二轮冲刺
优化讲练

数学

精讲本

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

数学

二轮冲刺
优化讲练

精讲本

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社

书　　名　高考零距离　二轮冲刺优化讲练·数学
作　　者　本书编写组
责任编辑　田　鹏
出版发行　凤凰出版传媒集团
　　　　　江苏教育出版社(南京市马家街 31 号 210009)
网　　址　http://www.1088.com.cn
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销　江苏省新华发行集团有限公司
照　　排　南京展望文化发展有限公司
印　　刷　如皋市印刷有限公司
厂　　址　如皋市集贤路西首　邮编 226500
电　　话　0513－87653848、87287087
开　　本　787×1092 毫米　1/16
印　　张　16.25
字　　数　573 000
版　　次　2006 年 1 月第 1 版
　　　　　2006 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN　7－5343－7246－1/G·6931
定　　价　20.30 元
盗版举报　025－83204538

编写说明

为了更好地辅导学生进行2006年高考冲刺阶段的复习迎考，我们在推出《高考零距离一轮优化讲练设计》之后，又推出了这套《高考零距离二轮冲刺优化讲练》丛书。本丛书涵盖了所有高考科目。

编写者均为我省优秀教师，具有多年高三毕业班的把关经验，"针对性强"和"高效实用"是我们始终遵循的原则。

针对性强体现在针对我省高考从2004年开始自主命题这样一个新的背景，我们及时总结了近两年来高考出现的新特点、新变化、新趋势，把准高考的动态和走向，编写的内容能够对准2006年高考要求的路子，切实有助于学生备考能力的提升。

高效实用则体现在本书的编排设计和内容选材上。

在编排设计上，本书由"精讲本"和"精练本"2册组合而成。"讲"分册：我们力求精炼而透彻，对专题范围的重点、难点和高考热点作了深入浅出的分析，力求阐述知识之间的内在联系，总结出规律性的认识，便于学生宏观把握和整体感知。"考点聚焦"一栏中，我们通过对高考考点分布情况的分析，作了一些规律性的总结，并对2006年高考的走向和趋势作出了合理的预测。在"典例精讲"一栏中，我们选择了一些近年来高考中出现的具有典型意义的试题，并在编排时将例题和答案解析分开，意在让学生先做一做这些例题，然后去对照答案，找出自己解题中存在的问题，再通过阅读解析部分(在此我们为学生提供了解题的思路、方法和技巧)，找到解决问题的方法和途径。"练"分册：我们在习题的选择上下了很大功夫，力求选编的习题能适合学生备考的需要。我们将同一专题或同一类型的习题编排在一起，意在让学生举一反三，触类旁通。最后还附上了多份2006年高考模拟试卷。本部分采用八开活页装订，便于教师批改。"讲"和"练"在编排上是分开的，并将"精练本"中所有习题的答案附在"精讲本"中，这样就非常方便教师和学生使用。"讲"是"练"的指导，"练"是"讲"的实践，学生在使用时应反复对照，结合使用，从中必能感悟到一些复习备考的奥妙和诀窍。

最后祝愿考生们多加油，有好运！

2005年12月

专题 1　函数的综合应用

[考点聚焦]

函数是中学数学的主要组成部分，它不仅是中学数学教学的重点，也是高考考查的重点．近年来，函数在高考中的分值约占 30%左右．函数的性质是函数最核心的内容，中学数学所学习的函数性质主要有：值域（最值）、对称性（含奇偶性）、单调性、周期性等．研究函数的性质要注意分析函数解析式的特征，还要重视函数图象的辅助作用．抽象函数性质的研究是一个难点．

1－1　用函数的性质解题

[典例精讲]

例 1　若函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+4$ 的定义域、值域都是闭区间 $[2,\ 2b]$，则　　（　　）

