目　录

三　　角

代　　数

1. 等差数列和等比数列

预 备 知 识

如果等差数列的第 n 项为 a_n, d 为公差, S_n 为前 n 项的和,那末

$$a_n=a_1+d(n-1), \tag{1}$$

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{[2a_1+d(n-1)]n}{2}. \tag{2}$$

如果等比数列的第 n 项为 u_n, q 为公比, S_n 为前 n 项的和,那末

$$u_n=u_1q^{n-1}, \tag{3}$$

$$S_n=\frac{u_nq-u_1}{q-1}=\frac{u_1(q^n-1)}{q-1}. \tag{4}$$

如果 S 是无穷递缩等比数列的和($|q|<1$),那末

$$S=\frac{u_1}{1-q}. \tag{5}$$

1. 求证:如果正数 a, b, c 成等差数列,那末数

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\ \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\ \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

也成等差数列.

2. 正数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 成等差数列,求证:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$
$$=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

3．求证：如果数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$（都不等于零）成等差数列，那末

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

4．求证：如果任一数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，当 $n\geqslant 3$ 时满足条件

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n},$$

那么该数列成等差数列.

5．求证：对任何等差数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，等式

$$a_1-2a_2+a_3=0,$$
$$a_1-3a_2+3a_3-a_4=0,$$
$$a_1-4a_2+6a_3-4a_4+a_5=0$$

成立，一般地，当 $n>2$ 时有

$$a_1-C_n^1a_2+C_n^2a_3-\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}a_n+(-1)^nC_n^na_{n+1}=0.$$

【提示】 这题和下题，可以利用恒等式 $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$ 证明.

6．求证：对于任何等差数列 $a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots$，当 $n\geqslant 3$ 时，下面的等式成立

$$a_1^2+C_n^1a_2^2+\cdots+(-1)^nC_n^na_{n+1}^2=0.$$

7．求证：如果 $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x\,(x\neq 1)$ 成等差数列，那末

$$n^2=(kn)^{\log_k m}.$$

8．一等差数列前 n 项之和与第 n 项以后 kn 项之和的比

与 n 无关，求这样的数列.

9. 数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 成等差数列. 如果

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=a,\quad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=b^2,$$

求这个数列.

【提示】 本题与下面的题目利用等式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

是有效的.

10. 数列 1, 4, 10, 19, … 的相邻两数的差成等差数列. 求这个数列的第 n 项与前 n 项的和.

11. 数表

$$\begin{array}{l}1\\ 2,\ 3,\ 4\\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}$$

证明:每一横行各数的和等于一个奇数的平方.

12. 在等比数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$里，已知 $a_{m+n}=A$, $a_{m-n}=B$, 求 a_m 与 $a_n(A\neq 0)$.

13. 设 S_n 是等比数列前 n 项的和($S_n\neq 0$, $q\neq 0$), 证明:

$$\frac{S_n}{S_{2n}-S_n}=\frac{S_{2n}-S_n}{S_{3n}-S_{2n}}.$$

14. 已知等比数列前 n 项的和为 S_n, 这些项的倒数的和为 $\tilde{S}_n$, 求这个数列前 n 项的积.

15. 求和:

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+(n+1)x^n.$$

16. 求和:

$$1+11+111+\cdots+111\cdots1,$$

其中最后一个被加数是 n 位数.

17. 求和:

$$nx+(n-1)x^2+\cdots+2\cdot x^{n-1}+1\cdot x^n.$$

18. 求和:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}.$$

19. 数 49, 4489, 444889, …, 这列数是这样得到的, 在第一个数的中间插入 48, 就成为第二个数, 在第二个数中间插入 48 就成为第三个数, 余类推. 求证这些数是整数的平方.

20. 试证: 无穷递缩等比数列

$$1,\ q,\ q^2,\ \cdots,\ q^n,\ \cdots,$$

它的每一项等于以后的所有项和的 k 倍. 当 k 为何值时题目有解?

21. 无穷数列 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots(x_1\neq 0)$, 当 $n\geqslant 3$ 时满足条件

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2)(x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2)$$
$$=(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)^2.$$

求证: $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$ 是等比数列的各项.

【提示】 可以应用完全归纳法.

22. 已知等差数列的通项 a_n, 等比数列的通项 b_n, 并且对所有自然数 n, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_1\neq a_2$, $a_n>0$. 求证: 当 $n>2$ 时, $a_n<b_n$.

