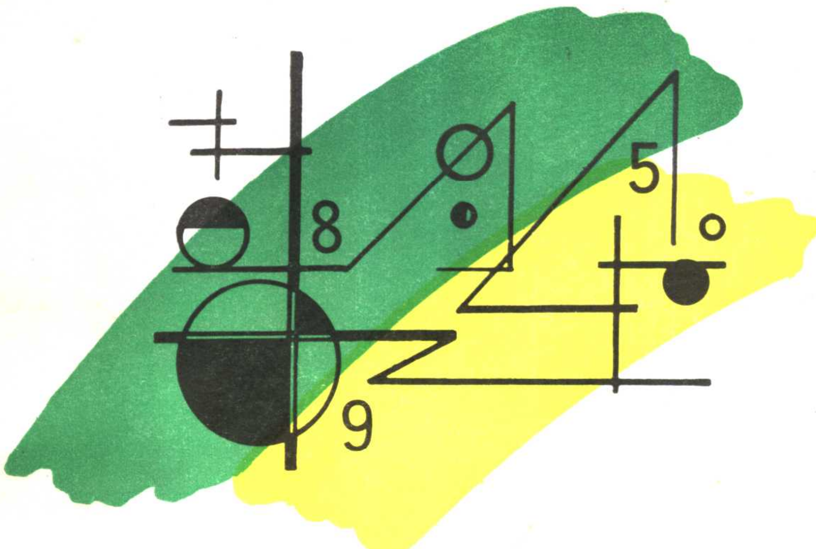
中学生课外阅读丛书



北京市海淀区教师进修学校　主编

初三代数几何

上册

机械工业出版社

中学生课外阅读丛书

初三代数几何

上　册

北京市海淀区教师进修学校　主编

机 械 工 业 出 版 社

本书代数部分重点讲述了对数发明简史、对数在解题中的应用、复利公式和对数恒等式等与对数有关的问题，还介绍了函数的一系列问题和待定系数法。几何部分介绍了几个补充定理：梅涅劳斯定理、塞瓦定理和托勒梅定理，还介绍了二次方程根的作图和代数法作图。

本书有大量例题、习题和思考题。学习本书将对初中数学知识有较大的提高，尤其在方法和能力上更是如此。本书可供初中在校学生作为课外读物，对家长、中学教师和具有初中文化水平的青年职工和自学青年也是一本很好的参考书。

中学生课外阅读丛书

初三代数几何

上　册

北京市海淀区教师进修学校　主编

*

责任编辑：陈国华　版式设计：罗文莉

责任校对：李广孚

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南里一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社印刷厂印刷

机械工业出版社发行·新华书店经销

*

开本 $787\times1092^{1}/_{32}$·印张 6·字数 129 千字

1988 年 5 月北京第一版·1988 年 5 月北京第一次印刷

印数　00,001—54,000·定价：1.35 元

*

ISBN 7-111-00453-1／G·13

序

知识的获得，能力的增长，智力的开拓和水平的提高，往往得益于课外，这是很多科学家、作家和文艺工作者的切身体会。因为课内的讲授只能是分析、理解知识的内容和知识的结构，而要形成各种能力，则要靠大量的课外阅读。这就是本套丛书编写的目的之一。其次，这套丛书包括了从初中一年级起直至高中三年级的 16 个学科，它能使读者切实地掌握各学科的基础知识，培养、提高读者把握各学科的基本技能和技巧，有利于将来的工作，有利于初高中升学考试。这也是编写本套丛书的意图。中学是基础学习的阶段，如果能奠定坚实的知识基础，培养观察、想象、思维、动手等各方面的能力，对提高全民族文化素质也是有益的。这也是我们编写这套丛书的意愿。

这套丛书共 16 个学科，57 册。其中，政治两册，初、高中语文各六册，初中数学六册、高中数学四册，初、高中英语各三册，初中物理两册、高中物理三册，初中化学一册、高中化学三册，初中中国地理、初中世界地理、高中地理各一册，中国历史、世界历史各两册，生物、动物、植物、生理卫生各一册，音乐、体育、美术各两册，计算机一册。

这套丛书充分体现了知识性、科学性和趣味性，内容充实，行文简洁，形式活泼，语言生动，读者从中可以得到爱国主义、国际主义、辩证唯物主义、历史唯物主义和美学教育。这套丛书除语文外，都是按照教学大纲和教材的要求，

