环境空气动力学引论

（下　册）

叶文虎　张霭琛　编

北京大学环境科学中心
一九八三年九月

66

目　　录

下篇　环境空气动力学初步

第八章　地球旋转的流体力学效应

第九章　大气密度不均匀的流体力学效应

第十章　大气温度变化的流体力学效应

第十一章　大气湍流扩散理论及模式 - - - - - - - - 86

第十二章　大气污染扩散的风洞实验模拟

第十三章　几个重要的课题

下篇　环境空气动力学初步

第八章　地球旋转的流体力学效应

通过上篇介绍知道，要描述流体的运动必须先明确所采用的坐标系。采用的坐标系不同，流体运动的形态就不同，因而描述流体运动的数学方程也不同。其次，由于牛顿定律只适用于惯性座标系，因此上篇介绍的流体力学基本微分方程组中的运动方程，也只适用于惯性坐标系。

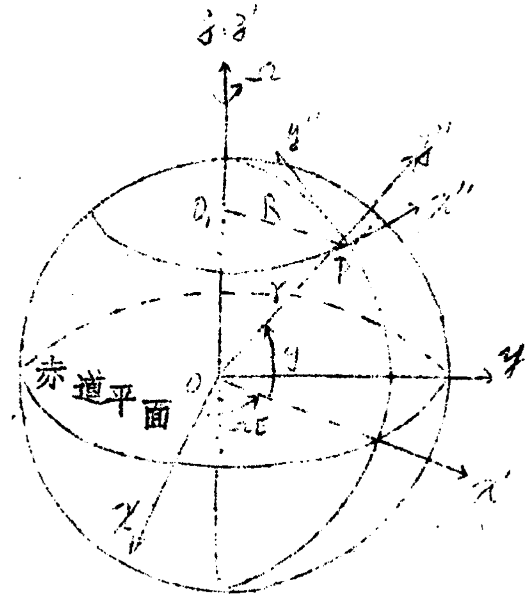
但是，在环境空气动力学中，观察和研究大气的运动，一般总是把坐标系建立在地球的表面上。由于地球是以一定的角速度绕地轴不停地旋转的，因此这个地面坐标系不是一个惯性坐标系。于是自然就会产生两个问题：一是这时流体的运动方程应该是什么样的？二是这时流体的运动会有一些什么样的特殊性质？

本章将扼要地讨论这两个问题。

§1　旋转坐标系——地心坐标系，地面坐标系。

在地球上研究流体的运动一般有三种坐标系，一是地球惯性坐标系，二是地心旋转坐标系（简称地心坐标系），三是地面坐标系。我们最关心的是地面坐标系。下面逐一介绍这三种坐标系。

为研究工作的方便，今后一律假定地球是一个半径 $r=6378$ 公里的标准的圆球。它以角速度 $\Omega=7.292\times10^{-5}$/秒绕地轴（穿过南北二极）转动。

