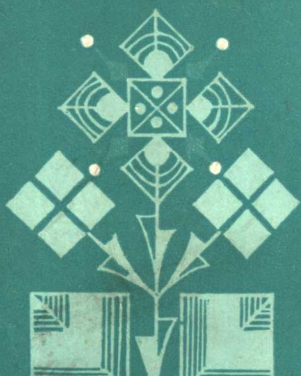
Chu 初中 Zhong

数学基础知识



新蕾出版社

初中数学基础知识

北京二中数学教研室

新 蕾 出 版 社

初中数学基础知识

北京二中数学教研室

*

新蕾出版社 出版

天津新华印刷一厂印刷

天津市新华书店发行

开本787×1092毫米 1/32 印张10.625 字数210,000

1983年5月第1版 1983年5月第1次印刷

印数：1—326,000

统一书号：R7213·158 定价：0.86元

说　　明

本书是根据《全日制十年制学校中学数学教学大纲（试行草案）》及现行课本编写的.全书分为二大部分：代数（代数、平面三角初步）和几何（平面几何、平面解析几何初步），共有十六章.每章包括内容提要、范例及习题三个部分.内容提要主要是对重要的概念、定理、公式和法则进行归纳和整理；例题的选取注意精练、有代表性，解答详尽，格式步骤力求规范，多数例题附有多种解法，并说明解题思路和注意事项；习题难度稍大和综合性较强，均附有答案或提示.

本书附有综合练习五组，每组练习均有详尽解答，便于读者自我检查.

本书力求满足平时教学的要求，涉及知识力求系统、完整、全面.

本书可供初中学生和自学青年在平时学习数学时参考.

参加本书编写工作的有韩本如、王祯祥、韩乐明、王福生、陈铭华、郭文贤、陈灵敖、梁寿山、赵秀春、梁新儒、袁月娣、梁瑛、李英芬等同志.因时间仓促、水平有限，书内缺点错误在所难免，望读者批评指正.

编　者

一九八二年十二月

目　　录

代　　数

几　　何

代　　数

第一章　实　　数

一　有关数的基本概念

1．**自然数**　表示物体个数的1，2，3…等叫做自然数．显然，自然数的个数是无限的；最小的自然数是1，没有最大的自然数．

2．**整数**　包括正整数、零和负整数．

3．**有理数**　形如$\frac{p}{q}$（p、q是整数，且$q\neq0$）的数叫做有理数．若用小数形式表示，那么有理数一定是有限小数或者循环小数．

4．**无理数**　无限不循环小数叫做无理数．

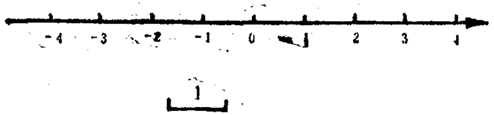
显然，无理数不能用$\frac{p}{q}$（p、q是整数，且$q\neq0$）来表示。

5．**实数**　有理数和无理数统称实数．

实数的分类如下：

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数（自然数）
      - 零
      - 负整数
    - 分数（正分数和负分数）
      - 有限小数
      - 循环小数
  - 无理数（正无理数和负无理数）——无限不循环小数．

6. **数轴** 规定了正方向、原点和长度单位的直线叫做数轴.



长度单位

图 1-1

实数集合和数轴上点的集合是一一对应的.

7. **相反数** 只有符号不同的两个数叫做互为相反数.（如果 a 是任何一个实数，那么它的相反数用 $-a$ 来表示.零的相反数是零.）

8. **绝对值** 一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零.即

$$|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0).\end{cases}$$

$|a|$的几何意义是数a在数轴上的对应点到原点的距离.

9. **倒数** 如果两个数的积等于1，那么它们叫做互为倒数.（零没有倒数）

10. **算术根** 在实数范围内，一个正数的正的n次方根叫做算术根，记做$\sqrt[n]{a}$（$a>0$）.（零的算术根是零.当$n=2$时，$\sqrt{a}$表示a的算术平方根（$a>0$），简称算术根.根据算术根的定义可得$\sqrt{a^2}=|a|$.