以解决学习中的难点、重点为主线；介绍了本学科古今中外著名的专家学者，以及他们的故事轶闻；设计了多种形式的实验、练习以及解题的多种方法等等。语文中各种文体的文章也是按照教学大纲对每个年级每个学期的知识要求而选择的，内容丰富生动，情节曲折动人，并附有注释及分析。其中大部分文章是名家的新作，具有积极的思想内容和完美的艺术形式。

这套丛书的编写者，都是北京市海淀区有较高业务水平、有较丰富教学经验、有较强的写作能力的教师，其中大多数是中学的高级和一级教师，还有特级教师。编写班子阵容强大、实力雄厚，希望能为开辟学生的第二课堂做一些有益的工作。但限于时间和水平，书中内容有不当之处，敬请读者批评指正。

北京市海淀区教师进修学校

1988年2月

前　言

望我中华子孙个个成龙，是人们共同的心愿。有良好的愿望是必要的，但是，如果拿不出实现愿望的正确办法，愿望只好落空。因此，育人的方法、措施，是至关重要的问题。

从智育的角度看，存在两个问题：一个是学习内容问题，一个是学习方法问题，即学些什么和怎样去学的问题。

回顾我们区近年来的教学实践，在内容方面，经历了三个阶段：一、仅抓课本；二、在掌握课本知识的基础上，举办一些专题讲座；三、适当提供一些"微量元素"。在方法方面，不仅应注意课堂教学和课外作业的正规作战，而且还应适当利用闲暇时间，通过轻松教育，辅助同学开阔视野。

编写本书的意图在于给同学们提供数学中的"微量元素"。它包括史、法、用、高、新等方面的内容。史，指古今中外一些数学大家的事迹和其他有启发性的数学史料；法，指重要数学思想和数学方法；用，指数学在生产和生活中的巧妙应用；高，指用高观点认识中学数学；新；指当今数学发展的新动向。这些内容，对开阔视野、激发学习数学的兴趣、更深入地理解课内知识、从根本处掌握数学思想和方法、提高数学思维能力都将大有裨益。它们具有数量不多而作用巨大的特点，把它们比喻为营养学中的"微量元素"不是很恰当吗？

本丛书数学部分每册都由独立成篇的一些文章组成，文字力求通俗易懂而又具有趣味性，以便于利用零星闲暇时间阅读。读时，一次未必读很多，只要持之以恒，自能体会到其功效的。

本册编者是周耿、高子赣，审订者是李乐、王建民、王增民。

目　录

一、对数发明的前前后后

你知道对数的“三”和“七”吗？

“三”就是在人类科学发展史上被誉为在数学计算方面的三大发明之一（其他是阿拉伯数字，十进分数）。

“七”就是继加、减、乘、除、乘方、开方之后的第七种数学运算。

数学计算方面的发展史中，对数发明是一个重要里程碑，它推动了数学和其他科学的发展。著名的法国数学家兼天文学家拉普拉斯（1749～1827 年）说过：对数的算法，不仅避免了大量数字计算时容易犯的错误，而且需要几个月的计算量只要几天就可算好，等于几倍地延长了天文学家的寿命。

这样一个伟大发明的出现，经历了近二千年的历史。它凝结了多少数学家的心血啊！回忆它的发明历程，对我们必有教益。

早在 15 世纪资本主义发展初期，因为商业发达、货币交换频繁以及天文学、航海学的发展，促使了各种复杂计算的兴起。人们为了加快计算速度，减少计算的错误，想出了很多的办法，制造出各种计算表，例如乘方表、开方表、倒数表等，同时也改进了不少计算的工具，如算盘、简单计算器等。16 世纪末到 17 世纪初，三角函数大量地应用，出现了精密的三角函数表，这就更增加了计算的繁杂程度。因而改进数字的计算方法已迫在眉睫。

对数计算之所以能简化数字运算，主要是它能使计算

“降级”。乘除运算可转化为加减运算，乘方开方运算能转化为乘除运算。这种思想的产生可以追溯到很早。公元前200年古希腊著名数学家，学者阿基米德（公元前287～前212年）就已经注意到下列两列数之间的关系了。