A. $b=2$　　B. $b=1$ 或 $b=2$

C. $b\in(1,\ 2]$　　D. $b\in[1,\ 2)$

例 2　函数 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{1-|x|}$ 的定义域为（　　）

A. $[-2,\ 2]$

B. $[-2,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ 2]$

C. $(-\infty,\ -2)\cup(2,\ +\infty)$

D. $(-2,\ -1)\cup(1,\ 2)$

例 3　函数 $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$ 的单调递增区间是　　（　　）

A. $[1,\ 3]$　　B. $[2,\ 3]$

C. $[1,\ 2]$　　D. $(-\infty,\ 2]$

例 4　若 $a>0$，求函数 $f(x)=x+\frac{a^2}{x}$ 的单调区间．

例 5　（1）已知函数 $f(x)$ 的周期为 4，且等式 $f(2+x)=f(2-x)$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 均成立，求证：$f(x)$ 是偶函数；

（2）设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+4)=f(x)$，当 $x\in[4,\ 6]$ 时，$f(x)=2^x+1$，求 $f(x)$ 在区间 $[-2,\ 0]$ 上的表达式．

例 6　已知函数 $f(x)=\frac{2x^2+bx+c}{x^2+1}(b<0)$ 的值域为 $[1,\ 3]$．

（1）求实数 b、c 的值；

（2）判断函数 $f(x)$ 在 $[-1,\ 1]$ 上的单调性，并给出证明．

例 7 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，对任意实数 m、n 都满足 $f(m+n)=f(m)+f(n)-1$，且 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)>0$.

(1) 证明：$f(x)$ 是增函数；

(2) 解不等式 $1+f(\sqrt{x^2+1})\leqslant f(1)+f(ax)$ $(a>0)$.

例 8 已知二次函数 $y=f(x)$ 在 $x=\frac{t+2}{2}$ 处取得最小值 $-\frac{t^2}{4}$ $(t\neq 0)$，且 $f(1)=0$.

(1) 求 $y=f(x)$ 的表达式；

(2) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 上的最小值为 -5，求对应的 t 和 x 的值.

1-2 函数的综合运用

例 1 定义两种运算：$a\oplus b=\sqrt{a^2-b^2}$，$a*b=\sqrt{(a-b)^2}$，则函数 $f(x)=\frac{2\oplus x}{(x*2)-2}$ 的奇偶性为 ( )

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 既是奇函数也是偶函数

D. 既不是奇函数也不是偶函数

例 2 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上函数 $f(x)=x^2+px+q$ 与 $g(x)=x^2-2x$ 在同一点取得最小值，$f(x)_{\min}=3$，那么 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的最大值是 ( )

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{13}{4}$

C. 4　　D. 8

例 3 偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内是减函数，若 $f(-1)<f(\lg x)$，则实数 x 的取值范围是________.

例 4 设函数 $f(x)=5^x$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 满足条件：$f^{-1}(10)=a+1$，且 $\log_2(2^x-1)+\log_2(2^{x+1}-2)\leqslant 5$，求 $g(x)=5^{ax}-4^x$ 的值域.

例 5 设函数 $f(x)=a^x$，$g(x)=(1+a)x+b$，其中 $a\in\mathbf{N}$，且 $a\geqslant 2$，如果存在两个正整数 x_1、x_2，使得 $f(x_1)=g(x_2)$.

(1) 试用 x_1、a、b 表示 x_2；

(2) 若 $b\in[1,a]$，求 b 的值.

例 6 已知函数 $f(x)=x^2+ax+3$，当 $x\in[-2,2]$ 时，$f(x)\geqslant a$ 恒成立，求 a 的最小值.

例 7 函数 $f(x)=\log_a(x-3a)$ $(a>0$,且 $a\neq 1)$,当点 $P(x, y)$ 是函数 $y=f(x)$ 图象上的点时,$Q(x-2a, -y)$ 是函数 $y=g(x)$ 图象上的点.

(1) 写出函数 $y=g(x)$ 的解析式;

(2) 当 $x\in[a+2, a+3]$ 时,恒有 $|f(x)-g(x)|\leqslant 1$,试确定 a 的取值范围.

例 8 已知函数 $f(x)=a^x+\dfrac{x-2}{x+1}$ $(a>1)$.

(1) 求证:函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上为增函数;

(2) 求证:方程 $f(x)=0$ 没有负数根.

