高中数学复习指导

上

全国十五所重点中学编
天津南开中学主编

天津科学技术出版社

高中课程总复习丛书

高中数学复习指导

（上）

全国十五所重点中学 编
天津南开中学 主编

天津科学技术出版社

高中课程总复习丛书

高中数学复习指导

（上）

全国十五所重点中学　编

天 津 南 开 中 学　主编

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷一厂印刷

新华书店天津发行所发行

开本 787×1092毫米 1/32 印张 15.5　字数 332,000

一九八五年十月第一版

一九八五年十月第一次印刷

印数：1－73,200

书号：13212·99　定价：2.30元

前　言

为提高我国普通中学的教育水平，集全国重点中学的教学经验，由天津南开中学组织全国十五所重点中学，编写了这套《高中课程总复习丛书》。参加编写的全国十五所重点中学是：天津南开中学、北大附中、北京景山学校、北京师大实验中学、北京师院附中、上海师大附中、华东师大一附中、华东师大二附中、南京师大附中、苏州中学、杭州学军中学、福州一中、福州三中、东北师大附中、辽宁省实验中学。丛书包括《高中数学复习指导》（上、下）、《高中物理复习指导》（上、下）、《高中化学复习指导》、《高中生物复习指导》、《高中语文复习指导》、《高中政治复习指导》、《高中英语复习指导》、《高中历史复习指导》、《高中地理复习指导》共十一册。

本丛书以巩固基础知识，加强基本训练，提高学生灵活运用所学知识的能力为目的，根据中学教学大纲和全国统编教材，归纳出了复习要求、复习要点、例题分析等内容，精心设计和筛选了一定数量的练习题和习题，配置了2～3套综合模拟试题。

本书为《高中数学复习指导》（上），由天津南开中学范培瑜（第一章）、王志芬（第二章）、董晶达（第三、四章）、韩子阳（第五、六章）、高学仁（第七、八章）等编写，由郗昌盛对全书进行审阅。书中带*者为较高要求内

容，读者可酌情参考。

由于时间仓促，加之水平所限，书中难免有错处，恳请读者批评指正。

编　者

一九八五年七月

目　录

代数

代　数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

复 习 要 求

1.掌握近代数学两个基本观点：集合与映射.

2.用集合与映射的观点进一步认识函数的概念，并且能够较熟练地掌握函数通性的研究方法.

3.熟练灵活地应用对数换底公式及其推论.

4.熟悉有关幂函数、指数函数和对数函数的性质与图象.会解简单的指数方程和对数方程.

复 习 要 点

一、集合

1.描述：具有某种属性（或性质）的事物的全体构成一个集合.其中每一个具体事物都叫集合的一个元素.

（1）构成集合的两个必要条件是：研究的对象是具体的，它们的属性是明显的.二者缺一不可.

（2）能否构成集合与集合内元素是否存在无关.

2.集合内元素的特征：元素的确定性、互异性和无序性.

3.集合的表示方法

（1）列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内。

（2）描述法：把集合中元素的共同属性写在大括号内。

（3）平面直观图法：把集合中元素属性的几何意义在平面直角坐标系中表示出来。

（4）韦恩图法：用一条封闭的曲线把元素圈起来。

4.元素与集合的关系：从属关系.用$\in$或$\overline{\in}$（$\notin$）表示.

5.集合与集合的关系：包含或相等的关系.用$\subseteq$或$\subset$或$=$表示.

6.子集：对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集，记作：$A\subseteq B$或$B\supseteq A$.

7.真子集：如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集，记作：$A\subset B$或$B\supset A$.

（1）真子集一定是子集，而子集不一定是真子集.

（2）空集是任何非空集合的真子集.

8.集合的运算

（1）交集：由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A，B的交集，记作$A\cap B$，即：$A\cap B=\{x\mid x\in A，且x\in B\}$.

①$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；

②$A\cap\phi=\phi$，$A\cap A=A$；

③$A\cap B=B\cap A$.

（2）并集：由所有属于集合A或属于集合B的元素

所组成的集合，叫做A，B的并集，记作$A\cup B$，即：$A\cup B=\{x\mid x\in A，或x\in B\}$。

①$A\cup A=A$；

②$A\cup\phi=A$；

③$A\cup B=B\cup A$；

④$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$；

⑤$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$。

（3）全集：研究集合与集合之间的关系时，在某些情况下，所研究集合都是某一个给定的集合的子集，这个给定的集合可以看作一个全集，用符号I表示。

（4）补集：已知全集I，集合$A\subseteq I$，由所有属于I而不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在I中的补集，记作$\overline{A}$，即：$\overline{A}=\{x\mid x\in I，且x\notin A\}$。

①$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{\phi}=I$，$\overline{I}=\phi$，

②$A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\phi$，

③$A\cap I=A$，$A\cup I=I$。

9.两个公式

（1）两个有限集合子集和真子集个数公式：

①子集个数：2^n；

②真子集个数：2^n-1。（其中，n代表集合中元素个数）。

（2）两个有限集合并集元素个数公式：若n代表集合中元素的个数，则$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。

