HuoXueQiaoLian

桂壮红皮书系列

●丛书主编/陈桂壮

活学巧练

名师讲义　权威学案

第2次修订

全国名校特高级教师联合编写

高二数学 上

北京大学出版社

桂壮红皮书系列
全国名校特高级教师联合编写

活学巧练

HUO XUE QIAO LIAN

高二数学（上）

第2次修订

丛书主编　陈桂壮
本册主编　张　宁
编　　委　杨庆臣　于　林　刘邦仁
　　　　　祝先志　刘云峰　张　宁

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

活学巧练.高二数学(上)/张宁主编.——北京:北京大学出版社,2005.5
(桂壮红皮书系列)
ISBN 7-301-06290-7

Ⅰ.活… Ⅱ.张… Ⅲ.数学课—高中—解题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 032045 号

书　　名:活学巧练·高二数学(上)
著作责任者:张宁 主编
策　　划:顾民永
责 任 编 辑:郑全科
标 准 书 号:ISBN 7-301-06290-7/G·0865
出版发行者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn　http://www.hps365.com
电　　话:邮购部 01062752015　发行部 62750672　51893513　编辑部 51893283
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn　cgz@hps365.com
排　版　者:北京科文恒信书业文化有限公司
版式设计者:国文制版(81429859)
印　刷　者:北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
经　销　者:新华书店
880 毫米×1230 毫米　大 16 开　11 印张　271 千字
2005 年 5 月第 3 版　2005 年 5 月第 1 次印刷
定　　价:14.80 元

致读者

学习目标要求

明确目标，有的放矢，让学生明确学习内容，了解学习要求。

重点难点突破

把握重点难点知识，提高学生解题能力，帮助学生分析总结。

思维能力拓展

例题示范，分析透彻精辟，拓展学生思路；跟踪练习，巩固重点难点，培养学生能力。

综合探究创新

融知识与能力于一体，强调知识联系，培养学生探究创新能力，学以致用。

误区障碍跨越

指点迷津，澄清心中疑点难点，扫清学习中的易错点、易混点、易漏点等障碍。

第六章 不等式

6.1 不等式的性质

学习目标要求

目标 1：理解不等式的性质.

目标 2：熟悉不等式性质定理的证明.

目标 3：通过定理的学习和性质的应用，培养学生逻辑推理论证的能力

重点难点突破

1. 不等式的基本性质

对于任意实数 a,b，有 $a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$，$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

注　意：这三条基本性质是差值比较法的理论依据.

例①(1)当 $a\neq 0$ 时，比较 $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$ 与 $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ 的大小；

(2)已知 $a,b\in\mathbf{R}$，比较 $a^2-2ab+2b^2$ 与 $2a-3$ 的大小；

分析：比较大小可以用作差法，先作差，再变形，直到能判断差的符号为止.

解答：(1) $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)-(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

$=[(a^2+1)^2-(\sqrt{2}a)^2]-[(a^2+1)^2-a^2]=-a^2<0$　$(\because a\neq 0)$

故 $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)<(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

(2)方法 1：$a^2-2ab+2b^2-(2a-3)=(a-b)^2+b^2-2a+3$

$=(a-b)^2-2(a-b)+b^2-2b+3=(a-b)^2-2(a-b)+(b-1)^2+2$

$=(a-b-1)^2+(b-1)^2+1>0$

$\therefore a^2-2ab+2b^2>2a-3$.

方法 2：令 $f(a)=a^2-2ab+2b^2-2a+3=a^2-(2b+2)a+2b^2+3$

$\because \Delta a=4(b+1)^2-4(2b^2+3)=-4[(b-1)^2+1]<0$，

由二次函数的性质知，$f(a)$ 恒大于 0.

即 $a^2-2ab+2b^2>2a-3$.

思维能力拓展

逻辑思维能力培养

例③适当增加条件，使下列命题成立：

(1) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow a<b$；(2) $ac^2>bc^2\Rightarrow a^2>b^2$.

分析：首先等价变形，再结合不等式性质成立的前提条件即可.

解答：$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$，

只有 $ab<0$ 时才有 $b-a>0$，得 $a<b$

$\therefore a<0<b$，故应增加条件 $a<0<b$.

(2)由 $ac^2>bc^2$ 可得 $a>b$，当 $b>0$ 时有 $a^2>b^2$.

故应增加条件 $b>0$.

拓展延伸　解这类开放性试题，要求我们深刻理解不等式的性质时一定要注意它们成立的条件.