1-3 如何进行函数证明

例 1 对于函数 $f(x)=ax^2+bx+1$ $(a>0)$,如果方程 $f(x)=x$ 有相异的两根 x_1、x_2.

(1) 若 $x_1<1<x_2$,且 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=m$ 对称,求证:$m>\dfrac{1}{2}$;

(2) 若 $0<x_1<2$ 且 $|x_1-x_2|=2$,求 b 的取值范围;

(3) 若 α、β 为区间 $[x_1, x_2]$ 上的两个不同的点,求证:$2a\alpha\beta-(1-b)(\alpha+\beta)+2<0$.

例 2 设 $f(x)=|\lg x|$,a、b 为满足 $f(a)=f(b)=2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ 的实数,其中 $0<a<b$.

(1) 求证:$a<1<b$;

(2) 求证:$2<4b-b^2<3$.

例 3 设函数 $\varphi(x)=\dfrac{x^2+2ax+b}{x^2+1}$ $(a\neq 0$, a、$b\in\mathbf{R})$.

求证:(1) 存在两个实数 m_1、m_2 $(m_1<m_2)$ 满足 $\varphi(x)-m_i=\dfrac{[(1-m_i)x+a]^2}{(1-m_i)(x^2+1)}$ $(i=1, 2)$;

(2) $(1-m_1)(1-m_2)=-a^2$;

(3) $m_1\leqslant\varphi(x)\leqslant m_2$.

例 4 已知 a、b、c 是实数,函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,$g(x)=ax+b$,当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,$|f(x)|\leqslant 1$.

(1) 证明:$|c|\leqslant 1$;

(2) 证明:当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,$|g(x)|\leqslant 2$;

(3) 设 $a>0$,有 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,$g(x)$ 的最大值为 2,求 $f(x)$.

例 5 已知 $f(x)=x^2+ax+b$ $(a$、$b\in\mathbf{R})$,$x\in[-1, 1]$.

(1) 记 $|f(x)|$ 的最大值为 M,求证:$M\geqslant\dfrac{1}{2}$;

(2) 求出 $M=\dfrac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 的表达式.

专题 2 三 角 函 数

[考点聚焦]

三角函数具有公式多、概念多、性质多的特点，与代数、几何等知识联系密切.三角函数具有实际意义和广泛的应用，是高考的必考内容.高考试题中，常常有一小一大的低、中档题，分值占整个试卷的 10%左右，从近几年三角试题看，主要有以下三个热点：

1. 三角函数的图象和性质

本内容多以选择题、填空题的形式出现，一般为低、中档题，有时也以解答题的形式出现，这些试题对单一性质考查较少，一道题所涉及的三角函数性质在两个或两个以上，且与实际生活联系密切.

2. 三角函数的恒等变形

本内容在函数、不等式以及解析几何、立体几何中有广泛的应用.从近几年的高考试题看，一些试题的求解过程需要以三角变换为工具.高考中主要考查同角三角函数关系，诱导公式，三角函数的和、差、倍、半角公式.

3. 三角函数的最值问题

求解三角函数的值域和最值是近几年高考的常考内容，又是三角函数解答题的主要题型.解决这类问题不仅需要用到三角函数的定义域、值域、单调性、图象以及三角函数的恒等变形，还常涉及到函数、不等式、方程及几何计算等众多知识，这类问题往往概念性较强，具有一定的综合性和灵活性.

2－1 三角函数的图象性质及三角变换

[典例精讲]

例 1 (1) 在 $(0, 2\pi)$ 内，使 $\sin x > \cos x$ 成立的 x 的取值范围为 ( )

A. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$

B. $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

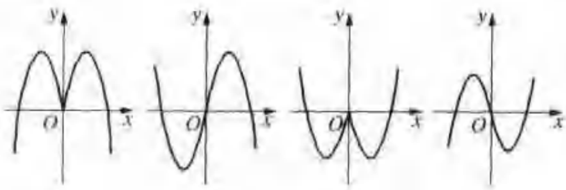
D. $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$

(2) 已知 $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{3}{8}$，且 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$，则 $\cos\alpha - \sin\alpha$ 等于 ( )

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{4}$ D. $\pm\frac{1}{2}$

(3) 函数 $y = -x\cos x$ 的部分图象是 ( )



A. B. C. D.

(4) 已知点 $P(\sin\alpha - \cos\alpha, \tan\alpha)$ 在第一象限，则在 $[0, 2\pi]$ 内 α 的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$

B. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$

D. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

(5) 关于函数 $f(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ $(x \in \mathbf{R})$，

有下列命题：

① 由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 x_1-x_2 必是 π 的整数倍；

② $y=f(x)$ 的表达式可改写为 $y=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$；

③ $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称；

④ $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称.

