郭大钧 孙经先 刘兆理 著

非线性常微分方程泛函方法

非线性常微分方程泛函方法

郭大钧　孙经先　刘兆理　著

山东科学技术出版社

鲁新登字05号

非线性常微分方程泛函方法

郭大钧　孙经先　刘兆理　著

*

山东科学技术出版社出版

（济南市玉函路　邮政编码250002）

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 16开本　16印张　4插页　355千字

1995年2月第1版　1995年2月第1次印刷

印数：1—1000

ISBN　7—5331—1497—3

O·60　　定价 31.70元

山东省泰山科技专著出版基金会
赞助单位

山东省财政厅

山东省出版总社

山东省科学技术委员会

山东科学技术出版社

山东泰山酿酒饮料集团总公司

董事长兼总经理张传礼

山东全泰集团股份有限公司

董事长兼总裁刘黎明

我们的希望

进行现代化建设必须依靠科学技术。作为科学技术载体的专著，正肩负着这一伟大的历史使命。科技专著面向社会，广泛传播科学技术知识，培养专业人才，推动科学技术进步，对促进我国现代化建设具有重大意义。它所产生的巨大社会效益和潜在的经济效益是难以估量的。

基于这种使命感，自 1988 年起，山东科学技术出版社设“泰山科技专著出版基金”，成立科技专著评审委员会，在国内广泛征求科技专著，每年补贴出版一批经评选的科技著作。这一创举已在社会上引起了很大反响。

1992 年，在山东省委、省政府的支持下，在原“泰山科技专著出版基金”的基础上，由山东省出版总社、山东省科学技术委员会和山东科学技术出版社共同成立了“山东省泰山科技专著出版基金会”，并得到企业界的热情赞助，为资助学术专著的出版提供了更加可靠的保证。

但是，设基金补助科技专著出版毕竟是一件新生事物，也是出版事业的一项改革。它不仅需要在实践中不断总结经验，逐步予以完善；同时，也更需要社会上有关方面的大力扶植，以及学术界和广大读者的热情支持。

我们希望，通过这一工作，高水平的科技专著能够及早问世，充分显示它们的价值，发挥科学技术作为生产力的作用，不断推动社会主义现代化建设的发展。愿基金会支持出版的著作如泰山一样，耸立于当代学术之林。

泰山科技专著评审委员会

1992 年 12 月

前　　言

常微分方程是数学中一个古老而重要的分支，它在自然科学和工程技术中有着广泛的应用。近年来，我和我的学生孙经先、黄春朝、杜一宏、周德堂、王乃静、刘兆理、韩志清等诸位博士在利用非线性泛函分析来研究常微分方程的解方面做了大量工作，获得了许多研究成果，这些成果是单纯用数学分析办法无法得到的，从而具有特色。例如，利用拓扑度理论、半序方法以及临界点理论来获得常微分方程多个解的存在性以及对各解存在区域的估计；在方程右端不具连续性情况下以及在方程具有反向的上解和下解情况下，讨论常微分方程解的存在性问题；利用不动点理论及单调迭代法来研究脉冲常微分方程最大解和最小解的存在性及迭代求解法；利用迭合度理论求解二阶常微分方程两点边值问题，等等。现根据国外一些数学家在这方面所获得的结果，加上我们自己做的工作，写成这本书。本书可作为综合性大学、高等师范院校和工科院校有关专业的研究生教材，也可供有关教师和科技工作者进行科研时参考。

本书在写作过程中，得到国家自然科学基金和国家教委博士点专项科研基金的资助，特致谢意。

限于作者水平，书中不妥、错误之处在所难免，敬请读者指正。

郭大钧

1994 年 8 月于山东大学南院

目　　录

第一章　上下解方法

1.1　上下解方法的理论基础

本节将给出与上下解方法有关的基本概念和结论.

定义 1.1.1　设 E 是 Banach 空间,P 是 E 中的非空闭集. 如果 P 满足

(i) 任给 $x,y\in P,\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$,有 $\alpha x+\beta y\in P$;

(ii) 若 $x\in P,x\neq\theta$,则 $-x\overline{\in} P$,

则称 P 是 E 中的锥.

由上述定义易知 P 一定是闭凸集,并且若 $x\in P,-x\in P$,则 $x=\theta$.

设给定 E 中的锥 P. 对 $x\in E,y\in E$,如果 $y-x\in P$,则记 $x\leqslant y$. 容易验证,按这种方法定义的"$\leqslant$"具有下列性质:

(i) $x\leqslant x$;

(ii) 若 $x\leqslant y,y\leqslant z$,则 $x\leqslant z$;

(iii) 若 $x\leqslant y,y\leqslant x$,则 $x=y$.