23. 求证: 如果等比数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ 和等差数列 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n,\ \cdots$ 都满足不等式

$$a_1>0,\quad \frac{a_2}{a_1}>0,\quad b_2-b_1>0,$$

那末存在这样的数 a, $\log_a a_n-b_n$ 与 n 无关.

2. 代数方程和方程组

预备知识

在解下面的方程组时，用化简变换的方法把原方程组化成等价方程组，这个等价方程组的解或者是已知的，或者可以用已知的方法求出. 但是，在某些情况下可能产生不适合原方程的解，因此必须把所求出的未知数的值代入原方程组进行检验.

有些三次方程的题目可以应用韦达定理来解. 如果三次方程

$$x^3+px^2+qx+r=0 \tag{1}$$

的根为 x_1, x_2, x_3, 那末

$$x_1+x_2+x_3=-p,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q,\ x_1x_2x_3=-r. \tag{2}$$

还可以写出下面的等式:

$$x^3+px^2+qx+r=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

24. 求下面方程组的所有实数解:

$$\begin{cases}x^3+y^3=1,\\x^2y+2xy^2+y^3=2.\end{cases}$$

25. 解方程组:

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=4,\\x+xy+y=2.\end{cases}$$

26. 方程组:

$$\begin{cases}x^3+y^3=5a^3,\\x^2y+xy^2=a^3,\end{cases}$$

如果 a 是不等于零的实数，求方程组的实数解.

27. 解方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12,\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

28. 解方程组:

$$\begin{cases}x^4+x^2y^2+y^4=91,\\ x^2-xy+y^2=7.\end{cases}$$

29. 解方程组:

$$\begin{cases}x^3-y^3=19(x-y),\\ x^3+y^3=7(x+y).\end{cases}$$

30. 求方程组的所有实数解:

$$\begin{cases}2(x+y)=5xy,\\ 8(x^3+y^3)=65.\end{cases}$$

31. 求方程组的实数解:

$$\begin{cases}(x+y)(x^2-y^2)=9,\\ (x-y)(x^2+y^2)=5.\end{cases}$$

32. 求方程组的所有实数解:

$$\begin{cases}x+y=1,\\ x^4+y^4=7.\end{cases}$$

33. 解方程组:

$$\begin{cases}x+y=1,\\ x^5+y^5=31.\end{cases}$$

34. 求方程组

$$\begin{cases}x^4+y^4-x^2y^2=13,\\ x^2-y^2+2xy=1,\end{cases}$$

满足条件 $xy\geqslant 0$ 的实数解.

35. 解方程组:

$$\begin{cases}(x^2+1)(y^2+1)=10,\\(x+y)(xy-1)=3.\end{cases}$$

【提示】 设 $xy=v$, $x+y=u$.

36. 解方程组:

$$\begin{cases}(x^2+y^2)\dfrac{x}{y}=6,\\[2ex](x^2-y^2)\dfrac{y}{x}=1.\end{cases}$$

37. 解方程组:

$$\begin{cases}x^2+y^2=axy,\\x^4+y^4=bx^2y^2.\end{cases}$$

38. 解方程(把左边分解成因式):

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}=0.$$

39. 解方程:

$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$$

40. 解方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=a+\dfrac{1}{a},\\[2ex]\dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=b+\dfrac{1}{b}.\end{cases}$$

41. 求方程的所有解:

$$(x-4.5)^4+(x-5.5)^4=1.$$

42. 解方程组:

$$\begin{cases}|x-1|+|y-5|=1,\\y=5+|x-1|①.\end{cases}$$

---

① 数 x 的绝对值(用 $|x|$ 表示)是非负数,由下面的式子确定:

$$|x|=\begin{cases}-x, & \text{如果 } x<0,\\x, & \text{如果 } x\geqslant 0.\end{cases}$$

43．试问，当 x、y 是怎样的实数时，下面的等式成立：

$$5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0.$$

44．求满足方程

$$x^2+4x\cos(xy)+4=0$$

的 x 与 y 所有的实数值.

45．求方程组的实数解：

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2xy-z^2=4. \end{cases}$$

46．试问，当 a 为何值时，方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=a \end{cases}$$

有唯一的实数解，并求这个解.