其中正确命题的序号是______(注：把正确的命题的序号都填上).

例 2 (2003 江苏) 已知函数 $f(x)=2\sin x\cdot(\sin x+\cos x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和最大值.

(2) 在直角坐标系中，画出函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的图象.

例 3 (2000 全国) 已知函数 $y=\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 当函数 y 取得最大值时，求自变量 x 的集合；

(2) 该函数的图象可由 $y=\sin x\ (x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到？

例 4 求证：$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

例 5 (1) 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{6}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,求 $\sin 4\alpha$ 的值；

(2) 已知 $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$, $\frac{5\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}$,求 $\frac{\sin 2x+2\sin^2 x}{1-\tan x}$ 的值.

例 6 求函数 $y=\frac{\sqrt{3}\cos x}{2+\sin x}$ 的最大值和最小值.

例 7 求 $\cot 10^\circ-4\cos 10^\circ$ 的值.

例 8 已知 $3\sin^2\alpha-2\cos^2\beta=\sin\alpha$,求函数 $y=\frac{\sin 3\alpha\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cos^3\alpha}{\cos^2 2\alpha}+2\sin^2\beta$ 的最值.

2-2 三角形中的有关问题

[典例精讲]

例 1 (1) 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos A=\frac{5}{13}$，$\sin B=\frac{3}{5}$，则 $\cos C$ 的值为 ( )

A. $\frac{16}{65}$　　B. $\frac{56}{65}$

C. $\frac{16}{65}$ 或 $\frac{56}{65}$　　D. $-\frac{16}{65}$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，$A=60^\circ$，$b=1$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，则 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$ 等于 ( )

A. $\frac{8}{3}\sqrt{3}$　　B. $\frac{2}{3}\sqrt{39}$

C. $\frac{26}{3}\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{7}$

(3) 已知 $\tan A+\tan B+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan A\tan B$，且 $\sin B\cos B=\frac{\sqrt{3}}{4}$，则 $\triangle ABC$ 是 ( )

A. 正三角形

B. 直角三角形

C. 正三角形或直角三角形

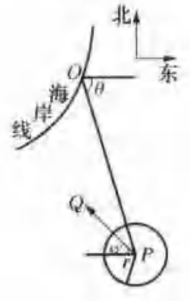
D. 直角三角形或等腰三角形

(4) 在 $\triangle ABC$ 中，三个内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若 $a^2+c^2=b^2+ac$，且 $a:c=(\sqrt{3}+1):2$，则 $\angle C=$ ________.

例 2 (2002 京皖春季) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 A、B、C 成等差数列，求 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}+\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$ 的值.

例 3 (2001 全国文科) 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长 $AB=2$，$BC=6$，$CD=DA=4$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

例 4 (2003 全国) 在某海滨城市附近海面有一台风，据监测，当前台风中心位于城市 O(如图) 的东偏南 θ $\left(\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$ 方向 300 km 的海面 P 处，并以 20 km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动. 台风侵袭的范围为圆形区域，当前半径为 60 km，并以 10 km/h 的速度不断增大. 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



(例 4)

例 5 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 满足 $A+C=2B$，$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$，求 $\cos\frac{A-C}{2}$ 的值.

例 6 已知在$\triangle ABC$中, $\tan A = \frac{2}{5}$, $\tan B = \frac{3}{7}$, 且最长边为$\sqrt{2}$.

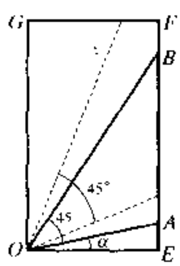
求: (1) 角C的大小.

