，有

$$y(t)=\int_{0}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{t}x(t-\tau_1)h(\tau_1)d\tau_1。\qquad(3.2)$$

而该线性振系在物理上可能实现的条件为：当 $t<0$ 时，$h(t)=0$。且系统是稳定的条件为：$\int_0^\infty\left|h(t)\right|dt<\infty$。设当 $t<0$ 时，有 $h(t)=0$，则（3.1）式可写成：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau_1)h(\tau_1)d\tau_1。\qquad(3.3)$$

设输入为$x(t)=e^{j\omega t}$时，系统的定常响应（具有与输入相同的圆频率）为：

$$y(t)=H(j\omega)e^{j\omega t},\qquad(3.4)$$

则 $H(j\omega)$ 表征了在频率域内的响应特性，一般我们称它为系统的频率特性。设

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi},\qquad(3.5)$$

$|H(j\omega)|$是响应的振幅，也就是增益；φ表示响应的相位。在（3.3）式中，右边用$x(t)=e^{j\omega t}$代入，左边用（3.4）式代替，得

$$H(j\omega)e^{j\omega t}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega(t-\tau_1)}h(\tau_1)d\tau_1$$

$$=e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau_1)e^{-j\omega\tau_1}d\tau_1。\qquad(3.6)$$

故有

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau_1)e^{-j\omega\tau_1}d\tau_1。\qquad(3.7)$$

也就是说，频率特性正好等于脉冲响应的Fourier变换。如进行逆变换，则有

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega。\qquad(3.8)$$

设 $x(t)$、$y(t)$ 的 Fourier 变换分别为 $a(j\omega)$、$b(j\omega)$，则由频率特性的定义，有

$$b(j\omega)=H(j\omega)a(j\omega)。$$

故有

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$