二、映射

1.对应：已知两个集合A与B，根据某种确定的关系，

“f”使集合A中任何一元素在集合B中都有跟着的确定的元素出现，则称这种关系为从集合A到集合B的一个对应关系，简称对应。

（1）两个集合间的对应关系有四种形式：

①一对一的对应；

②一对多的对应；

③多对一的对应；

④多对多的对应。

2.映射：设A，B是两个集合，如果按照某种对应法则f，对于集合A中的任何一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应（包括集合A，B及从A到B的对应）则f叫做从集合A到集合B的映射，记作：$f: A \to B$。

（1）集合A叫做起始集，集合B叫做终止集。起始集元素的任意性和终止集元素的唯一性是构成映射的核心。

（2）映射也叫单值对应。

3.象与原象：如果给定一个从集合A到集合B的映射，那么，和A中的元素a对应的B中的元素b叫做a的象，a叫做b的原象。

4.一一映射：设A，B是两个集合，$f: A \to B$是从集合A到集合B的映射，如果在这个映射的作用下，对于集合A中的不同元素，在集合B中有不同的象，而且B中每一个元素都有原象，那么这个映射就叫做A到B上的一一映射。

5.逆映射：设$f: A \to B$是集合A到集合B上的一一映射，如果对于B中的每一个元素b，使b在A中的原象a和它对应，这样所得到的映射叫做映射$f: A \to B$的逆映射，

记作：f^{-1}：$B\to A$。

（1）f：$A\to B$与f^{-1}：$B\to A$互为逆映射.

（2）f^{-1}：$B\to A$也是一一映射.

（3）只有对于一一映射，我们才研究它的逆映射.

三、函数

1.定义：当集合A，B都是非空的数的集合，且B的每一个元素都有原象时，这样的映射f：$A\to B$就是定义域A到值域B上的函数.记作：$y=f(x)$。

（1）函数是由定义域、值域以及定义域到值域上的对应法则三部分组成的特殊映射.

（2）$f(a)$表示x在定义域内任取一个确定的值a时，对应的函数值.

2.函数通性的研究

（1）定义域：原象集合A.

（2）值域：象所在集合B.

（3）单调性：对于给定区间上的函数$f(x)$，如果对于属于这个区间上的任意两个自变量的值x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，那么就说$f(x)$在这个区间上是增函数；如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，那么就说$f(x)$在这个区间上是减函数.如果函数$y=f(x)$在某个区间上是增函数或减函数，就说$f(x)$在这一区间上具有（严格的）单调性，这一区间叫做$f(x)$的单调区间.

（4）奇偶性：对于函数$f(x)$，如果对于函数定义域内任意一个x，都有$f(-x)=-f(x)$，那么函数$f(x)$就叫做奇函数；如果对于函数定义域内任意一个x，都有$f(-x)=$

$f(x)$，那么函数$f(x)$就叫做偶函数。

（5）函数图象的对称性

①奇函数的图象关于原点成中心对称图形；反过来，如果一个函数的图象关于原点成中心对称图形，那么这个函数就是奇函数。

②偶函数的图象关于y轴成轴对称图形；反过来，如果一个函数的图象关于y轴成轴对称图形，那么这个函数是偶函数。

四、反函数

如果确定函数$y=f(x)$的映射f：$A\rightarrow B$是$f(x)$的定义域A到值域B上的一一映射，那么这个映射的逆映射f^{-1}：$B\rightarrow A$所确定的函数$x=f^{-1}(y)$叫做函数$y=f(x)$的反函数。

1.函数$y=f(x)$的定义域，值域分别是函数$x=f^{-1}(y)$的值域、定义域。

2.如果$y=f(x)$的反函数是$y=f^{-1}(x)$，那么显然函数$y=f^{-1}(x)$的反函数就是$y=f(x)$。

3.对于函数式$x=f^{-1}(y)$，习惯写做$y=f^{-1}(x)$。

4.原函数$y=f(x)$的图象和它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图象关于$y=x$对称。

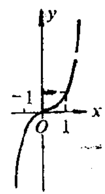
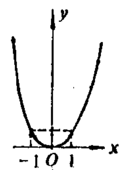
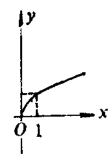
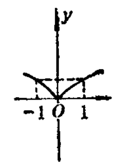
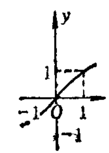
五、幂函数、指数函数和对数函数的图象和性质（表1-1，表1-2，表1-3）

六、指数方程与对数方程

1.指数方程的求解

（1）形如$a^x=b$（$a>0$，且$a\neq1$）的，采用取对数法。

表 1-1 幂　函　数

方　程	$y=x^r\left(r=\frac{p}{q}\right)$				
	$r>0$				
	$r>0$		$0<r<1$		
图象	r：奇数	r：偶数	q：偶数	q：奇数 p：偶数	q：奇数 p：奇数
					