跟踪练习① (2004 年春北京卷)已知三个不等式：$ab>0$，$bc-ad>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$(其中 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$)，用其中两个不等式作条件，余下的一个不等式作为结论组成一个命题，可组成的正确命题的个数是(　　)

A.0 个　　B.1 个　　C.2 个　　D.3 个

综合探究创新

考查知识应用

例⑤某厂使用两种零件 A,B 装配两种产品 X,Y，该厂的生产能力是月产 X 最多 2500 件，月产 Y 最多 1200 件，而组装一个 X，需要 4 个 A，2 个 B，组装一件 Y 需要 6 个 A，8 个 B.某个月，该厂能用的 A 最多有 14000 个，B 最多有 12000 个，已知产品 X 每件利润 1000 元，Y 每件利润 2000 元，欲使该月利润最高，需组装 X,Y 产品各多少件?最高利润为多少万元?

分析：本题属建模最优化的问题，题中条件多，数据多，要细心分析，从中抓住关键问题.

解答：设分别生产 X,Y 产品 x 件，y 件，则 $0\leqslant x\leqslant 2500$ 且 $0\leqslant y\leqslant 1200$.

由题意得 $\begin{cases}4x+6y\leqslant 14000,\\2x+8y\leqslant 12000,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+3y\leqslant 7000,\\x+4y\leqslant 6000,\end{cases}$

则该月产品的利润为：$1000x+2000y=1000(x+2y)$

设 $x+2y=\lambda(2x+3y)+k(x+4y)=(2\lambda+k)x+(3\lambda+4k)y$

所以 $\begin{cases}2\lambda+k=1\\3\lambda+4k=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{2}{5}\\k=\frac{1}{5}\end{cases}$

于是 $x+2y=\frac{2}{5}(2x+3y)+\frac{1}{5}(x+4y)\leqslant\frac{2}{5}\times 7000+\frac{1}{5}\times 6000=4000$.

当且仅当 $\begin{cases}2x+3y\leqslant 7000,\\x+4y\leqslant 6000,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=2000\\y=1000\end{cases}$ 时上式取等号，

此时 $1000(x+2y)=400$(万元).

答：欲使该月利润最高，需组装 X,Y 产品分别为 2000 件、1000 件.最高利润为 400 万元.

方法提炼　本题巧妙引入待定系数 k,λ，利用恒等求 k,λ 是关键.在后面学习中还可以利用线性规划一般方法求解.

误区障碍跨越

障碍点　在处理不等式问题时，常常会出现不是错误的错误，即自认为是错误

"桂壮红皮书系列"之高中同步用书，依据最新《教学大纲》和高考要求，组织全国名校一线专家和教研组长精心修订。栏目设置科学，内容选取精当，帮您取得最佳的学习效果。下面是本书的主要栏目，基本思路是：针对目标，讲清重点，突破难点；用典型示例，分层次提高能力，点拨技巧，扫清障碍，总结方法规律；最后设置巩固练习；章(单元)末另有总结。

不注意不等式成立的条件，忽略定理的充分与必要性，把非等价转化为等价转化.

方法规律总结

比较两个实数(式)的大小，一般用差比或商比两种方法，但要注意一般指数式比较大小用商比法、差比法与"0"比，商比法与"1"比；另外，赋值法常用于选择和填空题.

优化题型展示

1.(基础题)下列命题中正确的是(　　)　　←考查不等式性质.

A.若$|a|>b$，则$a^2>b^2$　　B.若$a>b>c$，则$(a-b)c>(b-a)c$

C.若$a>b$，$c>d$，则$a-c>b-d$　　D.若$a>b>0,c>d>0$，则$\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$

2.(提高题)设x,y,m,n为互不相等的正数，且$x+y=m+n$，$0<\sqrt{x}-\sqrt{y}<\sqrt{m}-\sqrt{n}$，则以下结论中正确的是(　　)　　←考查不等式性质.

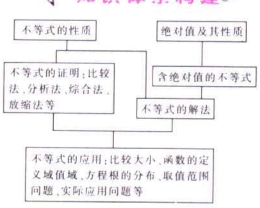
A.$xy>mn$，且$x>m>n>y$　　B.$xy>mn$，且$m>x>y>n$

C.$xy<mn$，且$x<m<n<y$　　D.$xy<mn$，且$m<x<y<n$

考查目标

本章回顾

知识体系构建



专题归纳整合

1.有关不等式双基的基本问题

这类题目形式很多，一般都是利用不等式的基本性质及基本不等式进行解题.

例1 已知实数a,b满足$a>b$，则①$\frac{b}{a}<1$；②$a^3>b^3$；③$a(1-b)>b(1-a)$；④$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；⑤$\lg(a-b)>0$；⑥$(\frac{1}{4})^a<(\frac{1}{4})^b$这六个式子中，恒成立的是(　　)

A.①②③　　B.③④⑤　　C.④⑤⑥　　D.②③⑥

分析：对于②，$\because a>b$，3是奇数，$\therefore a^3>b^3$.