因此,按这种方法引入的"$\leqslant$"定义了 E 中的一个半序. 在本书中,如不特别声明,我们总假定 Banach 空间 E 中的半序是由 E 中的给定锥 P 导入的,并称按这种方法定义了半序的空间是半序 Banach 空间.

引理 1.1.1　设 E 是半序 Banach 空间,$x_n\leqslant y_n(n=1,2,3,\cdots)$则有

(i) 若 $x_n\longrightarrow x^*,y_n\longrightarrow y^*$,则 $x^*\leqslant y^*$;

(ii) 若 $x_n\xrightarrow{弱}x^*,y_n\xrightarrow{弱}y^*$,则 $x^*\leqslant y^*$.

证　先证(i). 由 $x_n\leqslant y_n$ 知 $y_n-x_n\in P$,由 $x_n\longrightarrow x^*,y_n\longrightarrow y^*$ 知 $y_n-x_n\longrightarrow y^*-x^*$. 注意到 P 是闭集,故必有 $y^*-x^*\in P$,即 $x^*\leqslant y^*$.

再证(ii). 仿上段证明可知 $y_n-x_n\in P,y_n-x_n\xrightarrow{弱}y^*-x^*$. 由于 P 是凸闭集,故 P 是弱序列闭的(参见关肇直、张恭庆、冯德兴[1]P187),从而 $y^*-x^*\in P$,即 $x^*\leqslant y^*$. □

设$\{x_n\}$是半序 Banach 空间中的序列,如果$\{x_n\}$满足

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots,$$

则称$\{x_n\}$是单调增序列;如果

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant\cdots,$$

则称$\{x_n\}$是单调减序列,单调增序列和单调减序列都称是单调序列.

设 M 是 Banach 空间 E 中的子集,如果 M 中的任一序列$\{x_n\}$都有子列$\{x_{n_i}\}$收敛于某 $x^*\in E$,这里不要求 $x^*\in M$,则称 M 是 E 中的相对列紧集.

引理 1.1.2　设$\{x_n\}$是单调序列,又是相对列紧集,则$\{x_n\}$是收敛序列,更进一步,若

$\{x_n\}$是单调增序列，则有 $x_n\leqslant x^*(n=1,2,3,\cdots)$，其中 x^* 是$\{x_n\}$的极限；若$\{x_n\}$是减序列，则 $x^*\leqslant x_n(n=1,2,3,\cdots)$.

证 设$\{x_n\}$是单调增序列，因为$\{x_n\}$是相对列紧集，故$\{x_n\}$必有一子列$\{x_{n_i}\}$收敛于某 x^*，设$\{x_n\}$不是收敛序列，则必存在$\{x_n\}$的另一个子列$\{x_{n_j}\}$收敛于某 $y^*\neq x^*$. 对任给固定的 n_{i_0}，当 n_j 充分大时有

$$x_{n_{i_0}}\leqslant x_{n_j}$$

从而根据引理 1.1.1(1)，有 $x_{n_{i_0}}\leqslant y^*$；从而对一切 n_i，都有 $x_{n_i}\leqslant y^*$. 再利用引理 1.1.1(1)可得 $x^*\leqslant y^*$. 用完全同样的方法还可证明 $y^*\leqslant x^*$，从而必有 $x^*=y^*$，产生矛盾. 从而$\{x_n\}$是收敛序列. 对任给固定的 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时 $x_{n_0}\leqslant x_n$，利用引理 1.1.1(1)可知 $x_{n_0}\leqslant x^*$，从而对一切 n，都有 $x_n\leqslant x^*$. 若$\{x_n\}$是单调减序列，证明类似. □

设 M 是 Banach 空间 E 中的子集，如果 M 中的任一序列$\{x_n\}$都有子列$\{x_{n_i}\}$弱收敛于某 $x^*\in E$，这里不要求 $x^*\in M$，则称 M 是 E 中的相对弱列紧集，用与引理 1.1.2 完全类似的方法，可以证明：

引理 1.1.3 设$\{x_n\}$是单调序列，又是相对弱列紧集，则$\{x_n\}$是弱收敛序列. 更进一步，若$\{x_n\}$是单调增序列，则有 $x_n\leqslant x^*(n=1,2,3,\cdots)$，其中 x^* 是$\{x_n\}$的弱收敛极限；若$\{x_n\}$是减序列，则 $x_n\geqslant x^*(n=1,2,3,\cdots)$.

定义 1.1.2 设 P 是 E 中的锥. 若存在常数 $N>0$，使当 $\theta\leqslant x\leqslant y$ 时必有 $\|x\|\leqslant N\|y\|$，则称 P 是正规锥，其中 N 称为是 P 的正规常数.