0，1，2，3，4，5，6，7，…。

1，10，10^2，10^3，10^4，10^5，10^6，10^7，…。

他认为：可用第一列数的加减法代替第二列数的乘除法。这正是对数运算的萌芽。

1484年法国的舒开将此改进为以2为底数的两列数，把数与数之间的差距缩小了。

将下列两列数加以比较。

0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，…。

1，2，4，8，16，32，64，128，256，512，1024，2048，4096，…。

如果要求16×256，只需找到上一列对应数字4与8，将其相加为12后，再从同一列中找到12，查出其对应的第二列数字4096就是结果，他归纳为第二列数的乘除法，可转化为第一列数的加减法；第二列数的乘方开方可转化为第一列数的乘除法。可惜他没有继续研究制出对数表。后来，1544年德国数学家史提非（1487～1567年），把第一列数叫做“指数”，并指出要计算两数之积，只需求这两数的“代表”的和就成了（“代表”成了当时的数学术语“对数”的代名词）。

对数的发明者是纳皮尔（1550～1617年）。他是苏格兰的贵族，对数学很有研究。除对数外，在球面三角以及乘除法“算筹”的研究等方面都很有名。他经过了20年的艰苦努力，于1614年发表了世界上第一张对数表。纳皮尔是如何造出对数表的呢？有人误认为编造对数表只能用高等数学的

方法才能办得到。虽然现在我们使用的对数表一般都是用高等数学方法编制的，但是纳皮尔当时制造的对数表却是用初等数学的方法。下面介绍他的一种方法（为简明起见，已经过加工）。

制造对数表的重要一点是精确度。主要思想方法如下：欲求常用对数 $\lg a$，精确到$\frac{1}{n}$（这里设 a,n 为正整数）。实际上，需求出两个连续整数 x，$x+1$。使不等式

$$10^{x} < a^{n} < 10^{x+1} \quad \text{成立}$$

有

$$10^{\frac{x}{n}} < a < 10^{\frac{x+1}{n}}$$

则$\lg a$精确到$\frac{1}{n}$的不足近似值为$\frac{x}{n}$。

根据此法，试求 $\lg 3$ 精确到$\frac{1}{100}$的值。即要知道 3^{100} 在 10 的哪两个连续整数次幂之间，可用乘法直接计算。

$$\because \quad 3^{5} = 243$$

$$\therefore \quad 3^{10} = 59049$$

故 $$59 \times 10^{3} < 3^{10} < 60 \times 10^{3}$$

平方得 $$3481 \times 10^{6} < 3^{20} < 3600 \times 10^{6}$$

即有 $$34 \times 10^{8} < 3^{20} < 36 \times 10^{8} \quad \text{(用舍去法)} \tag{1}$$

同理有 $$11 \times 10^{18} < 3^{40} < 13 \times 10^{18}$$

$$121 \times 10^{36} < 3^{80} < 169 \times 10^{36} \tag{2}$$

将(1) × (2)有(并用放缩法)

$$10^{3} \times 10^{44} < 4114 \times 10^{44} < 3^{100} < 6084 \times 10^{44} < 10^{4} \times 10^{44}$$

$$\because \quad 10^{47} < 3^{100} < 10^{48}$$

即
$$10^{0.47} < 3 < 10^{0.48}$$

故　$\lg 3 = 0.47$（精确到0.01）

如果需求精确度更高，如求 lg3 精确到 $1/10^5$ 的值，仍可从 $3^{10} = 5909$，依次计算出下列不等式（虽十分繁杂，但总可算出）：

$$259 \times 10^{9540} < 3^{20000} < 282 \times 10^{9540}$$

$$44 \times 10^{38168} < 3^{80000} < 64 \times 10^{38168}$$

上两式相乘，整理得

$$10^{47712} < 3^{100000} < 10^{47713}$$

$$\therefore \quad \lg 3 = 0.47712 \text{（精确到} 1/10^5\text{）}$$

纳皮尔的对数表发表后，震惊了世界。伦敦的一位数学家布里格斯（1561～1631 年）见到对数表后写道：纳皮尔用他新颖而可惊的对数，使我能够有力地用脑和手来工作。他经过长途跋涉见到了纳皮尔后，激动地说：我长途跋涉的唯一目的就是想见见你本人，并且想知道，你是靠怎样一种智慧和天才的武器才第一次想到这个对天文学十全十美的方法——对数。后来，布里格斯将对数表加以改进，改为以 10 为底数的常用对数（当时纳氏表的底数并非自然对数的底 e，只是与 10 相近而已。纳氏也曾想到过常用对数表的编制，但已来不及，于 1617 年去世了）。布氏继续了纳氏的工作，用他毕生精力完成从 1～20000 及从 90000～100000 之间的整数的 14 位常用对数表，于 1624 年发表。