对于③，$\because a>b$，$\therefore a-ab>b-ab$，即$a(1-b)>b(1-a)$.

对于⑥，$\because 0<\frac{1}{4}<1$，利用$y=(\frac{1}{4})^x$在$(-\infty,+\infty)$上是减函数.

又$\because a>b$，$\therefore (\frac{1}{4})^a<(\frac{1}{4})^b$，因此②③⑥是正确的.

对于①，若取$a=-1,b=-2$，便知$\frac{b}{a}<1$是错的.

对于④，只要取$a=1,b=-2$，便知$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$是错的.

对于⑤，如取$a=2,b=\frac{3}{2}$，便知$\lg(a-b)>0$也是错的.

解答：D

高考趋向导引

从近几年全国高考试题上看，有关不等式的试题每年一般是一道选择题或填空题和一道解答题. 解答题一般是解不等式和证明不等式.在近几年全国高考试题中，纯粹本章的试题分值占全卷总分的比率不算高，但在综合题的解题过程中处处分布着不等式的知识、方法与技巧，理科平均约为9%，文科约为7%.从近几年试卷上看，文科在不等式证明的要求比理科低，2003年全国理科第19题是一道不等式、集合、函数、绝对值等各个知识点融合起来的综合题，有典型性，分值为12分.可以预见未来的高考试题将更加突出对不等式的灵活性、综合性、应用性的考查.

素质能力测试

一、选择题

1.已知$A=\{x|x^2-1<0\}$，$B=\{x|x^2-3x<0\}$，则$A\cap B=$(　　)

A.$\{x|-1<x<1\}$　B.$\{x|0<x<3\}$　C.$\{x|0<x<1\}$　D.$\{x|-1<x<3\}$

方法规律总结

归纳方法，便于学生活学活用；总结规律，促进学生融会贯通，举一反三。

优化题型展示

精选题目，培养学生解题能力，夯实基础知识，促进学生的稳步提高。

知识体系构建

用图表结构梳理知识，展示知识内在联系，便于学生理解记忆，掌握知识体系的规律。

专题归纳整合

概念规律分专题总结，以例题形式进行讲解，疏通相关知识点。

高考趋向导引

回顾近年高考的规律，探究高考命题走向，预测未来高考题型。

素质能力测试

分层训练，巩固本章知识，考查学生知识掌握程度，提高学生综合素质，促进学生的全面发展。

目

录

桂壮红皮书系列丛书 GUIZHUANGHONGPISHU

Contents

第六章 不等式

6.1 不等式的性质

学习目标要求

目标1:理解不等式的性质.
目标2:熟悉不等式性质定理的证明.
目标3:通过定理的学习和性质的应用,培养学生逻辑推理论证的能力.

重点难点突破

1. 不等式的基本性质

对于任意实数 a、b,有 $a-b>0\Leftrightarrow a>b$;$a-b=0\Leftrightarrow a=b$,$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

注 意:这三条基本性质是差值比较法的理论依据.

例1 (1)当 $a\neq0$ 时,比较 $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$ 与 $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ 的大小;

(2)已知 $a,b\in\mathbf{R}$,比较 $a^2-2ab+2b^2$ 与 $2a-3$ 的大小;

分 析:比较大小可以用作差法,先作差,再变形,直到能判断差的符号为止.

解 答:(1)$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)-(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

$=[(a^2+1)^2-(\sqrt{2}a)^2]-[(a^2+1)^2-a^2]$

$=-a^2<0$ ($\because$ $a\neq0$).

故 $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)<(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

(2)方法1:$a^2-2ab+2b^2-(2a-3)$

$=(a-b)^2+b^2-2a+3$

$=(a-b)^2-2(a-b)+b^2-2b+3$

$=(a-b)^2-2(a-b)+(b-1)^2+2$

$=(a-b-1)^2+(b-1)^2+1>0$.

$\therefore$ $a^2-2ab+2b^2>2a-3$.

方法2:令 $f(a)=a^2-2ab+2b^2-2a+3$

$=a^2-(2b+2)a+2b^2+3$.

$\because$ $\Delta_a=4(b+1)^2-4(2b^2+3)=-4[(b-1)^2+1]<0$,

由二次函数的性质知,$f(a)$ 恒大于 0.

即 $a^2-2ab+2b^2>2a-3$.

2. 不等式的性质包括"单向性"和"双向性"两方面

单向性:

(1)$a>b,b>c\Rightarrow a>c$;

(2)$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$;

(3)$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$;

(4)$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$;

(5)$a>b>0,c>d\Rightarrow ac>bd$;

(6)$a>b>0,n\in\mathbf{R}_+\Rightarrow a^n>b^n$.