(2) 最短边的长.

例 7 如图, A、B是一矩形$OEFG$边界上不同的两点, 且$\angle AOB = 45^\circ$, $OE = 1$, $EF = \sqrt{3}$, 设$\angle AOE = \alpha$.

(1) 写出$\triangle AOB$面积关于α的函数关系式$f(\alpha)$;

(2) 求函数$f(\alpha)$的取值范围.

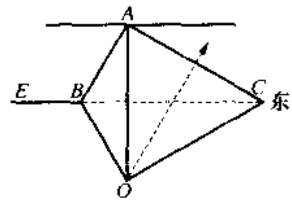


(例 7)

例 8 如图, 海岛O上有一座海拔1 000 m高的山, 山顶设有一个观察站A. 上午11时测得一轮船在岛北偏东60°的C处, 俯角为30°, 11时10分又测得该船在岛的北偏西60°的B处, 俯角为60°.

(1) 该船的速度为每小时多少千米?

(2) 若此船以不变的航速继续前进, 则它何时到达岛的正西方向?此时所在点E离开岛多少千米?



(例 8)

专题3 数 列

[考点聚焦]

数列的通项公式的探求是数列这一部分考查的主要对象，也是高考的热点，基本上每年都要考查.有时以小题形式单独出现，但大多数情况是在大题中设一问探求数列的通项公式.

等差数列与等比数列是高中代数的重要内容之一，也是历年高考的重点、热点和难点.从近几年高考试题来看，数列部分内容占分约在16分至21分之间，大约占总分的10%～13%，题型为一道选择或填空题、一道解答题.而解答题大多为中等以上难度的试题，甚至为压轴题.试题通常以数列为载体，在数列、函数、不等式、解析几何等知识网络的交汇处命题，设问情景新颖、独特，突出考查考生的思维能力、分析解决问题的能力、运算能力以及数学各分支间的沟通的能力，因此试题均有较好的区分度.

3-1 等差数列与等比数列

[典例精讲]

例1 (2003全国)已知方程$(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$的四个根组成一个首项为$\frac{1}{4}$的等差数列，则$|m-n|$等于 ( )

A. 1　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{8}$

例2 (2003上海春季)设$f(x)=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}$，利用课本中推导等差数列前$n$项和的公式的方法，可求得$f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+\cdots+f(5)+f(6)$的值为________.

例3 (2005山东)已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=5$，前n项和为S_n，且$S_{n+1}=2S_n+n+5\ (n\in \mathbf{N}^*)$.

(1) 证明：数列$\{a_n+1\}$是等比数列；

(2) 令$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，求函数$f(x)$在点$x=1$处的导数$f'(1)$.

例4 (1) 已知数列$\{c_n\}$，其中$c_n=2^n+3^n$，且数列$\{c_{n+1}-Pc_n\}$为等比数列，求常数P；

(2) 设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$是公比不相等的两个等比数列，$c_n=a_n+b_n$，证明：数列$\{c_n\}$不是等比数列.

例5 已知数列$\{a_n\}$中，S_n是它的前n项和，并且$S_{n+1}=4a_n+2$，$a_1=1$.

(1) 设$b_n=a_{n+1}-2a_n$，求证：$\{b_n\}$是等比数列；

(2) 设$c_n=\frac{a_n}{2^n}$，求证：数列$\{c_n\}$是等差数列；

(3) 求数列$\{a_n\}$的通项公式及前n项的和.

例 6 设数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$,前n项和S_n满足关系式:$3tS_n-(2t+3)S_{n-1}=3t$ $(t>0,\ n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$.

(1) 求证:数列$\{a_n\}$是等比数列;

(2) 设数列$\{a_n\}$的公比为$f(t)$,作数列$\{b_n\}$,使$b_1=1,\ b_n=f\left(\frac{1}{b_{n-1}}\right)$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$,求b_n.

例 7 已知$f(x)=(x-1)^2,\ g(x)=4(x-1)$,数列$f(a_n)$满足$a_1=2,\ (a_{n+1}-a_n)g(a_n)+f(a_n)=0$.