11. **实数的大小比较** 设有两个实数a和b，并且设数轴上的A点表示实数a，B点表示实数b.

（1）如果B点在A点的右边，那么$b>a$.即在数轴上表示的两个有理数，右边的数总比左边的数大.

（2）如果B点和A点重合，那么$b=a$。

由此可知：正数都大于零，负数都小于零，正数大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小。

12. **实数的六种基本运算**（加、减、乘、除、乘方、开方）**以及它们之间的关系**。

（1）加法法则：同号两数相加，把它们的绝对值相加，取原来加数的符号；异号两数相加，用较大的绝对值减去较小的绝对值，取绝对值大的加数的符号。

特殊情况：两个相反数相加等于零；任何数与零相加，仍得这个数。

（2）减法法则：减去一个数，等于加上这个数的相反数，

用字母表示：$a-b=a+(-b)$。

可见，正负数的加法与减法，可以互相转化。遇到减法时，只要把减数的符号改变后，化为加法，就可以按加法法则进行运算。

（3）乘法法则：

①先求出两个数的绝对值的积；

②按以下规则确定积的符号——同号取正，异号取负。

（4）除法法则：

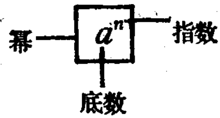
①先求出两个数的绝对值的商；

②按以下规则确定商的符号——同号取正，异号取负。

一个数除以另一个数，等于这个数乘以另一个数的倒数，即$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}(b\neq 0)$。

（5）乘方：求相同因数的积的运算叫做乘方，即

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots\cdots a}_{n}$$



（6）开方：求一个数的方根的运算叫做开方．求a的n（n是自然数）次方根，叫做把a开n次方；求一个数的平方根的运算，叫开平方；求一个数的立方根的运算，叫开立方．

当根指数是偶数时，被开方数必须是正数或者零；当根指数是偶数、被开方数是正数时，开方的结果有两个值，它们互为相反数，其中正的一个方根就是算术根．

13．**运算定律**　设a、b、c为任意实数，则有：

（1）加法交换律　$a+b=b+a$．

（2）加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$．

（3）乘法交换律　$ab=ba$．

（4）乘法结合律　$(ab)c=a(bc)$．

（5）分配律　$(a+b)c=ac+bc$．

14．**运算顺序**

（1）在同一个式子里，先乘方、开方，然后乘、除，最后加、减．

（2）一个式子里如果有括号，先进行括号里的运算．

（3）适当利用运算定律．

15．**有关近似计算的一些概念**

（1）准确数与近似数：表示量的准确值的数叫做准确

数，表示量的大约的值的数叫做近似数．

（2）近似数的截取方法：用四舍五入法．

（3）近似数的有效数字的个数：从它最左的不是零的数字算起，到最后一位保留的数字为止，一共有几个数字，就说这个近似数有几个有效数字．

二　例题

例1　计算 $16\times(-3)^2+5\times(-3)-12\div2+(-60)\div(-4)+18\times(-2)^3-(-3)\times(+2)$．

解：原式 $=16\times9+5\times(-3)-12\div2+(-60)\div(-4)+18\times(-8)-(-3)\times(+2)$

$=144-15-6+15-144+6$

$=0$．

说明：（1）先乘方，再乘除，最后加、减；（2）将互为相反数的数合并，运算就比较简捷，也不易弄错．

例2　计算 $\frac{1}{5}\div\frac{1}{3}+\left(1\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\div5+\frac{3}{7}\div(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{-2}{5}\right)\left(\frac{-5}{7}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3$．

解：原式 $=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{3}{14}+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}-\frac{1}{8}$

$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{3}{14}+\frac{2}{7}\right)$

$=-\frac{3}{8}+\frac{5}{10}-\frac{7}{14}$

$=-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$

$$=-\frac{3}{8}.$$

说明：把分母之间有倍数关系的分数先合并起来，运算就变得简捷。

例3 计算 $2.75-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)+4\frac{2}{3}\right]$。