双向性:

(1)$a-b>0\Leftrightarrow a>b$,

$a-b=0\Leftrightarrow a=b$,

$a-b<0\Leftrightarrow a<b$;

(2)$a>b\Leftrightarrow b<a$;

(3)$a>b$,c 为整式$\Leftrightarrow a+c>b+c$.

点 拨:单向性主要用于证明不等式,双向性是解不等式的基础.

例2 判断下列各命题的真假.

(1)$a>b\Leftrightarrow ac^2>bc^2$;

(2)若 $a>b,c>d$,则 $ac>bd$;

(3)$a>b>1\Leftrightarrow a^n>b^n>1(n\in\mathbf{N}^*)$;

(4)$a>|b|\Rightarrow a>b$;

(5)$a<b<0\Rightarrow \dfrac{1}{a}-a>\dfrac{1}{b}-b$.

分 析:若命题正确,则利用不等式性质给予严格推理论证;若要判断命题是假命题,只要举出恰当的反例即可.

解 答:(1)若 $c=0$,则 $ac^2=bc^2$,故此命题为假命题.

(2)取 $a=3,b=2,c=-2,d=-3$,即 $3>2,-2>-3$,此时 $ac=bd$,故此命题为假命题.

(3)令 $a=-3,b=-2,n=2$,即 $(-3)^2>(-2)^2>1$.

此时 $a<b<1$,故此命题为假命题.

(4)$\because$ $|b|\geqslant b$,故 $a>|b|\geqslant b$,即 $a>b$.

故此命题为真命题.

(5)$\because$ $a<b<0$,$\therefore$ $-a>-b,ab>0$.

$\therefore$ $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$,$\therefore$ $\dfrac{1}{b}-b<\dfrac{1}{a}-a$.故此命题为真命题.

思维能力拓展

逻辑思维能力培养

例3 适当增加条件,使下列命题成立:

(1)$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}\Rightarrow a<b$;

(2)$ac^2>bc^2\Rightarrow a^2>b^2$.

分 析:首先等价变形,再结合不等式性质成立的前提条件即可.

解 答:$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}\Rightarrow\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}<0$,只有 $ab<0$ 时才有 $b-a>0$,得 $a<b$.

$\therefore$ $a<0<b$,故应增加条件 $a<0<b$.

(2)由 $ac^2>bc^2$ 可得 $a>b$,当 $b>0$ 时有 $a^2>b^2$.

故应增加条件 $b>0$.

拓展延伸 解这类开放性试题，要求我们深刻理解不等式的性质时一定要注意它们成立的条件.

跟踪练习 1 （2004年春北京卷）已知三个不等式：$ab>0$，$bc-ad>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$（其中$a,b,c,d\in\mathbf{R}$），用其中两个不等式作条件，余下的一个不等式作为结论组成一个命题，可组成的正确命题的个数是（ ）

A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 3个

例4 实数a,b,c,d满足下列三个条件：

①$d>c$；②$a+b=c+d$；③$a+d<b+c$

请将a,b,c,d按照从大到小的顺序排列，并证明你的结论.

分析：根据①②③可令$a=-1,b=4,d=3,c=0$，则$a<c<d<b$，则依据此大小依次判断.

解答：
$$\left.\begin{array}{l}\text{由③可得 } d-b<c-a\\ \text{由②得 } c-a=b-d\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}d-b<b-d\\ a-c<c-a\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}d<b\\ a<c\end{cases}\text{，由①式可得 } b>d>c>a.$$

拓展延伸 如果两两比较，一般要进行6次，利用特值法找到一个合理的程序，则可减少解题的层次和盲目性.

跟踪练习 2 已知$-\frac{1}{2}<a<0$，$A=1+a^2$，$B=1-a^2$，$C=\frac{1}{1+a}$，$D=\frac{1}{1-a}$，试将A、B、C、D按大小顺序排列.

综合探究创新

考查知识应用

例5 某厂使用两种零件A,B装配两种产品X,Y，该厂的生产能力是月产X最多2500件，月产Y最多1200件，而组装一个X，需要4个A，2个B，组装一件Y需要6个A，8个B.某个月，该厂能用的A最多有14000个，B最多有12000个，已知产品X每件利润1000元，Y每件利润2000元，欲使该月利润最高，需组装X,Y产品各多少件？最高利润为多少万元？

分析：本题属建模最优化的问题，题中条件多，数据多，要细心分析，从中抓住关键问题.