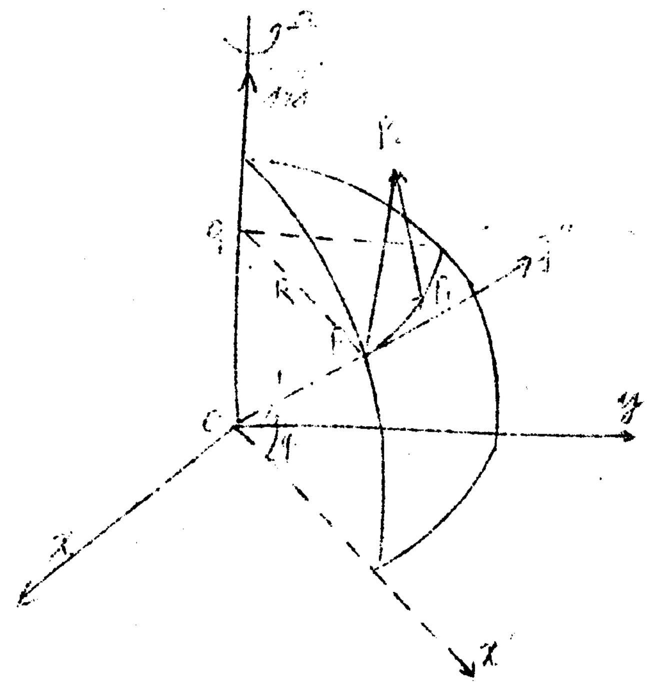


这时，地球惯性标系指的是 oxyz。其中 oz 轴与地轴一致，oxy 平面与赤道平面重合，但 ox 轴，oy 轴不随地球转动。（见上图）

地心旋转坐标系为 ox'y'z'。其中 oz' 轴与地轴一致，ox'y' 平面与赤道平面重合。ox' 轴与 oy' 轴随着地球转动。

地面坐标系为 Px"y"z"，又称为局地坐标系。其中 P 为地球表面上的任意一点，不妨设其地理纬度为 φ，Px"y" 固定在过 P 点的地球的切平面上，Pz" 轴与此切平面垂直并指向地球外部。显然，整个坐标系 Px"y"z" 以角速度Ω绕地轴旋转，其旋转半径为 R＝rcosφ，这里 r 为地球半径。

§2 转坐标系中的速度和加速度——柯里奥利力与惯性离心力



设初始时刻大气流体质点位于P，δt时刻后运动到P_2（在地球惯性坐标系中观察），于是有$\overrightarrow{PP_2}=\vec{V}_a\delta t$，其中$\vec{V}_a$为在地球惯性坐标系中大气流体质点的运动速度。但这时，由于地球的旋转，起始位置P已移动到P_1，因此，从地心旋转坐标系中来看，流体质点是从P_1运动到P_2的，故有$\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{V}\delta t$，其中$\vec{V}$为在地心旋转坐标系中流体质点的运动速度。另外，$\overrightarrow{PP_1}=\vec{V}_e\delta t$，其中$\vec{V}_e$为P点的牵连速度，显然$\vec{V}_e=\vec{\Omega}\times\vec{r}$，$\vec{V}_a=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

由上图可以看出：

$$\overline{PP_2} = \overline{PP_1} + \overline{P_1P_2}$$

从而可知：

$$\vec{v}_a = \vec{v} + \vec{v}_e$$

即
$$\frac{d_a \vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}。$$

这里 $\frac{d_a}{dt}$ 与 $\frac{d}{dt}$ 分别表示了在地球惯性坐标系中和在地心旋转坐标系中对时间的微商。

可以证明（略），此式不仅对 $\vec{r}$ 成立 而且对任意一种向量 $\vec{A}$ 均成立，即有：

$$\frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

当然，取 $\vec{A} = \vec{v}_a$ 时，上述关系式也应成立，故有

$$\frac{d_a \vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_a}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_a$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{\Omega} \times (\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r})$$

$$= \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$+ \vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

$$=\frac{d\vec{v}}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{v}+\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$$

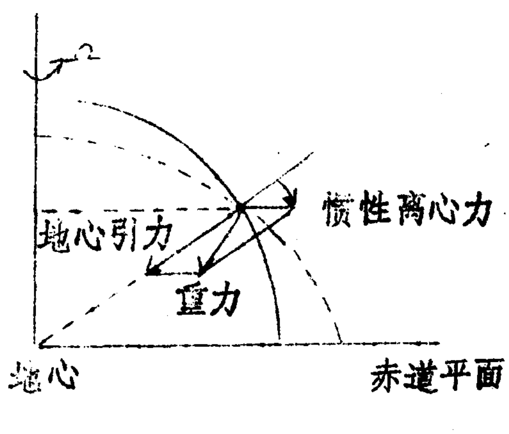
由于有：

$$\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})=\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{R})=-\Omega^{2}R$$