设 $y\in E,z\in E,y\leqslant z$，则集合$[y,z]=\{x\in E\mid y\leqslant x\leqslant z\}$称为是 E 中的一个序区间.

引理 1.1.4 设 P 是 E 中的正规锥，则 E 中的任何一个序区间都是有界的.

证 任给 E 中的序区间$[y,z]$，当 $x\in[y,z]$时有 $y\leqslant x\leqslant z$，即 $\theta\leqslant x-y\leqslant z-y$，故 $\|x-y\|\leqslant N\|z-y\|$，从而

$$\|x\|\leqslant\|x-y\|+\|y\|\leqslant N\|z-y\|+\|y\|=\text{const}，故[y,z]有界.$$ □

注 1.1.1 可以证明，P 是正规锥的充分必要条件是：E 中的任何一个序区间都是有界的. 关于这一点，可以参见郭大钧[9].

引理 1.1.5 设 P 是正规锥，$\{x_n\}$是单调序列. 设$\{x_n\}$有一个子列$\{x_{n_i}\}$收敛于某 x^*，则$\{x_n\}$本身必收敛于 x^*，并且，若$\{x_n\}$是单调增序列，则有 $x_n\leqslant x^*(n=1,2,3\cdots)$；若$\{x_n\}$是单调减序列，则有 $x^*\leqslant x_n(n=1,2,3,\cdots)$.

证 设$\{x_n\}$是单调增序列，则$\{x_{n_i}\}$也是单调增序列，并且由引理 1.1.1(1)易知

$$x_n\leqslant x^*,n=1,2,3,\cdots.$$

任给 $\varepsilon>0$，则必存在 i_0，使得 $\|x_{n_{i_0}}-x^*\|<\dfrac{\varepsilon}{N}$，其中 N 是 P 的正规常数. 于是，当 $n\geqslant n_{i_0}$ 时有 $x_{n_{i_0}}\leqslant x_n\leqslant x^*$，从而 $\theta\leqslant x^*-x_n\leqslant x^*-x_{n_{i_0}}$. 这表明

$$\|x^*-x_n\|\leqslant N\|x^*-x_{n_{i_0}}\|<N\cdot\frac{\varepsilon}{N}=\varepsilon,\forall\ n\geqslant n_{i_0}.$$

因此，注意到 ε 的任意性可知 $x_n\longrightarrow x^*$ □

正规锥的一个重要性质是下列定理.

定理 1.1.1 设 E 是 Banach 空间，P 是正规锥，M 是 E 中的全序集(即任给 $x\in M$，

$y\in M$，$x\leqslant y$ 和 $y\leqslant x$ 必有一个成立)，则 M 是相对列紧集的充分必要条件是：M 是相对弱列紧集．

证 必要性显然，下证充分性，任给 M 中的一个序列 $N=\{x_n\}$，分两种情况，第一种情况：存在无穷个 $x^{(m)}\in N(m=1,2,3,\cdots)$，使 $x^{(1)}=\min N$($\min N$ 表示 N 的最小元素，即若存在 $y\in N$，使 $y\leqslant x$，$\forall\ x\in N$，则称 $y=\min N$)，并且对每个 $m\geqslant 2$，都有

$$x^{(m)}=\min\{N\backslash\{x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(m-1)}\}\}$$

此时显然有

$$x^{(1)}\leqslant x^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x^{(m)}\leqslant\cdots \tag{1.1.1}$$

因为 M 是相对弱列紧集，故$\{x^{(m)}\}$必有一子列弱收敛到某 $x^*\in E$，由引理 1.1.3 知$\{x^{(m)}\}$本身弱收敛到 x^*，并且