解：原式 $=2.75-\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{3}{8}\right)-4\frac{2}{3}$

$$=2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{8}-4\frac{2}{3}$$

$$=\left(2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)-\left(\frac{5}{6}+4\frac{2}{3}\right)$$

$$=3\frac{5}{8}-5\frac{1}{2}$$

$$=-1\frac{7}{8}.$$

说明：如果式子里既有小数又有分数，一般先把小数化成分数，再进行运算。

例4 计算 $-1\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}\times(-0.2)\times1\frac{3}{4}\div1.4\times\left(-\frac{3}{5}\right)$。

解：原式 $=-\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{5}\right)\times\frac{7}{4}\times\frac{5}{7}\times\left(-\frac{3}{5}\right)$

$$=-\frac{3}{10}.$$

说明：先把带分数化成假分数，把除法化成乘法，再进行计算。

例5 计算 $\left[(-5)^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)+15\right]\times8\div7+1-2^2+$

$$(-2)^2-(-3)^2-(-3)^3-\sqrt[3]{-27}.$$

解：原式$=\left[25\times\left(-\frac{3}{5}\right)+15\right]\times 8\div 7+1-4+4-9+27+3$

$=(-15+15)\times 8\div 7+1-4+4-9+27+3$

$=22.$

例6 计算 $|-5|-|-7^2|+\left|\frac{1}{3}\right|-|5\div(-6)|-\sqrt{(-3)^2}.$

解：原式$=5-49+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}-3$

$=-44+\frac{2-5}{6}-3$

$=-47\frac{1}{2}.$

例7 比较下列各数的大小：

$$-\frac{5}{6},\ -\frac{6}{7},\ -0.8.$$

解：$-\frac{5}{6}=-\frac{175}{210}$，$-\frac{6}{7}=-\frac{180}{210}$，$-0.8=-\frac{168}{210}$；

$\because\ -180<-175<-168$，

$\therefore\ -\frac{6}{7}<-\frac{5}{6}<-0.8.$

例8 计算 $\sqrt{3}+\frac{1}{7}-(2.335-\frac{5}{3})$（精确到0.01）.

解：原式$\approx 1.732+0.143-2.335+1.667$

$=3.542-2.335$

$=1.207$

$\approx 1.21.$

例9 把下列各数分别填在相应的括号内：

6，$-\frac{1}{2}$，-37，0，-1，0.16，$3\frac{1}{2}$，$0.1\dot{2}$. $\sqrt{3}$，$-\sqrt{2}$，π.

整数集合{ …}，　分数集合{ …}，

正数集合{ …}，　负数集合{ …}，

有理数集合{ …}，　无理数集合{ …}，

解：整数集合$\{6, -37, 0, -1, \cdots\}$，

分数集合$\left\{-\frac{1}{2}, 0.16, 3\frac{1}{2}, 0.1\dot{2}, \cdots\right\}$，

正数集合$\left\{6, 0.16, 3\frac{1}{2}, 0.1\dot{2}, \sqrt{3}, \pi, \cdots\right\}$，

负数集合$\left\{-\frac{1}{2}, -37, -1, -\sqrt{2}, \cdots\right\}$，

有理数集合$\left\{6, -\frac{1}{2}, -37, 0, -1, 0.16, 3\frac{1}{2}, 0.1\dot{2}, \cdots\right\}$，

无理数集合$\{\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \pi, \cdots\}$.

例10 （1）画数轴，并标出表示下列各数的点：

2，$-2\frac{1}{2}$，-1，3，$2\frac{1}{3}$，$|-3.5|$.

（2）写出满足不等式$-5\leqslant x<1$的整数x的值，并在数轴上表示出来.