解答：设分别生产X,Y产品x件，y件，则$0\leqslant x\leqslant 2500$且$0\leqslant y\leqslant 1200$.

$$\text{由题意得}\begin{cases}4x+6y\leqslant 14000,\\ 2x+8y\leqslant 12000.\end{cases}\text{即}\begin{cases}2x+3y\leqslant 7000\\ x+4y\leqslant 6000.\end{cases}$$

则该月产品的利润为：$1000x+2000y=1000(x+2y)$

设$x+2y=\lambda(2x+3y)+k(x+4y)=(2\lambda+k)x+(3\lambda+4k)y$

$$\text{所以}\begin{cases}2\lambda+k=1\\ 3\lambda+4k=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{2}{5}\\ k=\frac{1}{5}\end{cases}$$

于是$x+2y=\frac{2}{5}(2x+3y)+\frac{1}{5}(x+4y)$

$\leqslant\frac{2}{5}\times 7000+\frac{1}{5}\times 6000=4000.$

$$\text{当且仅当}\begin{cases}2x+3y=7000\\ x+4y=6000\end{cases}\text{即}\begin{cases}x=2000\\ y=1000\end{cases}\text{时上式取等号，}$$

此时$1000(x+2y)=400$（万元）.

答：欲使该月利润最高，需组装X,Y产品分别为2000件、1000件.最高利润为400万元.

方法提炼 本题巧妙引入待定系数k,λ，利用恒等求k,λ是关键.在后面学习中还可以利用线性规划一般方法求解.

跟踪练习 3 某电脑用户计划使用不超过500元的资金购买单价为60元的单片软件和单价为70元的盒装磁盘，根据需要，软件至少买3片，磁盘至少买2盒，则不同的选购方式共有（ ）

A. 5种 B. 6种 C. 7种 D. 8种

误区障碍跨越

障碍点 在处理不等式问题时，常常会出现不是错误的错误，即自认为是错误

不注意不等式成立的条件，忽略定理的充分与必要性，把非等价转化为等价转化.

方法规律总结

比较两个实数（式）的大小，一般用差比或商比两种方法，但要注意一般指数式比较大小用商比法、差比法与“0”比，商比法与“1”比；另外，赋值法常用于选择和填空题.

跟踪练习答案

1. D 2. $C>A>B>D$ 3. C

优化题型展示

考查目标

一、选择题

1.（基础题）下列命题中正确的是（ ）

A. 若$|a|>b$，则$a^2>b^2$

B. 若$a>b>c$，则$(a-b)c>(b-a)c$

C. 若$a>b,c>d$，则$a-c>b-d$

D. 若$a>b>0,c>d>0$，则$\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$

←考查不等式性质.

2.（提高题）设x,y,m,n为互不相等的正数，且$x+y=m+n$，$0<\sqrt{x}-\sqrt{y}<\sqrt{m}-\sqrt{n}$，则以下结论中正确的是（ ）

←考查不等式性质.

A. $xy>mn$，且 $x>m>n>y$　　B. $xy>mn$，且 $m>x>y>n$

C. $xy<mn$，且 $x<m<n<y$　　D. $xy<mn$，且 $m<x<y<n$

3.（基础题）若 a,b 是任意实数，且 $a>b$，则（　　）　　←考查不等式性质.

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$　　D. $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

4.（基础题）设 x,y 为实数，则 $\begin{cases}2<x+y<4\\0<xy<3\end{cases}$ 是 $\begin{cases}0<x<1\\2<y<3\end{cases}$ 成立的（　　）　　←考查不等式性质.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分且必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5.（基础题）已知 $a^2<x<a$，$M=\log_a x^2$，$N=\log_2(\log_a x)$，$P=(\log_a x)^2$，则（　　）　　←考查不等式应用.

A. $M>N>P$　　B. $P>M>N$　　C. $M>P>N$　　D. $N>M>P$

6.（基础题）$a\in\mathbf{R}$，且 $a^2+a<0$，则下面式子正确的是（　　）　　←考查不等式性质.

A. $a^2>a>-a^2>-a$　　B. $-a>a^2>-a^2>a$

C. $-a>a^2>a>-a^2$　　D. $a^2>-a>a>-a^2$

7.（提高题）若 $a>0$ 且 $a\neq1$，$p=\log_a(a^3+1)$，$q=\log_a(a^2+1)$，则 p,q 的大小关系为（　　）　　←考查不等式应用.

A. $p<q$　　B. $p\leqslant q$　　C. $p>q$　　D. $p\geqslant q$

8.（基础题）若 $m<n$，$p<q$，且 $(p-m)(p-n)<0$，$(q-m)(q-n)<0$，则 m,n,p,q 的大小顺序是（　　）　　←考查不等式性质.