$$x^{(m)}\leqslant x^*,m=1,2,3,\cdots \tag{1.1.2}$$

下证$\{x^{(m)}\}$必有子列依范数收敛到 x^*，若不然，则必有常数 $r>0$，使对一切 m，都有

$$\|x^*-x^{(m)}\|\geqslant r \tag{1.1.3}$$

对每个 m，令 $M_m=\{x\in E\,|\,x\leqslant x^{(m)}\}$，$M=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}M_m$，任给 $x\in M$，$y\in M$，则存在 m_1 和 m_2，使 $x\in M_{m_1}$，$y\in M_{m_2}$，不失一般设 $m_1\leqslant m_2$，则由 M_m定义知 $M_{m_1}\subset M_{m_2}$，故 $x\in M_{m_2}$. 由 P 是凸集知 M_{m_2}是凸集，从而对任给 $0\leqslant t\leqslant 1$，有 $tx+(1-t)y\in M_{m_2}\subset M$. 这表明 M 是一个凸集，故 $\overline{M}$ 是 E 中的凸闭集，从而是弱序列闭的(参见关肇直、张恭庆、冯德兴[1]$P187$)于是由 $x^{(m)}\xrightarrow{\text{弱}}x^*$ 知 $x^*\in\overline{M}$. 但另一方面，对任给固定的 m，当 $x\in M_m$ 时有 $x\leqslant x^{(m)}$. 所以由(1.1.2)式知有 $x\leqslant x^{(m)}\leqslant x^*$，即 $\theta\leqslant x^*-x^{(m)}\leqslant x^*-x$. 因为 P 是正规的，故 $\|x^*-x^{(m)}\|\leqslant N\|x^*-x\|$，其中 N 是 P 的正规常数．所以，利用(1.1.3)式可得

$$\|x^*-x\|\geqslant\frac{1}{N}\|x^*-x^{(m)}\|\geqslant\frac{r}{N},\forall\ x\in M_m.$$

这表明 $d(x^*,M_m)\geqslant\dfrac{r}{N}$，其中 $d(\cdot,\cdot)$表点集间的距离，由于 m 是任给的，故 $d(x^*,M)\geqslant\dfrac{r}{N}$，从而有 $d(x^*,\overline{M})\geqslant\dfrac{r}{N}$. 此与 $x^*\in\overline{M}$ 矛盾．这一矛盾表明$\{x^{(m)}\}$必有子列依范数收敛于 x^*.

第二种情况：不存在 $x\in N$，使 $x=\min N$，或者仅存在有限个 $\tilde{x}^{(m)}\in N(1\leqslant m\leqslant m_o)$，使得 $\tilde{x}^{(1)}=\min N$，并且对每个 $2\leqslant m\leqslant m_o$，有 $\tilde{x}^{(m)}=\min\{N\backslash\{\tilde{x}^{(1)},\tilde{x}^{(2)},\cdots,\tilde{x}^{(m-1)}\}\}$，但对任给 $x\in N_1=N\backslash\{\tilde{x}^{(1)},\tilde{x}^{(2)},\cdots,\tilde{x}^{(m_o)}\}$，$x$ 都不是 N 的最小元素．此时显然可以取出无穷多个 $x^{(m)}\in N_1(m=1,2,3,\cdots)$，使得

$$\cdots\leqslant x^{(m)}\leqslant\cdots\leqslant x^{(3)}\leqslant x^{(2)}\leqslant x^{(1)}$$

此时仿第一种情况的证明，可知必存在 $x^*\in E$，使$\{x^{(m)}\}$的某一子列依范数收敛于 x^*.

总之，在上面两种情况下，M 中的任一序列都必有子列收敛，从而 M 相对列紧． □

利用定理 1.1.1，立即可以推出

系 1.1.1 设 E 是自反空间，P 是正规锥，M 是 E 中的全序集，则 M 相对列紧的充分必要条件是：M 是有界集．

证 我们仅需证充分性，因为 E 是自反空间，故根据著名的 Eberlein-Shmulyan 定理

(见吉田耕作〔1〕$P120$)，当 M 是有界集时，M 是一个相对弱列紧集，从而根据定理 1.1.1，M 相对列紧. □

注 1.1.2 可以证明，当 E 是弱序列完备空间(这是比自反空间更广泛的一类空间)时，系 1.1.1 的结论仍成立，关于这一点，可以参见孙经先[4].

系 1.1.2 设 E 是 Banach 空间，P 是 E 中的正规锥，$\{x_n\}$是 E 中的单调序列，则下列两个结论是等价的：

(i) $x_n \longrightarrow x^*$；

(ii) $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x^*$.

定义 1.1.3 设 E、F 是半序 Banach 空间，$D\subset E$，$A:D\longrightarrow F$ 是一个算子. 若 $x\in D$，$y\in D$，$x\leqslant y$ 蕴含着 $Ax\leqslant Ay$，则称 A 是一个增算子.

定义 1.1.4 设 E 是半序 Banach 空间，$D\subset E$，$A:D\longrightarrow E$ 是一个算子. 如果 $x_0\in D$ 满足 $x_0\leqslant Ax_0$，则称 x_0 是算子方程 $x=Ax$ 的一个下解，简称 x_0是 A 的下解；如果 $y_0\in D$ 满足 $Ay_0\leqslant y_0$，则称 y_0是算子方程 $x=Ax$ 的一个上解，简称 y_0是 A 的上解.