(1) 是否存在常数c,使得数列$\{a_n+c\}$成等比数列?并证明你的结论.

(2) 设$b_n=3f(a_n)-[g(a_{n+1})]^2$,求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

例 8 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,已知$a_3=12,\ S_{12}>0,\ S_{13}<0$.

(1) 求公差d的取值范围;

(2) 指出$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n$中哪一个值最大,并说明理由.

例 9 数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{a_n+1}{a_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 判断数列$\{a_n\}$是否为等差数列,并证明你的结论;

(2) 求数列$\{b_n\}$中值最大的项和值最小的项.

例 10 (2005 全国理)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,前n项和$S_n>0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$.

(1) 求q的取值范围;

(2) 设$b_n=a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}$,记$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$,试比较$S_n$和$T_n$的大小.

3-2 数列的综合应用

[典例精讲]

例 1 (2005 全国)如果$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_8$为各项都大于零的等差数列,公差$d\neq0$,则 ( )

A. $a_1a_8>a_4a_5$ B. $a_1a_8<a_4a_5$

C. $a_1+a_8>a_4+a_5$ D. $a_1a_8=a_4a_5$

例 2 关于数列有下面四个命题:

① 若$a,\ b,\ c,\ d$成等比数列,则$a+b,\ b+c,\ c+d$也成等比数列;

② 若数列$\{a_n\}$既是等差数列也是等比数列,则$\{a_n\}$为常数列;

③ 若数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$S_n=a^n-1$ $(a\in\mathbf{R})$,则$\{a_n\}$为等差或等比数列;

④ 若数列$\{a_n\}$为等差数列,且公差不为零,则数列$\{a_n\}$中不会有$a_m=a_n(m\neq n)$.

其中正确命题的序号是________(注:把你认为是正确命题的序号都填上).

例 3 已知函数$f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n(n\in\mathbf{N}^*)$,且$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$构成一个数列,又$f(1)=n^2$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 证明：$f\left(\frac{1}{3}\right)<1$.

例4 已知$a>0$，且$a\neq1$，数列$\{a_n\}$是首项为a，公比也为a的等比数列，令$b_n=a^n\lg a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列$\{b_n\}$的前n项的和S_n；

(2) 若数列$\{b_n\}$中的每一项总小于它后面的项，求a的取值范围.

例5 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=a$（a是常数），$a_n=2a_{n-1}+n^2-4n+2$（$n\in\mathbf{N}$且$n\geqslant2$）.

(1) $\{a_n\}$是否可能是等差数列？若可能，求出$\{a_n\}$的通项公式；若不可能，说明理由.

(2) 设$b_1=b$，$b_n=a_n+n^2(n\in\mathbf{N},\ n\geqslant2)$，$S_n$是数列$\{b_n\}$的前$n$项的和，且$\{S_n\}$是等比数列，求实数$a$、$b$满足的条件.

例6 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且a_1，a_2-a_1，a_3-a_2，…，a_n-a_{n-1}是公比为2的等比数列. 数列$\{b_n\}$的前n项的和为$B_n=\frac{n(n+1)}{2}$. 若$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{b_kb_{k+1}}$，试判断$\frac{a_n}{a_n+2}$与$T_n$的大小，并说明理由.

例7 已知函数$y=f(x)$的图象是自原点的一条折线，当$n\leqslant y\leqslant n+1$（$n=0,1,2,\cdots$）时，该图象是斜率为$b^n$的线段（其中正常数$b\neq1$），该数列$\{x_n\}$由$f(x_n)=n$（$n=1,2,\cdots$）定义.

(1) 求x_1、x_2和x_n的表达式；

(2) 求$f(x)$的表达式，并写出其定义域；

(3) 证明：$y=f(x)$的图象与$y=x$的图象没有横坐标大于1的交点.

例8 （2004江苏）设无穷等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.

(1) 若首项$a_1=\frac{3}{2}$，公差$d=1$，求满足$S_{k^2}=(S_k)^2$的正整数k；

(2) 求所有的无穷等差数列$\{a_n\}$，使得对于一切正整数k都有$S_{k^2}=(S_k)^2$成立.