	$y=x^3$	$y=x^2$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{\frac{2}{3}}$	$y=x^{\frac{1}{3}}$
定义域	$x\in R$	$x\in R$	$x\geqslant 0$	$x\in R$	$x\in R$
值　域	$y\in R$	$y\geqslant 0$	$y\geqslant 0$	$y\geqslant 0$	$y\in R$
单调性	$\nearrow$	$(-\infty,)\searrow$ $(0,+\infty)\nearrow$	$\nearrow$	$(-\infty,0)\searrow$ $(0,+\infty)\nearrow$	$\nearrow$
奇偶性	奇	偶	非奇非偶	偶	奇

续表1-1

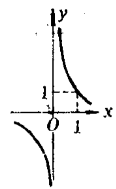
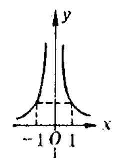
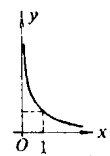
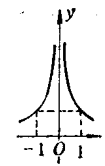
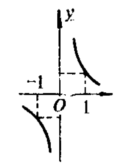
方程	$y=x^{r}\ \left(r=\frac{p}{q}\right)$				
	$r<0$				
	$\lvert r\rvert>1$		$\lvert r\rvert<1$		
图象	r: 奇数	r: 偶数	q: 偶数	q: 奇数 p: 偶数	q: 奇数 p: 奇数
					
	$y=x^{-1}$	$y=x^{-2}$	$y=x^{-\frac{1}{2}}$	$y=x^{-\frac{2}{3}}$	$y=x^{-\frac{1}{3}}$
定义域	$x\in R$ $x\neq0$	$x\in R$ $x\neq0$	$x>0$	$x\in R$但$x\neq0$	
值域	$y\in R$ $y\neq0$	$y>0$	$y>0$	$y>0$	$y\in R$ $y\neq0$
单调性	↘	$(-\infty,0)$ ↗ $[0,+\infty)$ ↘	↘	$(-\infty,0)$ ↗ $[0,+\infty)$ ↘	↘
奇偶性	奇	偶	非奇非偶	偶	奇

表 1-2 指数函数

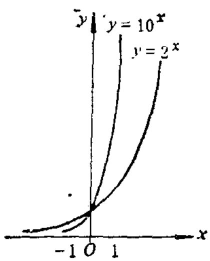
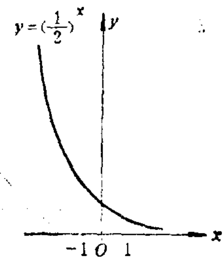
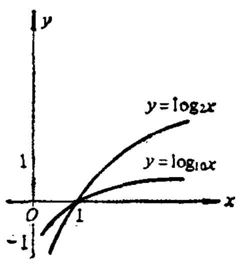
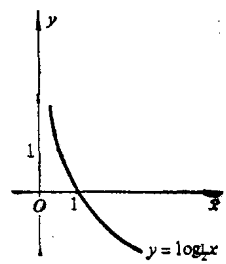
方程	$y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$	
	$a>1$	$0<a<1$
图象		
定义域	$x\in R$	
值域	$y>0$	
单调性	↗	↘
奇偶性	非奇非偶	
取值	$x>0$则$y>1$ $x<0$则$y<1$	$x>0$则$y<1$ $x<0$则$y>1$

表 1-3 对 数 函 数

<table>
<tr><td>方 程</td><td colspan="2">$y=\log_a x\,(a>0且a\neq 1)$</td></tr>
<tr><td>图 象</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>定义域</td><td colspan="2">$x>0$</td></tr>
<tr><td>值 域</td><td colspan="2">$y\in R$</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td>↗</td><td>↘</td></tr>
<tr><td>奇偶性</td><td colspan="2">非奇非偶</td></tr>
<tr><td>取 值</td><td>$x>1$则$y>0$
$x<1$则$y<0$</td><td>$x>1$则$y<0$
$x<1$则$y>0$</td></tr>
</table>

（2）形如$a^{f(x)}=b^{f(x)}$（$a>0$，且$a\neq 1$，$b>0$，且$b\neq 1$）的，采用取常用对数法．

（3）形如$a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$（$a>0$，且$a\neq 1$）的，采用比较指数法．

（4）形如$f(a^x)=0$的，采用换元法．

（5）精确度要求不高时，采用图象法．

（6）形如$a^x\pm b^x=c^x$（无常数项，$c\neq 0$）的，可同时除以c^x，后换元取对数．

（7）幂指型的，可采用取对数法，但要注意真数是否需要取绝对值．

（8）超越方程组的，可以取对数，化超越方程组为代数方程組．

2．对数方程的求解

（1）形如$\log_a x=b$（$a>0$，且$a\neq 1$）的，可以化对数方程为指数方程．

（2）形如$\log_a f(x)=\log_a\varphi(x)$（$a>0$，且$a\neq 1$）的，采用比较真数法．

（3）形如$f(\log_a x)=0$的，采用换元法或换底公式法．

（4）精确度要求不高时，采用图象法．

七、换底公式及其推论

1．$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$（$a>0$，且$a\neq 1$，$b>0$，且$b\neq 1$）．

2．$\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$（$a$，$b>0$且$a\neq 1$，$b\neq 1$）．