设 E 和 F 都是 Banach 空间，$D\subset E$，$A:D\longrightarrow F$，若 $x_n\in D$，$x_0\in D$，$x_n\longrightarrow x_0$ 蕴含着 $Ax_n\longrightarrow Ax_0$，则称 A 是连续算子. 若 $x_n\in D$，$x_0\in D$，$x_n\longrightarrow x_0$ 蕴含着 $Ax_n\xrightarrow{\text{弱}}Ax_0$，则称 A 是次连续算子.

定理 1.1.2 设 E 是半序 Banach 空间，$x_0,y_0\in E$，$x_0\leqslant y_0$，$D=[x_0,y_0]$，$A:D\longrightarrow E$ 是一个算子，设下列条件满足：

(i) A 是增算子；

(ii) x_0 是 A 的下解，y_0 是 A 的上解；

(iii) A 是连续算子；

(iv) $A(D)$是 E 中的相对列紧集，

则 A 在 D 中必有最小不动点 x^*和最大不动点 y^*(即 x^*和 y^*都是 A 的不动点，并且若 $z^*\in D$ 也是 A 的不动点，则必有 $x^*\leqslant z^*\leqslant y^*$)；并且若分别以 x_0 和 y_0 为初始元素，作迭代序列：

$$x_n=Ax_{n-1},\ y_n=Ay_{n-1},\ n=1,2,3\cdots, \tag{1.1.4}$$

则有

$$x_0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant\cdots\leqslant y_2\leqslant y_1\leqslant y_0 \tag{1.1.5}$$

$$x_n\longrightarrow x^*,\ y_n\longrightarrow y^*. \tag{1.1.6}$$

证 由条件(i)、(ii)及(1.1.4)式，并注意到 $x_0\leqslant y_0$，容易验证(1.1.5)式成立. 由(1.1.4)和(1.1.5)两式知$\{x_n\}\subset A(D)$，从而由条件(iii)知$\{x_n\}$也是相对列紧集. 根据引理 1.1.2(注意到(1.1.5)式)可知必存在某 $x^*\in E$，使 $x_n\longrightarrow x^*$. 由(1.1.5)式及引理 1.1.1 知 $x_0\leqslant x^*\leqslant y_0$从而 Ax^*有定义. 在 $x_n=Ax_{n-1}$中令 $x_n\longrightarrow x^*$，则由条件(iv)可知必有 $x^*=Ax^*$. 同理可证必存在 $y^*\in D$，使 $y^*=Ay^*$.

下证 x^*和 y^*分别是 A 在 $D=[x_0,y_0]$中的最小不动点和最大不动点. 设 $z^*\in D$，使 $Az^*=z^*$，则由 A 是增算子知 $Ax_0\leqslant Az^*\leqslant Ay_0$，即 $x_1\leqslant z^*\leqslant y_1$. 再以 A 作用之可得 $x_2\leqslant z^*\leqslant y_2$，这样一直做下去，可得 $x_n\leqslant z^*\leqslant y_n$，于是利用引理 1.1.1 可得 $x^*\leqslant z^*\leqslant y^*$，

即 x^* 和 y^* 分别是 A 在 D 中的最小不动点和最大不动点． □

下面将证明：若 P 是正规锥，则定理 1.1.2 中的条件(iv)可以作实质性的减弱．为此先建立下列定理．

定理 1.1.3 设 E 是半序 Banach 空间，其半序由锥 P 导出，$x_0,y_0\in E,x_0\leqslant y_0,D=[x_0,y_0]$，$A:D\longrightarrow E$ 是一个算子. 设存在另一个半序 Banach 空间 E_1(其半序由 E_1 中的锥 P_1 导出)及算子 $B:D\longrightarrow E_1$，算子 $C:[Bx_0,By_0]\longrightarrow E$，使得

$$A=CB$$

并且满足下列条件：

(i) B 和 C 都是增算子；

(ii) x_0 是 A 的下解，y_0 是 A 的上解；

(iii) B 是次连续算子，C 是连续算子；

(iv) P_1 是 E_1 中的正规锥，$B(D)$ 是 E_1 中的相对弱列紧集，

则 A 在 D 中必有最小不动点 x^* 和最大不动点 y^*，并且若分别以 x_0 和 y_0 为初始元素，作迭代序列

$$x_n=Ax_{n-1},y_n=Ay_{n-1},n=1,2,3,\cdots \tag{1.1.7}$$

则 $x_n\longrightarrow x^*,y_n\longrightarrow x^*$，并且(1.1.5)式成立．

证 由 B 和 C 是增算子知 A 也是增算子，从而 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足(1.1.5)式，令

$$u_n=Bx_n\quad n=0,1,2,\cdots \tag{1.1.8}$$

则由 B 是增算子及(1.1.5)式知

$$u_0\leqslant u_1\leqslant u_2\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant\cdots\leqslant By_0 \tag{1.1.9}$$