例9 （2005江苏）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1=1$，$a_2=6$，$a_3=11$，且$(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=An+B$（其中$A$、$B$为常数，$n=1,2,3,\cdots$）.

(1) 求A与B的值；

(2) 证明：数列$\{a_n\}$为等差数列；

(3) 证明：不等式$\sqrt{5a_{mn}}-\sqrt{a_ma_n}>1$对任何正整数$m$、$n$都成立.

例10 已知函数$f(t)$对任意实数x、y，都有$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y+2)+3$，$f(1)=1$.

(1) 若$t\in\mathbf{N}^*$，试求$f(t)$的表达式.

(2) 满足条件$f(t)=t$的所有整数能否构成等差数列？若能构成等差数列，求出此数列；若不能构成等差数列，请说明理由.

(3) 若$t\in\mathbf{N}^*$，且$t\geqslant4$时，$f(t)\geqslant mt^2+(4m+1)t+3m$恒成立，求实数$m$的最大值.

专题 4　不等式的证明

[考点聚焦]

1. 理解并掌握不等式的性质及证明不等式的几种常用方法，理解两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数这一定理，并能应用它们证明和求解一些简单的不等式.

2. 在掌握一元二次不等式的解法的基础上，掌握其他的一些简单不等式的解法.

3. 理解在解不等式时只有利用充要条件的变形才是等价变形.

4. 高考试题中，关于不等式的试题主要为：(1) 在客观题中考查不等式的性质，解简单的不等式，比较大小及用二元均值不等式求极值；(2) 在解答题中一般以解不等式形式出现；(3) 解答有关不等式的其他问题，如函数的定义域、值域，判断并证明函数的单调性、求函数的最值等；(4) 求解实际问题，近几年的应用性问题多数与不等式相关，大多属中等难度.

4－1　不等式的证明

[典例精讲]

例 1　(1) 若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 成立的一个充分非必要条件是　(　　)

A. $a>b$　　B. $ab(a-b)<0$

C. $a<b<0$　　D. $a<b$

(2) 若 x、$y\in\mathbf{R}$，且 $xy<0$，则在下列各式中一定成立的是　(　　)

A. $|x+y|>|x|$

B. $|x+y|<|x|$

C. $|x+y|<|x-y|$

D. $|x+y|>|x-y|$

(3) 设 a、b 是两个实数，给出下列条件：

① $a+b>1$；② $a+b=2$；③ $a+b>2$；④ $a^2+b^2>2$；⑤ $ab>1$.

其中能推出"a、b 中至少有一个数大于 1"的条件是　(　　)

A. ②③　　B. ①②③

C. ③④⑤　　D. ③

(4) 已知 a、$b\in\mathbf{R}^+$，则下列不等式中，不一定成立的是　(　　)

A. $a+b+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant 2\sqrt{2}$

B. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$

C. $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\geqslant a+b$

D. $\frac{2ab}{a+b}\geqslant\sqrt{ab}$

(5) 下列四个命题中，不正确的是　(　　)

A. 若 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $\cos(1+a)<\cos(1-a)$

B. 若 $0<a<1$，则 $\frac{1}{1-a}>1+a>\sqrt{2a}$

C. 若实数 x、y 满足 $y=x^2$，则 $u=\log_2(2^x+2^y)$ 的最小值是 $\frac{7}{8}$

D. 若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $a^2+b^2+ab+1>a+b$

(6) 正数 a、b、c、d 满足 $a+d=b+c$，$|a-d|<|b-c|$，则　(　　)

A. $ad=bc$　　B. $ad<bc$

C. $ad>bc$　　D. ad 与 bc 的大小不能确定

例 2 已知 $f(x)=\log_a(1+x)\ (a>1)$，对任意 $x_1>0$ 且 $x_2>0$ 的 x_1，x_2 值，求证：$\frac{1}{2}[f(x_1-1)+f(x_2-1)]\leqslant f\left(\frac{x_1+x_2-2}{2}\right)$.

例 3 已知 $|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$.
求证：(1) $ab+1>a+b$；
(2) $abc+2>a+b+c$.