A. $m<p<q<n$　　B. $p<m<q<n$

C. $m<p<n<q$　　D. $p<m<n<q$

9.（提高题）若 $-1<\alpha<\beta<1$，则下面各式中恒成立的是（　　）　　←考查不等式性质.

A. $-2<\alpha-\beta<0$　　B. $-2<\alpha-\beta<-1$

C. $-1<\alpha-\beta<0$　　D. $-1<\alpha-\beta<1$

10.（提高题）设 $x,y\in\mathbf{R}$，$0<xy<1$，$0<x+y<1+xy$，则 x,y 满足（　　）　　←考查不等式性质.

A. $x>1,y>1$　　B. $0<x<1,0<y<1$

C. $0<x<1,y>1$　　D. $x>1,0<y<1$

二、填空题

11.（基础题）设 $a>b>0$，$c>0$，$d>0$，则 $\frac{b}{a},\frac{a}{b},\frac{b+c}{a+c},\frac{a+d}{b+d}$ 之间的大小关系是________.　　←考查不等式性质.

12.（探究题）设 $a>5$，则 $\sqrt{a-3}-\sqrt{a-4}$ 与 $\sqrt{a-4}-\sqrt{a-5}$ 的大小关系是________.　　←考查不等式性质.

13.（提高题）给出下列三个不等式：①$ab>0$；②$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$；③$bc>ad$.　　←考查不等式应用.

以其中两个作条件，余下一个作结论，则可组成________个正确命题.

14.（基础题）已知实数 a、b 满足 $a>b$，则在“①$\frac{b}{a}<1$；②$a^3>b^3$；③$a(1-b)>b(1-a)$；④$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；⑤$\lg(a-b)>0$；⑥$(\frac{1}{4})^a<(\frac{1}{4})^b$”这六个式子中，恒成立的是________.　　←考查不等式应用.

三、解答题

15.（探究题）设 $f(x)=ax^2+c$，且 $-3\leqslant f(-1)\leqslant1$，$-2\leqslant f(2)\leqslant3$，求 $f(3)$ 的最大值与最小值.　　←考查不等式应用.

16.（提高题）已知 a,b 为不相等的正数，且 $a^3-b^3=a^2-b^2$. 求证：$1<a+b<\frac{4}{3}$.　　←考查不等式性质.

17.（探究题）设 $a>0,b>0,a\neq b,n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\neq1$，比较 a^n+b^n 与 $a^{n-1}b+ab^{n-1}$ 的大小.　　←考查不等式性质推广.

18.（综合题）已知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，$a,b\in\mathbf{R}$.　　←考查不等式综合应用.

(1)求证：如果 $a+b\geqslant0$，那么 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$；

(2)判断(1)中命题的逆命题是否成立？并证明你的结论.

6.2 算术平均数与几何平均数

学习目标要求

目标1:能利用不等式的性质推导出平均值不等式的两个重要定理:

(1)$a,b\in\mathbf{R}\Rightarrow a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号)

(2)$a,b\in\mathbf{R}_+\Rightarrow\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

目标2:能了解平均值不等式的几何模型的构造及相应的几何解释.

目标3:能熟练运用平均值及推论证明不等式,求解有关函数的最值.

重点难点突破

1. 重要不等式,算术平均数与几何平均数定理

重要不等式:如果 $a,b\in\mathbf{R}$,那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$时取"="号)

均值不等式:如果 a,b 是正数,那么$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号)

注 意:(1)两个不等式成立的条件是不同的,前者 a,b 都是实数,后者则要求 a,b 都是正数.

(2)两个不等式都是带有"="成立的条件,当且仅当 $a=b$ 时取"="号,这句话的含义是"$a=b$"是"="成立的充要条件,这一点至关重要,忽略它,往往会导致解题的失败,以后我们会有体会.

(3)定理中的 a,b 可以是数字,也可以是较复杂的代数式.

例1 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$ 且 $a+b+c=1$.

求证:$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqslant 8$.

分 析:不等式右边数字为8,使我们联想到左边因式分别用均值不等式可得三个"2"连乘,又 $\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}$,可由此变形入手.

解 答:$\because a,b,c\in\mathbf{R}_+,a+b+c=1$.

$\therefore \frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}$.

同理:$\frac{1}{b}-1\geqslant\frac{2\sqrt{ac}}{b}$,$\frac{1}{c}-1\geqslant\frac{2\sqrt{ab}}{c}$.

$\therefore \left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqslant 8$.

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时取等号.

2. 利用均值不等式求函数的最大值、最小值

已知 x,y 都是正数,则

(1)如果积 xy 是定值 P,那么当 $x=y$ 时,和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$;

(2)如果和 $x+y$ 是定值 S,那么当 $x=y$ 时,积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$.