47．求证：当 a 与 b 是任意实数，且 $a\neq 0$ 时，方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy+\dfrac{1}{xy}=a, \\ x^4+y^4+x^2y^2-\dfrac{1}{x^2y^2}-2=b^2 \end{cases}$$

的任何解（一般地是复数），使得和 x^2+y^2 是实数.

48．解方程组：

$$\begin{cases} ax+y+z=1, \\ x+ay+z=a, \\ x+y+az=a^2. \end{cases}$$

49．要使方程组

$$\begin{cases} (1+a_1)x+y+z=1, \\ x+(1+a_2)y+z=1, \\ x+y+(1+a_3)z=1 \end{cases}$$

有解并且有唯一的解，那末数 a_1、a_2、a_3 应该满足什么条件？

50. 解方程组:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+\cdots+nx_n=a_1, \\ nx_1+x_2+2x_3+3x_4+\cdots+(n-1)x_n=a_2, \\ (n-1)x_1+nx_2+x_3+2x_4+\cdots+(n-2)x_n=a_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+\cdots+x_n=a_n. \end{cases}$$

51. 试证: 如果

$$x_1+x_2+x_3=0,$$
$$x_2+x_3+x_4=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{99}+x_{100}+x_1=0,$$
$$x_{100}+x_1+x_2=0,$$

那末 $$x_1=x_2=\cdots=x_{99}=x_{100}=0.$$

52. 解方程组:

$$\begin{cases} x^2+xy+xz-x=2, \\ y^2+xy+yz-y=4, \\ z^2+xz+yz-z=6. \end{cases}$$

53. 解方程组:

$$\begin{cases} x+y-z=7, \\ x^2+y^2-z^2=37, \\ x^3+y^3-z^3=1. \end{cases}$$

54. 解方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y}=2, \\ \dfrac{xyz}{y+z}=\dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{xyz}{z+x}=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

55. 解方程组:

$$\begin{cases} u^2+v^2+w=2, \\ v^2+w^2+u=2, \\ w^2+u^2+v=2. \end{cases}$$

56. 解方程组:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=1, \\ x^2+xz+z^2=4, \\ y^2+yz+z^2=7. \end{cases}$$

57. 解方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{x_2x_3\cdots x_n}{x_1}=a_1, \\ \dfrac{x_1x_3\cdots x_n}{x_2}=a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{x_1x_2\cdots x_{n-1}}{x_n}=a_n, \end{cases}$$

设 $a_1, \cdots, a_n, x_1, \cdots, x_n$ 是正数.

58. 求方程组的实数解:

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ xz+yz=(xy+1)^2. \end{cases}$$

59. 解方程组:

$$\begin{cases} x^2+xy+xz+yz=a, \\ y^2+xy+xz+yz=b, \\ z^2+xy+xz+yz=c, \end{cases}$$

设 $abc>0$.

60. 解方程组:

$$\begin{cases} x(y+z)=a^2, \\ y(z+x)=b^2, \\ z(x+y)=c^2, \end{cases}$$

设 $abc\neq 0$.

61. 求方程组的实数解:

$$\begin{cases} y^3+z^3=2a(yz+zx+xy), \\ z^3+x^3=2b(yz+zx+xy), \\ x^3+y^3=2c(yz+zx+xy), \end{cases}$$

其中 a、b、c 是三角形的边长.

62. 解方程组:

$$\begin{cases} y+2x+z=a(x+y)(z+x), \\ z+2y+x=b(y+z)(x+y), \\ x+2z+y=c(z+x)(y+z). \end{cases}$$

63. 解方程组:

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1, \\ xy+xz+yz=27. \end{cases}$$

64. 解方程组:

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ xy+yz+xz=a^2, \\ xyz=a^3. \end{cases}$$

65. 求证方程组

$$\begin{cases} 2x+y+z=0, \\ yz+zx+xy-y^2=0, \\ xy+z^2=0 \end{cases}$$

唯一的解是 $x=y=z=0$.