故得 $$\frac{d_a\vec{v}_a}{dt}=\frac{d\vec{v}}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{v}-\Omega^{2}\vec{R}$$

以后，我们把（$-\frac{d\vec{v}}{dt}$）称作惯性力；把（$-2\vec{\Omega}\times\vec{v}$）称作柯里奥利力，不难看出这里一个侧向力；把$\Omega^{2}\vec{R}$称作惯性离心力，显然，惯性离心力是沿着$\vec{R}$的方向，指向地球外部的。

这里顺便指出，惯性离心力和地心引力的合力即我们通常所说的重力 g。由下图可以看出，如果地球是一个标准的圆球，则重力并不垂直于地球表面。当把惯性离心力分解为两部分，一部分与地心引力的方向相反，一部分则指向赤道。后一部分作用力



使得地球成为一个两极比较扁平的椭球体，而不是一个标准的圆球。这时重力处处于地球的表面垂直。

§3 地面坐标系中的大气运动方程组

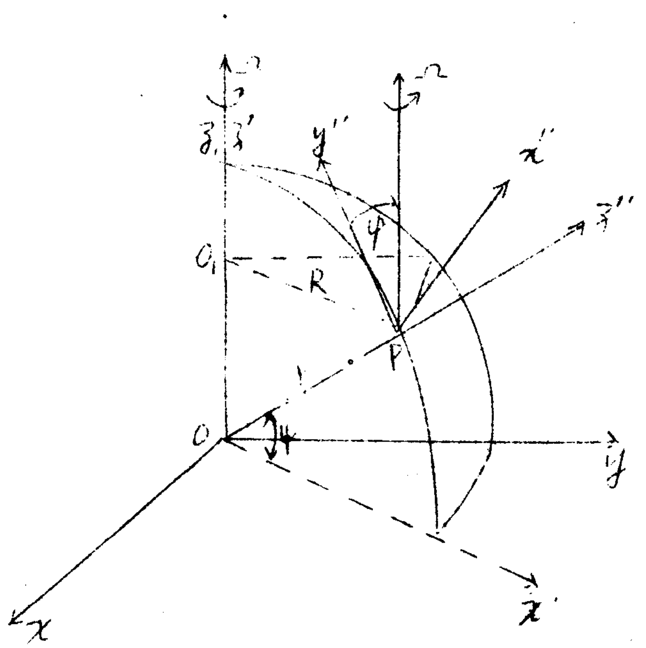
当我们把大气看成是不可压缩的粘性流体并忽略热力作用时，根据流体力学的基本方程和上节得到的关系式，立即可以得到在地面坐标系中大气的运动方程：

$$\frac{d\vec{V}}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{V}-\Omega^{2}\vec{R}=\vec{F}+\vec{g}'-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^{2}\vec{V}$$

其中$\vec{g}'$为地心引力。当然也可以写成：

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}+\vec{g}-2\vec{\Omega}\times\vec{V}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^{2}\vec{V}$$

这时，$\vec{g}=\vec{g}'+\Omega^{2}\vec{R}$ 为重力。



另外，从上图可以看出，地球自转角速度$\vec{\Omega}$在地面坐标系 Px"y"z" 的三个坐标轴方向上的分量分别为：

$$\begin{cases} \Omega_x = 0 \\ \Omega_y = \Omega\cos\varphi \\ \Omega_z = \Omega\sin\varphi \end{cases}$$

类似地，$\vec{v}$在Px"y"z"中的分量分别为：

$$\begin{cases} \vec{v}_x = U \\ \vec{v}_y = V \\ \vec{v}_z = W \end{cases}$$

（注意，为简单起见，在这里我们把地面坐标系的坐标x"，y"，z"一律写成x，y，z）。于是，可得：

$$2\vec{\Omega}\times\vec{v} = 2\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & \Omega\cos\varphi & \Omega\sin\varphi \\ U & V & W \end{pmatrix}$$