注 意:(1)函数式中的相关项,必须都是正数;

(2)所求函数式中,含变数的各项的和或积必须是常数;

(3)具有等号成立的条件.

例2 (1)求函数 $y=\frac{1}{x-3}+x(x>3)$ 的最小值.

(2)设 $x<-1$,求 $f(x)=\frac{(x+5)(x+2)}{x+1}$ 的最大值.

分 析:(1)因 $\frac{1}{x-3}\times x$ 不是常数,故对 x 进行"配凑"使其积为常数.

(2)本题中求 $f(x)$ 可以使用判别式求最大值,但由于 $x<-1$,比较复杂,由 $-(x+1)>0$ 可以考虑能否转化应用均值不等式.

解 答:(1)$y=\frac{1}{x-3}+x=\frac{1}{x-3}+x-3+3$

$\because x>3,\therefore \frac{1}{x-3}>0,x-3>0$.

$\therefore y\geqslant 2\sqrt{(x-3)\cdot\frac{1}{x-3}}+3=5$.

当且仅当 $\frac{1}{x-3}=x-3$,即 $x=4$ 时,y 有最小值5.

(2)$\because x<-1,\therefore -(x+1)>0$.

$$\therefore f(x)=\frac{(x+5)(x+2)}{x+1}=\frac{x^2+7x+10}{x+1}$$

$$=\frac{(x+1)^2+5(x+1)+4}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}+5$$

$$=-\left[-(x+1)+\frac{4}{-(x+1)}\right]+5$$

$$\leqslant -2\sqrt{(-x-1)\cdot\frac{4}{-(x+1)}}+5=1.$$

当且仅当 $-(x+1)=\frac{4}{-(x+1)}$ 即 $x=-3$ 时取等号,$f(x)$ 有最大值1.

思维能力拓展

1. 重要不等式的应用

例3 设 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$,求证:$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

分 析:本题关键在于对 $\sqrt{a^2+b^2}$,$\sqrt{b^2+c^2}$,$\sqrt{c^2+a^2}$ 的处理,如果能找出 a^2+b^2 与 $a+b$ 之间的关系,问题便可解决,注意到 $a^2+b^2\geqslant 2ab\Rightarrow 2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2\Rightarrow\sqrt{2(a^2+b^2)}$

$\geqslant a+b$，则证明问题的思路就明朗了.

证 明：$\because a^2+b^2\geqslant 2ab$，$\therefore 2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$.

于是 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}|a+b|=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

同理：$\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$，$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+c)$.

三式相加得：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$，当且仅当 $a=b=c$ 时，取等号.

拓展延伸 (1)本题用了常见结论 $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，记住这一结论可帮我们找到解题思路，但此不等式要给予证明.

(2)一般的数学中的定理、公式揭示了若干量之间的本质联系，但不能定格于某种特殊形式，因此重要不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 的形式可以是 $a^2\geqslant 2ab-b^2$，也可以是 $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$，还可以是 $a+\frac{b^2}{a}\geqslant 2b(a>0)$，$\frac{b^2}{a}\geqslant 2b-a$ 等.解题时不仅要利用原来的形式，而且要掌握它的几种变形形式以及公式的逆用等，以便应用.

(3)当且仅当 $a=b=c$ 时，取"="号.若三个式中有一个"="号取不到，则三式相加所得的式子中"="号取不到.

跟踪练习 1 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant ac+ab+bc$.

2. 逻辑思维能力的培养

例4 (1)已知 $x<\frac{5}{4}$，求函数 $y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值.

(2)已知 $x\in\mathbf{R}_+$，求 $y=\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}$ 的最小值.

分 析：(1)因 $4x-5<0$，故首先要"调整"符号，又 $(4x-2)\cdot\frac{1}{4x-5}$ 不是常数，故对 $4x-2$ 要进行拆(添)项"配凑"，使其积为常数.

(2)令 $t=\frac{x^2+1}{x}$，则 $y=t+\frac{1}{t}$ 运用均值不等式，但等号条件不成立，故先求 t 的范围，再研究函数 $y=t+\frac{1}{t}$ 的单调性.

解 答：(1)$\because x<\frac{5}{4}$，$\therefore 5-4x>0$.

$\therefore y=4x-2+\frac{1}{4x-5}=-\left[(5-4x)+\frac{1}{5-4x}\right]+3\leqslant -2\sqrt{(5-4x)\cdot\frac{1}{5-4x}}+3=1$.

当且仅当 $5-4x=\frac{1}{5-4x}$，即 $x=1$ 时等号成立.

故当 $x=1$ 时，$y_{\max}=1$.

(2)令 $t=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}=2$，

当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时等号成立，所以 $t\geqslant 2$.