由于 $\{u_n\}\subset B(D)$，故由条件(iv)知 $\{u_n\}$ 是 E_1 中的相对弱列紧集．因为 P_1 是 E_1 中的正规锥，故根据定理 1.1.1 知 $\{u_n\}$ 是 E_1 中的相对列紧集，从而由引理 1.1.2 知必存在某 $u^*\in E_1$，使 $u_n\longrightarrow u^*$；显然 $u^*\in[Bx_0,By_0]$. 令 $x^*=Cu^*$，则 $x^*\in D$，并且由 C 是连续算子知

$$x_n=Ax_{n-1}=CBx_{n-1}=Cu_n\longrightarrow Cu^*=x^*.$$

由 B 是次连续算子知 $Bx_n\xrightarrow{弱}Bx^*$，即 $u_n\xrightarrow{弱}Bx^*$．注意到 $u_n\longrightarrow u^*$，故必有 $u^*=Bx^*$，所以 $x^*=Cu^*=CBx^*=Ax^*$，即 x^* 是 A 的不动点．同理可证必存在 $y^*\in D$，使 $y_n\longrightarrow y^*$ 且 y^* 是 A 的不动点．仿定理 1.1.2 的最后一段证明可以知道 x^* 和 y^* 分别是 A 在 D 中的最小不动点和最大不动点. □

系 1.1.3 设 E 是半序 Banach 空间，$x_0,y_0\in E,x_0\leqslant y_0,D=[x_0,y_0],A:D\longrightarrow E$，并且定理 1.1.2 的条件(i)(ii)(iii)满足．又设 P 是 E 中正规锥，$A(D)$ 是 E 中的相对弱列紧集，则定理 1.1.2 的全部结论成立．

证 在定理 1.1.3 中令 $E=E_1,P=P_1,A=B,C=I$ 即可知系 1.1.3 成立． □

注 1.1.3 如果仅仅为了保证 A 最小不动点和最大不动点的存在性，而不要求不动点可以由迭代程序求出，则定理 1.1.2，定理 1.1.3 及系 1.1.3 中的若干重要条件是可以删掉的，关于这一点，将在本章 §7 中详细讨论．

注 1.1.4 在定理 1.1.2、定理 1.1.3 及系 1.1.3 中，我们都假定了 A 的上解 y_0 和下

解 x_0 满足

$$x_0 \leqslant y_0 \tag{1.1.10}$$

如果 A 的上解 y_0 和下解 x_0 满足(1.1.10)式,则称 A 满足正向上下解条件。目前关于正向上下解条件已有了广泛的研究和应用. 但在许多情况下正向上下解条件不能满足. 如果 A 的上解 y_0 和下解 x_0 不满足 $x_0 \leqslant y_0$,而满足相反的条件

$$x_0 \not\leqslant y_0 \tag{1.1.11}$$

(即 $y_0 - x_0 \overline{\in} P$),则称 A 满足反向上下解条件. 在反向上下解条件下 A 的不动点的性质将在第三章 3.3 节中讨论.

注 1.1.5 定理 1.1.2、定理 1.1.3 以及系 1.1.3 的特点在于用 A 的上解和下解的存在性保证算子方程 $x=Ax$ 解的存在性. 利用上解和下解的性质来研究算子方程和各种具体方程解的性质,这就是上下解方法. 目前这一方法已成为非线性泛函分析的基本方法之一,也是研究常微分方程和其他许多类微分方程和积分方程的重要工具.

在用上下解方法研究常微分方程时,常用的两个空间是 $C(J,R^1)$ 和 $L_p(J,R^1)$. 设 $J=[a,b]\subset R^1$,令

$$C(J,R^1)=\{u(t)\,|\,u(t):J\longrightarrow R^1 \text{ 连续}\}$$

则 $C(J,R^1)$ 在范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in J}|u(t)|$ 下构成一 Banach 空间. 若令

$$P=\{u\in C(J,R^1)\,|\,u(t)\geqslant 0, \forall\, t\in J\}$$

则容易验证 P 是 $C(J,R^1)$ 中的正规锥. 显然,由这个锥导入的半序与通常的自然半序是一致的,即若 $u=u(t)\in C(J,R^1)$, $v=v(t)\in C(J,R^1)$,则 $u\leqslant v$ 等价于 $u(t)\leqslant v(t)$, $\forall\, t\in J$.