在这里还要提一下瑞士的一位钟表匠彪奇（1552～1632 年），他也独立地发明了对数，可能比纳皮尔还早，但发表

较迟（1620年），那时纳氏对数已经闻名全欧洲了。

我国最早的对数著作是1653年波兰数学家穆尼阁（1611～1656年）来中国，与清代的薛凤祚（？～1680年）合编的《比例对数表》。清代数学家戴煦（1805～1860年）研究对数很有成就，著作有《求表捷术》。1854年英国人艾约瑟（1825～1905年）见到戴煦的著作时大为叹服，对他很崇敬，并将他的书译成英文发行。

现在我们学校用的对数表，并不是很久的事情。自布氏编成第一本常用对数表（14位的）以后，过了几年，1628年荷兰数学家佛拉哥的10位对数表代替了它。1794年又出现了7位对数表，但不被当时学术界所接受。因为那时人们还不认识一个简单的事实，即计算的精确度是不能超过量度的精确度的。实际上当时的技术水平，日常量度很难得到3位以上的有效数字。所以，用3位有效数字的对数表，其精确度就足够了。目前中学用的4位对数表亦如此。对数表的尾数缩短的改革不仅使篇幅大大减少，而且用起来很方便。7位表占200页，5位表占30页，4位表只有5位表的$\frac{1}{10}$，而3位表只需1页就可以了。用5位表演算比用7位表可省一半的时间。

人们为现场施工、设计方便，又制造了对数计算尺。在电子计算器没有发明普及以前，计算尺是工程技术人员的必备工具，现在随着计算机的普及才慢慢消失。

对数的用途十分广泛。不但在日常计算中，而且在物理学、力学、电学、生物学、化学中都有应用。甚至还进入了你料想不到的领域。当你弹着钢琴的键盘时，实际弹的是对数，即在等音程的半音阶中，各“音程”并不是按音调的频

率，也不是按波长等距离地排开的，却是这些数量的对数(是以2为底的)；在量度恒星的视觉亮度时，天文学家是用一种以2.5为底的对数表计量的；在研究噪声的响度时，一般用“分贝”表示，它恰好等于它的物理强度的常用对数；在衡量星体的视觉亮度或估定噪声响度时，我们都碰到了存在于人的感官的数量和产生它的刺激的数量之间是用对数关系相联的。这样的现象都可以归结为同一个定律：感觉数量和刺激数量的对数成正比例（费赫纳尔心理物理学定律）。由此看出，对数已闯入了心理学。

二、关于对数表的质疑

同学们是否想过，我们现在常使用的四位数学用表中的对数表，表中的数是精确值还是近似值？如果是近似值，那么是有理数的近似值还是无理数的近似值呢？表中的修正值又是怎么得来的呢？为什么用同一对数表计算结果却不同？

先来看看常用对数是有理数还是无理数？什么时候是有理数，什么时候是无理数？

下面分析一个具体对数：lg2

令$x = \lg 2$，即$10^x = 2$

$\because \quad 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10} \approx 2.154, \quad 10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10} \approx 1.778$

$$\therefore \quad \frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$$

由$\sqrt[3]{10}$，$\sqrt[4]{10}$为无理数，可猜到x也是无理数。

若x不是无理数的话，那么只能是有理数。

设　$x = \dfrac{q}{p}$(p，q是既约分数，$p > q$)

即有$10^{\frac{q}{p}} = 2$

$$\therefore \quad 10^q = 2^p$$

$$\because \quad 2^q \times 5^q = 2^p$$

$$\therefore \quad 5^q = 2^{p-q}$$

故　$5^q = 2^m$　(q，m均为正整数)