66．求方程组的实数解：

$$\begin{cases} yz+x^2=xz+y^2=xy+z^2, \\ \dfrac{2x}{yz+x^2}+\dfrac{2y}{xz+y^2}+\dfrac{2z}{xy+z^2}=x^3+y^3+z^3. \end{cases}$$

67．解方程组：

$$\begin{cases} xy+z^2=2, \\ yz+x^2=2, \\ xz+y^2=2. \end{cases}$$

68．解方程组：

$$\begin{cases} 3xy-\dfrac{16}{xz}=-5, \\ xz+\dfrac{8}{yz}=4, \\ yz-\dfrac{3}{xy}=1. \end{cases}$$

69．求满足条件 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$，$z\geqslant0$ 的方程组的解：

$$\begin{cases} yz-x^2-xz-xy=2, \\ y^2+xy+zy-zx=3, \\ z^2+zy+xz-xy=6. \end{cases}$$

70．求方程组的实数解：

$$\begin{cases} x^3+y^3=19xy+7xz+11yz, \\ x^3+z^3=26(xy+xz+yz), \\ y^3+z^3=47xy+35xz+29yz. \end{cases}$$

71．求方程组的实数解：

$$\begin{cases} x^2-y^2=\dfrac{1}{xy}+z, \\ y^2-z^2=\dfrac{1}{yz}+x, \\ z^2-x^2=\dfrac{1}{zx}+y. \end{cases}$$

72. 解方程组：

$$\begin{cases} y^2+xy+x^2=z, \\ x^2+zx+z^2=y, \\ z^3-y^3=x^2+2zx+zy. \end{cases}$$

73. 解方程组：

$$\begin{cases} xy=5x+6y-4z, \\ y^2=3x+5y-z, \\ yz=x+4y+2z. \end{cases}$$

74. 解方程组：

$$\begin{cases} y+z=2x, \\ y^2+3z^2=28x^2, \\ y^3+8z^3=(y-4x)(1-4z+7xy). \end{cases}$$

75. 求方程组的实数解：

$$\begin{cases} 4xy+y^2+2z^2=-3, \\ 4xz+x^2+2z^2=1, \\ 8yz+y^2+2z^2=1. \end{cases}$$

76. 解方程组：

$$\begin{cases} 2xz+y-4xy=1, \\ 4xz^2+4y^2-16xy^2=5, \\ 2xz^3+4y^3-16xy^3=7. \end{cases}$$

77. 解方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

78. 设(x, y, z)是方程组

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=b^2, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{c} \end{cases}$$

的解，求和 $x^3+y^3+z^3$.

79. 解方程组:

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=1, \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-6. \end{cases}$$

80. 解方程组:

$$\begin{cases} x^2+(y-z)^2=a, \\ y^2+(x-z)^2=b, \\ z^2+(x-y)^2=c. \end{cases}$$

81. 解方程组:

$$\begin{cases} xy+yz+zx=47, \\ x^2+y^2=z^2, \\ (z-x)(z-y)=2. \end{cases}$$

82. 求方程组的所有实数解:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2z^2}{1+z^2}, \\ y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}, \\ z=\dfrac{2y^2}{1+y^2}. \end{cases}$$

83. 求方程组的实数解:

$$\begin{cases} 2x_2=x_1+\dfrac{2}{x_1}, \\ 2x_3=x_2+\dfrac{2}{x_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2x_n=x_{n-1}+\dfrac{2}{x_{n-1}}, \\ 2x_1=x_n+\dfrac{2}{x_n}. \end{cases}$$

84. 试证，如果 a、b、c、d 是两两不相等的实数，(x, y, z) 是方程组

$$\begin{cases} 1+x+y+z=0, \\ a+bx+cy+dz=0, \\ a^2+b^2x+c^2y+d^2z=0 \end{cases}$$

的解，那末积 xyz 是正数.

在解下面的方程时，如果是偶次方根，那末只要考察使根号里的代数式成为非负数的未知数的值；并且这时根号仅取非负数根. 如果是奇次方根，那末根号里的代数式可以是任意实数(在这种情况下，根的符号与根号里代数式的符号相同).

85. 解方程:

$$\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}.$$

86. 解方程:

$$\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2}.$$

87. 解方程:

$$\sqrt{y-2+\sqrt{2y-5}}+\sqrt{y+2+3\sqrt{2y-5}}=7\sqrt{2}.$$

88. 解方程:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

89. 解方程:

$$\frac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+7}=\frac{7}{\sqrt{x+1}}.$$

90. 求方程的所有实数根:

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt[3]{2}.$$

91. 解方程:

$$\sqrt{x-4a+16}=2\sqrt{x-2a+4}-\sqrt{x}.$$