设 $p\geqslant 1$,令

$$L_p(J,R^1)=\{u(t)\text{可测}\,\Big|\int_J |u(t)|^p dt<+\infty\},$$

则 $L_p(J,R^1)$ 在范数 $\|u\|=[\int_J |u(t)|^p dt]^{\frac{1}{p}}$ 下为一 Banach 空间. 若令 $P_1=\{u\in L_p(J,R^1)\,|\,u(t)\geqslant 0$,对几乎处处 $t\in J\}$,则也容易验证 P_1 是 $L_p(J,R^1)$ 中的正规锥. 显然由这个锥导入的半序与通常的自然半序是一致的. 在本章中,如不特别说明,$C(J,R^1)$ 和 $L_p(J,R^1)$ 中的半序都是按上述方法给出的.

本章中经常使用的关于 $C(J,R^1)$ 和 $L_p(J,R^1)$ 的两个重要结论是(它们可以在任何一本完备的泛函分析教材上找到)

定理 1.1.4 (Arzela-Ascoli 定理)集合 $M\subset C(J,R^1)$ 相对列紧的充分必要条件是:

(i) 集合 M 中的函数一致有界,即存在常数 $K>0$,使得对一切 $u=u(t)\in M$,都有 $|u(t)|\leqslant K$, $\forall\, t\in J$;

(ii) 集合 M 中的函数等度连续,即对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得当 $t_1\in J$, $t_2\in J$, $|t_1-t_2|<\delta$ 时,对任给 $u=u(t)\in M$,都有 $|u(t_1)-u(t_2)|<\varepsilon$.

定理 1.1.5 设 $p>1$,则集合 $M\subset L_p(J,R^1)$ 相以弱列紧的充分必要条件是:M 是 $L_p(J,R^1)$ 中的有界集.

1.2 一阶常微分方程初值问题

在本节中将讨论一阶常微分方程初值问题

$$u'=(f(t,u),u(0)=x_0 \tag{1.2.1}$$

其中 $f(t,x):J\times R^1\to R^1$ 连续.

设 $T>0$ 为一常数，$J=[0,T]$，$C(J,R^1)=\{u(t)\mid u(t):J\to R^1$ 连续$\}$，$C(J,R^1)$中的半序由锥 $P=\{u\in C(J,R^1)\mid u(t)\geqslant 0,\forall\ t\in J\}$导出(这一半序与自然半序是一致的)，$C^1(J,R^1)=\{u(t)\mid u(t):J\to R^1$ 连续可微$\}$.

定义 1.2.1 若 $v(t)\in C^1(J,R^1)$满足

$$v'(t)\leqslant f(t,v(t)),\forall\ t\in J;v(0)\leqslant x_0 \tag{1.2.2}$$

则称 $v(t)$是初值问题(1.2.1)的一个下解；若 $w(t)\in C^1(J,R^1)$满足

$$w'(t)\geqslant f(t,w(t)),\forall\ t\in J;w(0)\geqslant x_0, \tag{1.2.3}$$

则称 $w(t)$是初值问题(1.2.1)的一个上解.

对于常微分方程初值问题(1.2.1)，其下解和上解有下列重要关系：

定理 1.2.1 设 $v(t),w(t)\in C^1(J,R^1)$分别是初值问题(1.2.1)的下解和上解. 设存在常数 $L>0$，使得

$$f(t,x)-f(t,y)\leqslant L(x-y),\forall\ t\in J,x\geqslant y. \tag{1.2.4}$$

则有

$$v(t)\leqslant w(t),\forall\ t\in J. \tag{1.2.5}$$

证 任给 $\varepsilon>0$，令 $w_\varepsilon(t)=w(t)+\varepsilon e^{2Lt}$，则 $w_\varepsilon(t)>w(t)$，并且由(1.2.3)(1.2.4)两式知对任给 $t\in J$，有

$$\begin{aligned}w_\varepsilon'(t)&=w'(t)+2L\varepsilon e^{2Lt}\\&\geqslant f(t,w(t))+2L\varepsilon e^{2Lt}\\&\geqslant f(t,w_\varepsilon(t))+L\varepsilon e^{2Lt}>f(t,w_\varepsilon(t)).\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

下证

$$v(t)<w_\varepsilon(t),\forall\ t\in J. \tag{1.2.7}$$

用反证法，设(1.2.7)式不成立，则由 $v(0)\leqslant x_0\leqslant w(0)<w_\varepsilon(0)$知必存在 $t_1\in(0,T]$，使 $v(t_1)=w_\varepsilon(t_1)$，并且对任给 $t\in[0,t_1)$，有 $v(t)<w_\varepsilon(t)$，所以对充分小的 $h>0$，有

$$v(t_1-h)-v(t_1)<w_\varepsilon(t_1-h)-w_\varepsilon(t_1)$$

于是

$$\frac{v(t_1-h)-v(t_1)}{-h}>\frac{w_\varepsilon(t_1-h)-w_\varepsilon(t_1)}{-h}$$