这等式是不可能成立的（因左边为奇数，右边为偶

数）。

$\therefore x$不会是有理数，只能是无理数。

同学们不妨再试说明lg3、lg4等是无理数。

有如下定理，可回答疑问。

定理 如果一个有理数 r 的常用对数是有理数，那么，它是 10 的整数次幂。反之亦然。

证明：设 $\lg r=\frac{p}{q}$ 是有理数 (p，q 互质)，又因 r 是有理数，又设 $r=\frac{P}{Q}$(P，Q 互质)

$$10^{\frac{p}{q}}=\frac{P}{Q}$$

$\therefore$
$$10^{p}=\left(\frac{P}{Q}\right)^{q}$$

故
$$2^{p}\times 5^{p}=\frac{P^{q}}{Q^{q}}$$

将P、Q分解质因数

设
$$P=l^{\alpha}\times m^{\beta}\times\cdots\times n^{\gamma}$$
$$Q=u^{\lambda}\times v^{\mu}\times\cdots\times\omega^{\pi}$$

不妨设$q>0$

第一种情况，当 $p>0$ 时，$Q=1$（否则左边为整数而右边却为分数）

$$2^{p}\times 5^{p}=P^{q}=l^{\alpha q}m^{\beta q}\cdots n^{\gamma q}$$

若使上式成立，只能有$l=2$，$m=5$。

$\therefore$
$$2^{p}\times 5^{p}=2^{\alpha q}\times 5^{\beta q}$$

$\therefore$
$$p=\alpha q,\ p=\beta q$$

故
$$\frac{p}{q}=\alpha=\beta \quad 是一个自然数。$$

$\therefore \quad \lg r=\frac{p}{q}$是自然数，即$r=10^{\alpha}$为10的整数次幂。

第二种情况，当$p<0$时

设
$$p=-p' \quad (p'>0)$$

$$10^{p}=\frac{P^{q}}{Q^{q}} \quad 变为 \quad 10^{-p'}=\frac{P^{q}}{Q^{q}}$$

$\therefore$
$$10^{p'}=\frac{Q^{q}}{P^{q}} \quad P=1(同理)$$

$\therefore$
$$10^{p'}=Q^{q}$$

同理可证出 $r=10^{\alpha}$(α为自然数)

第三种情况，当$p=0$时

$r=1=10^{0}$ 也是10的整数次幂

(反之亦然，逆命题易证，这里从略)

概言之，除了下列数

$\cdots, \frac{1}{10^{n}}, \cdots, \frac{1}{10}, 1, 10, \cdots, 10^{n}, \cdots$ 外，其它任何数的常用对数均是无理数。

对数表中的数几乎全是无理数的近似值。不同位数的对数表，只是精确度不同而已。

下面我们回答修正值问题。

在对数表中，查到第4位数字时，由表的右边的值进行“修正”，故称修正值。为什么有的修正值相同，有的不同？而且真数越大，修正值也越大？

常用对数的真数越大，对数也越大，很易从表中观察

验证，具体证明将在高一学到，这里从略。我们再仔细观察，可以发现，真数变化与对数变化并不是成正比例的。比如表中第一行，真数修正值由 3 增到 4 到 5（每次增加 1），而对数修正值是由 12 增到 17 到 21 的（每次增加并非 1）。那么修正值是按什么规律变化的呢？

表中修正值是用数学中常见的方法——线性插入法制定的。

如图 2-1 所示，设曲线 AB 代表对数的图象。试求 lg3248＝?从表中查到 lg3240＝3.5105（图中 AC）lg3250＝3.5119（图中 DB）

为了求出 3248，将 CD 平均分为 10 份（每份为 1 个单位），取其 8 份为 M 点。

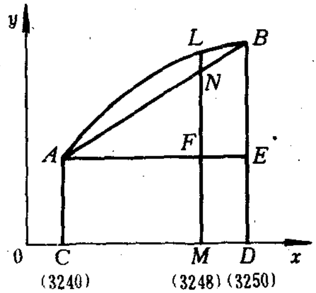


图 2-1

则　　$\lg 3248 = ML = MF + FL = \lg 3240 + FL$

这里 FL 就是对数 lg3240 的增加的量（简称为增量）。修正值正是要解决用什么线段来近似代替 FL 的问题。所谓“线性插入法”就是用 AB 所连直线与 FL 的交点 N，所得到的 FN 近似代替 FL。很易发现其误差为 LN，相对 FN 来说是微小的，这样的代替也具有一定的精确度。

由$\triangle ANF \backsim \triangle ABE$得

$$\frac{FN}{AF} = \frac{BE}{AE}$$

即