即：

$$\begin{cases} (2\vec{\Omega}\times\vec{v})_x = 2\Omega\cos\varphi\cdot W - 2\Omega\sin\varphi\cdot V \\ \qquad\qquad\approx -2\Omega\sin\varphi\cdot V \\ (2\vec{\Omega}\times\vec{v})_y = 2\Omega\sin\varphi . U \\ (2\Omega\times\vec{v})_z = -2\Omega\cos\varphi\cdot U \end{cases}$$

由于在实际大气中，垂直运动的速度总是远远小于水平运动的，即 $W<<U$，V，故可以近似地认为：

$$(2\vec{\Omega}\times\vec{v})_x \doteq -2\Omega\sin\varphi\cdot V$$

又由于与 $\vec{g}$ 相比，z 方向的柯氏加速度也是一个很小的小量，故又可以近似地认为：

$$(2\vec{\Omega}\times\vec{v})_z \doteq 0$$

于是有：

$$\begin{cases}(2\vec{\Omega}\times\vec{v})_x=-2\Omega\sin\varphi\cdot V\\(2\vec{\Omega}\times\vec{v})_y=2\Omega\sin\varphi\cdot U\\(2\vec{\Omega}\times\vec{v})_z=0\end{cases}$$

这时，我们可以很容易地写出地面坐标系中大气运动基本微分方程组的标量形式：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial y}+\dfrac{\partial W}{\partial z}=0\\[2ex]\dfrac{\partial U}{\partial t}+U\dfrac{\partial U}{\partial x}+V\dfrac{\partial U}{\partial y}+W\dfrac{\partial U}{\partial z}\\[2ex]\qquad=F_x+2\Omega V\sin\varphi-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}+\nu\nabla^2 U\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial t}+U\dfrac{\partial V}{\partial x}+V\dfrac{\partial V}{\partial y}+W\dfrac{\partial V}{\partial z} \\
\qquad =F_y-2\Omega U\sin\varphi-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2 V \\
\dfrac{\partial W}{\partial t}+U\dfrac{\partial W}{\partial x}+V\dfrac{\partial W}{\partial y}+W\dfrac{\partial W}{\partial z} \\
\qquad =F_z-g-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 W
\end{cases}
$$

今后记 $f=2\Omega\sin\varphi$，则方程组写为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial y}+\dfrac{\partial W}{\partial z}=0 \\
\dfrac{\partial U}{\partial t}+U\dfrac{\partial U}{\partial x}+V\dfrac{\partial U}{\partial y}+W\dfrac{\partial U}{\partial z} \\
\qquad =F_x+fv-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 U \\
\dfrac{\partial V}{\partial t}+U\dfrac{\partial V}{\partial x}+V\dfrac{\partial V}{\partial y}+W\dfrac{\partial V}{\partial z} \\
\qquad =F_y-fU-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2 V \\
\dfrac{\partial W}{\partial t}+U\dfrac{\partial W}{\partial x}+V\dfrac{\partial W}{\partial y}+W\dfrac{\partial W}{\partial z} \\
\qquad =F_z-g-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 W
\end{cases}
$$

将这一方程组和不可压缩粘性流体的基本微分方程组加以比较，可以看出唯一的差异在于运动方程（x和y方向）的右端附加了一个柯氏力作用的项。这就是地球旋转的主要流体力学效应。为了进一步弄清它的特性，我们先略去方程组中的外力和重力项，然后对此方程组进行量纲分析。首先取：

$$\begin{cases}\text{特征长度为} L_0 \\ \text{特征速度为} U_0 \\ \text{特征角速度为} \Omega_0 \\ \text{特征压力为} \rho U_0^2 \\ \text{特征时间为} 1/\Omega_0 ,\end{cases}$$