令 $h\to 0$，得 $v'(t_1)\geqslant w_\varepsilon'(t_1)$，再由(1.2.2)(1.2.6)两式可得

$$\begin{aligned}f(t_1,v(t_1))&\geqslant v'(t_1)\geqslant w_\varepsilon'(t_1)\\&>f(t_1,w_\varepsilon(t_1)).\end{aligned}$$

此与 $v(t_1)=w_\varepsilon(t_1)$矛盾. 故(1.2.7)式成立. 在(1.2.7)式中，令 $\varepsilon\to 0$，即可得 $v(t)\leqslant w(t)$，$\forall\ t\in J$. □

系 1.2.1 设存在常数 $L>0$,使得(1.2.4)式成立,则初值问题(1.2.1)至多有一个定义在 J 上的解.

证 用反证法,设初值问题有两个解 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$. 把 $u_1(t)$ 看作下解,把 $u_2(t)$ 看作上解,则由定理 1.2.1 知有 $u_1(t)\leqslant u_2(t)$, $\forall\, t\in J$. 另一方面,若把 $u_1(t)$ 看作上解, $u_2(t)$ 看作下解,则又有 $u_2(t)\leqslant u_1(t)$, $\forall\, t\in J$,从而必有 $u_1(t)\equiv u_2(t)$. □

注 1.2.1 若(1.2.4)式不满足,初值问题(1.2.1)可能出现多解,例如考察方程

$$u'=u^{\frac{1}{2}},\ u(0)=0$$

$u^{\frac{1}{2}}$不满足(1.2.4)式. 事实上上述初值问题至少有两个定义在$[0,\infty)$上的解 $u_1(t)\equiv 0$, $u_2(t)=\dfrac{t^2}{4}$.

下面研究初值问题(1.2.1)解的存在性.

定理 1.2.2 设 $f(t,x):J\times R^1\to R^1$ 连续, $v_0(t)$ 和 $w_0(t)$ 分别是初值问题(1.2.1)的下解和上解,

$$v_0(t)\leqslant w_0(t),\forall\, t\in J \tag{1.2.8}$$

又设存在常数 $M\geqslant 0$,使得

$$f(t,x)-f(t,y)\geqslant -M(x-y),$$
$$\forall\ (t,x)\in D_1,(t,y)\in D_1,x\geqslant y, \tag{1.2.9}$$

其中 $D_1=\{(t,x)\in J\times R^1\,|\,v_0(t)\leqslant x\leqslant w_0(t)\}$. 则初值问题(1.2.1)在 $D=\{u\in C(J,R^1)\,|\,v_0\leqslant u\leqslant w_0\}$ 中必有最小解 $v^*(t)$ 和最大解 $w^*(t)$,并且若分别以 $v_0(t)$ 和 $W_0(t)$ 为初始元,作迭代序列

$$v_n(t)=e^{-Mt}\{x_0+\int_0^t e^{Ms}[f(s,v_{n-1}(s))$$
$$+Mv_{n-1}(s)]ds\},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{1.2.10}$$

$$w_n(t)=e^{-Mt}\{x_0+\int_0^t e^{Ms}[f(s,w_{n-1}(s))$$
$$+Mw_{n-1}(s)]ds\},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{1.2.11}$$

则$\{v_n(t)\}$和$\{w_n(t)\}$分别在 J 上单调一致收敛于 $v^*(t)$ 和 $w^*(t)$.

证 对任给固定的 $h=h(t)\in D$,考察线性一阶常微分方程初值问题

$$u'=f(t,h(t))-M(u-h(t)),u(0)=x_0 \tag{1.2.12}$$

显然初值问题(1.2.12)有唯一解

$$u(t)=e^{-Mt}\{x_0+\int_0^t e^{Ms}[f(s,h(s))+Mh(s)]ds\} \tag{1.2.13}$$

定义

$$Ah=e^{-Mt}\{x_0+\int_0^t e^{Ms}[f(s,h(s)+Mh(s)]ds\} \tag{1.2.14}$$

则显然 A 映 D 入 $C(J,R^1)$,并且 A 在 D 中的不动点与初值问题(1.2.1)在 D 中的解是等价的.

下面利用定理 1.1.2 证明定理 1.2.2 的结论成立. 由(1.2.9)式知

$$f(t,x)+Mx\geqslant f(t,y)+My,$$