例 4 已知 $f(x)=x^2-x+c$ 的定义域为 $[0,1]$，x_1、$x_2\in[0,1]$，且 $x_1\neq x_2$.
(1) 证明：$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$；
(2) 证明：$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

例 5 已知 a，$b\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b=1$，求证：$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{25}{4}$.

4-2 不等式的解法

[典例精讲]

例 1 (1) 设 $P=\{x\mid 4^x<16+3\cdot 2^{x+1}\}$，$Q=\{x\mid |x-1|<a\}$，则使 $P\cap Q=Q$ 的 a 的取值范围是 ( )

A. $[0,3]$　　B. $[0,2]$
C. $(-2,2]$　　D. $(-\infty,2]$

(2) 已知 x，$y\in\mathbf{R}$ 且 $x^2+y^2+2x<0$，则 ( )

A. $x^2+y^2+6x+8<0$
B. $x^2+y^2+6x+8>0$
C. $x^2+y^2+4x+3<0$
D. $x^2+y^2+4x+3>0$

(3) 若不等式 $x^2-\log_a x<0$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内恒成立，则 a 的取值范围是 ( )

A. $\left[\frac{1}{16},1\right)$　　B. $(1,+\infty)$
C. $\left(\frac{1}{16},1\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2)$

(4) 函数 $y=\log_a x$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒有 $|y|>1$，则 a 的取值范围为 ( )

A. $\frac{1}{2}<a<2$，且 $a\neq 1$
B. $0<a<\frac{1}{2}$ 或 $1<a<2$
C. $1<a<2$
D. $a>2$ 或 $0<a<\frac{1}{2}$

(5) 设集合 $M=\{x\mid ax^2-2(a+1)x-1>0\}$，已知 $M\neq\varnothing$，$M\subseteq\mathbf{R}^+$，则实数 a 的取值范围是________.

(6) 已知 $y=\log_{a+1}(2-ax)\ (a>-1$ 且 $a\neq 0)$ 在 $[1,2]$ 上是 x 的减函数，则 a 的取值范围是________.

例 2 解下列不等式：
(1) $(x+2)(x+1)^2(x-1)^3(x-2)\leqslant 0$；

(2) $\frac{x^2+2x-2}{3+2x-x^2}<x$.

例 3 解不等式：

$\log_{(x-1)}\left(x^2-2x+\frac{1}{2}\right)>\log_{(x-1)}\left(x^2-2x+\frac{1}{4}\right)$.

例 4 某市有两个商场降价销售某一型号电脑，原价都是每台 6 000 元. 甲商场优惠的办法是：购一台可少付 100 元，购两台每台少付 200 元，购三台每台少付 300 元，…，依此类推，直到减为半价为止；乙商场的优惠办法是一律按原价的 70% 销售. 某单位需购买一批此型号电脑，应去哪家商场购买花费较少？

例 5 设对于不大于 $\frac{5}{4}$ 的所有正实数 a，如果满足不等式 $|x-a|<b$ 的一切实数 x，亦满足不等式 $|x-a^2|<\frac{1}{2}$，求实数 b 的取值范围.

例 6 设函数 $f(x)=a+\sqrt{-x^2-4x}$ 与 $g(x)=\frac{4}{3}x+1$，若 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围.

4－3 不等式的应用

[典例精讲]

例 1 (1) 若椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9-4k^2}=1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{2k^2-4}-\frac{y^2}{2k^2+4}=1$ 有相同的焦点，则 k 的取值范围为 ( )

A. $k\in\mathbf{R}$

B. $k\in(\sqrt{2},+\infty)$

C. $k\in\left(\sqrt{2},\frac{3}{2}\right)$

D. $k\in\left(-\frac{3}{2},-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\frac{3}{2}\right)$

(2) 若 $A+B=\frac{2\pi}{3}$，则 $\cos^2A+\cos^2B$ 的值的范围是 ( )

A. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

C. $\left[\frac{1}{2},1\right]$　　D. $[0,1]$

(3) 已知函数 $f(x)=ax+b$，则 $a+2b>0$ 是使 $ax+b>0$ 在区间 $[0,1]$ 上恒成立的 ( )

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件