则无量纲物理量为：

$$\begin{cases} x^*=x/L_0 ,\quad y^*=y/L_0 ,\quad z^*=z/L_0 , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \nabla^*=\nabla/L_0^2 , \\ U^*=U/U_0 ,\quad V^*=V/U_0 ,\quad W^*=W/U_0 , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad p^*=p/\rho U_0^2 \\ \Omega^*=\Omega/\Omega_0 ,\quad f^*=f/\Omega_0 ,\quad t^*=t/\dfrac{1}{\Omega_0} \end{cases}$$

于是方程组化为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U^*}{\partial x^*}+\dfrac{\partial V^*}{\partial y^*}+\dfrac{\partial W^*}{\partial z^*}=0 \\ \dfrac{\partial U^*}{\partial t^*}+\left(\dfrac{U_0}{L_0\Omega_0}\right)\left(U^*\dfrac{\partial U^*}{\partial x^*}+V^*\dfrac{\partial U^*}{\partial y^*}+W^*\dfrac{\partial U^*}{\partial z^*}\right) \\ \qquad =f^*V^*-\left(\dfrac{U_0}{L_0\Omega_0}\right)\cdot\dfrac{\partial p^*}{\partial x^*}+\left(\dfrac{\nu}{L_0^2\Omega_0}\right)\nabla^{*2}U^* \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial V^*}{\partial t^*}+\left(\frac{U_0}{L_0\Omega_0}\right)\left(U^*\frac{\partial V^*}{\partial x^*}+V^*\frac{\partial V^*}{\partial y^*}+W^*\frac{\partial V^*}{\partial z^*}\right)\\
&\qquad=-f^*U^*-\left(\frac{U_0}{L_0\Omega_0}\right)\frac{\partial p^*}{\partial y^*}+\left(\frac{\nu}{L_0^2\Omega_0}\right)\nabla^{*2}V^*\\
&\frac{\partial W^*}{\partial t^*}+\left(\frac{U_0}{L_0\Omega_0}\right)\left(U^*\frac{\partial W^*}{\partial x^*}+V^*\frac{\partial W^*}{\partial y^*}+W^*\frac{\partial W^*}{\partial z^*}\right)\\
&\qquad=-\left(\frac{U_0}{L_0\Omega_0}\right)\frac{\partial p^*}{\partial z^*}+\left(\frac{\nu}{L_0^2\Omega_0}\right)\nabla^{*2}W^*
\end{aligned}\right.$$

考察此方程组可以看出，它包含了两个极为重要的无量纲系数：

$$R_0=\frac{U_0}{L_0\Omega_0}\quad,\quad E_k=\frac{\nu}{L_0^2\Omega_0}$$

这里R_0称为罗斯比数，E_k称为埃克曼数。R_0表示了惯性力和柯氏力作用之比，E_k表示了粘性力和柯氏力之比。

对这两个无量纲系数稍加分析即可看出：

（1）当L_0稍大时，$E_k\ll 1$，则方程中的粘性项可以略去，当L_0足够大时，$R_0\ll 1$，则方程中的惯性项可以略去。这时，如果运动是定常的，则方程表现了重力、气压梯度力和柯氏力之间的关系，即下节要讲的地转流动的情况。

（2）当L_0足够小时，$R_0\gg 1$，$E_k\gg 1$，这时柯氏力的作用相对说来非常小，因而可以从方程中略界去。这说明，研究小范围内的大气运动时可以不考虑地球旋转的影响。

从上面的分析可以看出，L_0 取何值时为足够小？取何值时为足够大是一个十分重要的问题。另外，对于中等程度的 L_0，这时惯性力，粘性力，气压梯度力，柯氏力的重要性是相当的，方程中不能去掉任何一项，因而研究处理的难度是相当大的。而 L_0 为中等程度的范围又正好是环境问题中十分重要的一种范围。

§4　地转流动和自由大气中的风

从前节的分析可以看出，粘性力与惯性力的作用都随着 L_0 的增加而减小，并且在 L_0 达到某一值以后，可以完全不考虑惯性力和粘性力作用的影响。于是我们把这时的大气称为自由大气，并把完全由柯氏力和气压梯度力所控制的大气流动称为地转流动。当运动为定常时，此流动的基本方程组为：