解：（1）

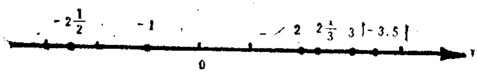


图 1-2

（2）x的值为-5，-4，-3，-2，-1，0。

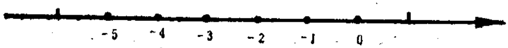


图 1-3

例11 下列各式在a是什么数时成立，什么数时不成立？

（1）$|a|=a$； （2）$|a|=-a$； （3）$|a|=|-a|$；

（4）$a=-a$。

解：（1）当$a\geqslant 0$时，$|a|=a$成立；当$a<0$时，$|a|=a$不成立。

（2）当$a<0$时，$|a|=-a$成立；当$a>0$时，$|a|=-a$不成立。

（3）a为任何实数，$|a|=|-a|$都成立。

（4）当$a=0$时，$a=-a$成立；当$a>0$或$a<0$时，$a=-a$不成立。

例12 计算 $|1-a|+|2a+1|+|a|$ （$a<-2$）。

解：$\because$ $a<-2$

$$\begin{aligned}\therefore\ & |1-a|+|2a+1|+|a| \\ &=1-a-(2a+1)-a \\ &=1-a-2a-1-a \\ &=-4a.\end{aligned}$$

例13 解方程 $|x-4|=5$。

解：当$x-4>0$时，$|x-4|=x-4$，原方程可化为

$$x-4=5.$$

$\therefore \qquad x=9.$

当$x-4<0$时，$|x-4|=-(x-4)$，原方程可化为

$$-(x-4)=5.$$

$\therefore \qquad x=-1.$

所以原方程的解为 $x=9$，$x=-1$。

说明：解这种方程，关键在于合理地去掉绝对值的符号，以便转化为不带绝对值符号的方程来解.

当使用定义去掉绝对值符号时，需要分段进行讨论；如果是解方程，必须把本段的前提与本段的解结合起来考虑.

例14　已知一个四位数的各位数字的和能被3整除，证明这个四位数能被3整除.

证明：设这个四位数为$1000a+100b+10c+d$（a、b、c、d取0，1，2，…，9中的数，且$a\neq0$），于是

$$\begin{aligned}&1000a+100b+10c+d\\=&(a+b+c+d)+999a+99b+9c\\=&(a+b+c+d)+9(111a+11b+c)\end{aligned}$$

因为$a+b+c+d$能被3整除，9也能被3整除，所以这个四位数必能被3整除.

习 题 一

1．填空：

（1）大于-1而小于$+1$的整数是______.

（2）x与它相反数的差是____.

（3）如果a的绝对值等于a的相反数，那么a应该是______.

（4）适合不等式$-3.5<x\leqslant1$的整数是______.

（5）已知$x^2=324$，则$x=$______。

（6）$(-1)^{2n+1}+(-1)^{2n}=$____，$(-1)^n+(-1)^{n+1}=$______（这里n是自然数）。

（7）$|a|-|-a|=$____；当$b\neq 0$时，$\dfrac{|b|}{b}=$____。

（8）$\big|a+|a|\big|=$______。

2．把下列各数填在相应的大括号里：

$-\sqrt{3}$，5，$-0.1\dot{6}$，-9，125，$-\dfrac{5}{6}$，$\dfrac{7}{9}$，$-\dfrac{80}{91}$，0，$-3\dfrac{1}{2}$。

整数集合｛　…｝，　正整数集合｛　…｝，

负分数集合｛　…｝，　无理数集合｛　…｝。

3．计算：

（1）$\left[\dfrac{1}{(-0.2)^2}-1\right]\div\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)$。

（2）$$\frac{\left(\frac{1}{6}+0.1+\frac{1}{15}\right)\div\left(\frac{1}{15}-0.1-\frac{1}{6}\right)\times 2.52}{\left(0.5-\frac{1}{3}+0.25-\frac{1}{5}\right)\div\left(\frac{1}{6}-0.25\right)\times\left(-\frac{7}{13}\right)}.$$

（3）$\left[\left|1\dfrac{1}{2}-2\dfrac{1}{3}\right|\div 1\dfrac{1}{6}-(-2)^2\right]\div\left(1\dfrac{1}{7}-2\right)+\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{2^2}{3}\div\left(-1\dfrac{3}{5}\right)+(-2)^5$。

（4）①$\sqrt{(x-1)^2}$；　②$|2x-3|$；

③$|1-a|+|2a-1|$。