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$2\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

当然还可以用标量形式近似地写成：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z} = 0 \\[2ex] fV = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\[2ex] fU = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\[2ex] g = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

其中$\vec{v}=(U, V, W)$为自由大气中的风，又称为地转风。分析这一方程组可以看出，其中最后一个方程即为静力学公式：

$$\Delta p=-\rho g(\Delta H)$$

而由第二和第三个方程可以导出：

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=\left[\frac{1}{\rho f}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}+\left(-\frac{1}{\rho f}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}\right)\right]=0$$

再由第一个方程（连续方程）即可得到：

$$\frac{\partial W}{\partial z}=0 .$$

即：

$$W=常数$$

考虑到$z=0$时，$w=0$，故知这里的常数应为零，即：

$$W\equiv 0$$

另外，对矢量形式的运动方程取旋度，注意到对标量函数的梯度取旋度为零，则有：

$$\nabla\times[2(\vec{\Omega}\times\vec{v})]=\nabla\times\left(-\frac{1}{\rho}\nabla p\right)$$

即： $$\nabla\times(\vec{\Omega}\times\vec{v})=0$$

由于 $\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a}-(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}+\vec{a}\,\nabla\cdot\vec{b}-\vec{b}\nabla\cdot\vec{a}$

则：$$\nabla\times(\vec{\Omega}\times\vec{v})=(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\Omega}-(\vec{\Omega}\cdot\nabla)\vec{v}+\vec{\Omega}\nabla\cdot\vec{v}-\vec{v}\nabla\cdot\vec{\Omega}=0$$

如果注意到$\vec{\Omega}$为常数矢量及连续方程可知有：

$$\nabla\times(\vec{\Omega}\times\vec{v})=(\vec{\Omega}\cdot\nabla)\vec{v}=0$$

这时，如果取 z 轴为旋转轴，则上式便成为：

$$\Omega\frac{\partial}{\partial z}\vec{v}=0\ .$$

即

$$\frac{\partial U}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}=0$$

上述结果说明，地球自转的流体力学效应是水平和二维的。这是由普劳德曼（Proudman）和泰勒（Taylor）导出的，故一般称为Proudman-Taylor定理。

这个定理的文字叙述为：对不可压缩流体，在有势力作用下作定常缓慢的运动时，如果存在着较强的旋转，流动将趋于两维化，其速度将与旋转轴的方向无关。

现在，这个理论结果已经得到了实验和观测的证实。

§5 埃克曼层及该层中的风

前面曾经讲到，当L_0大于某一数值以后，可以不考虑惯性力和粘性力对大气流动的影响。也就是说，当L_0小于此数值以

后，必须考虑惯性力，粘性力对大气流动的影响。在气象学中，取L_0为垂直高度，并将必须考虑惯性力和粘性力的特征高度定为10^3米，这时R_0的数量级为10^2。为了和自由大气加以区别，并把10^3米以下的这层大气称为行星边界层或摩擦层。下面将会看到有时也把这一层大气称为埃克曼层或大气边界层。

下面我们沿用流体力学的研究方法，从基本微分方程组出发来研究这一层中大气的流动以及这一层的厚度。

1．层流埃克曼层

假定大气边界层中大气的流动是定常的层流流动，因而其水平面内的运动方程为：

$$\begin{cases} fv-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{d\tau_x}{dz}=0 \\ -fU-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\dfrac{d\tau_y}{dz}=0 \end{cases}$$

其中 $\tau_x=\nu\dfrac{\partial U}{\partial z}$，$\tau_y=\nu\dfrac{\partial V}{\partial z}$。若再假定气压梯度不随高度变化，即与自由大气中的一样，则有

$$u_g=-\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial y},\quad v_g=\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial x},$$

这里u_g，v_g为自由大气中地转风的速度。代入上述运动方程则得：