下面证明：$y=t+\frac{1}{t}(t\geqslant 2)$ 是增函数.

任取 $2\leqslant t_1<t_2$，则

$y_1-y_2=t_1+\frac{1}{t_1}-\left(t_2+\frac{1}{t_2}\right)$

$=(t_1-t_2)+\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}=(t_1-t_2)\left(1-\frac{1}{t_1t_2}\right)<0$，

所以 $y_1<y_2$.

所以函数 $y=t+\frac{1}{t}$，当 $t\geqslant 2$ 时是增函数，

从而 $y\geqslant 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，所以 $y_{\min}=\frac{5}{2}$.

拓展延伸 (1)"配凑"、"调整符号"使其满足应用均值不等式求最值是常用的技巧.

(2)当满足前两个条件，而等号不成立，此时应通过研究函数 $y=t+\frac{a^2}{t}$ 的单调性来解决问题.

跟踪练习 2 (1)求函数 $y=\frac{1}{x-3}+x(x>3)$ 的最小值；

(2)求函数 $y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值.

综合探究创新

算术平均数与几何平均数的应用

例5 商店经销某种商品，年销量为 D(件)，每件商品的库存费用为 I，每批进货量为 Q(件)，每次进货所需费用为 S.现假设商店在卖完每批商品时立即进货，使库存量为平均 $\frac{Q}{2}$(件)，问每批进货量 Q 为多大时，全年总费用最省？

分 析：全年费用 T 由进货费用和库存费用组成，如果每批进货量 Q 增大，那么进货次数减少，可以减少进货费用，但是平均库存量增大，使库存费用增大；如果每批进货量 Q 减少，那么平均库存量减少，可以减少库存费用，但进货次数增多，使进货费用增大，这些费用变量之间的相互依赖关系，可以以 Q 为自变量，建立全年费用 T 为函数的数学模型.

解 答：由题设知，库存费用为 $\frac{Q}{2}\cdot I$，每年进货次数为 $\frac{D}{Q}$，进货费用为 $\frac{D}{Q}\cdot S$，$\therefore T=\frac{QI}{2}+\frac{DS}{Q}\quad(0<Q\leqslant D)$.

利用算术平均数与几何平均数定理求 T 的最小值：

$T=\frac{QI}{2}+\frac{DS}{Q}\geqslant 2\sqrt{\frac{QI}{2}\cdot\frac{DS}{Q}}=\sqrt{2IDS}$.

当且仅当 $\frac{QI}{2}=\frac{DS}{Q}$ 即 $Q=\sqrt{\frac{2DS}{I}}$(件)时，全年总费用最省，为 $\sqrt{2IDS}$.

拓展延伸 解应用题应注意两个问题：一是建模问题，即通过建立一定的数学模型，把应用题转化为单纯的数学问题，二是建模后求解问题，即如何用相关的数学知识将其解答出来.

跟踪练习 3 如图 6-2-1，电路中电源的电动势为 E，内阻为 r，R_1 为固定电阻，求可变电阻 R_2 调至何值时，它所消耗的电功率最大，其最大功率是多少？

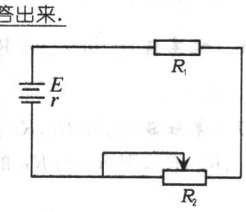


图 6-2-1

误区障碍跨越

障碍点 "一正二定三相等"的应用

不等式等号成立的条件很重要，但易忽视.在使用均值不等式定理求最值时，必须考查等号成立的条件是否具备，否则就可能出现错误.

方法规律总结

在利用均值不等式解题时,要注意"一正二定三相等"的应用及多个不等式等号成立的一致性.

跟踪练习答案

1. 证明:$a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时,取"=")

$b^2+c^2\geqslant 2bc$(当且仅当 $b=c$ 时取"=")

$c^2+a^2\geqslant 2ac$(当且仅当 $c=a$ 时取"=")

以上三式相加得,$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca)$

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$.(当且仅当 $a=b=c$ 时取"=").

2. (1)解:原式配凑成 $y=\frac{1}{x-3}+x-3+3$,由 $x>3$,

$\therefore x-3>0,\frac{1}{x-3}>0,\therefore\ y\geqslant 2\sqrt{(x-3)\cdot\frac{1}{x-3}}+3=5$.

当且仅当$\frac{1}{x-3}=x-3$,即 $x=4$ 时,y 有最小值为 5.

(2)解:令 $t=\sqrt{x^2+4}$,则 $t\geqslant 2$. $\therefore\ y=t+\frac{1}{t}(t\geqslant 2)$,此时应利用函数的单调性解,$\because\ y=t+\frac{1}{t}$ 在 $t\geqslant 1$ 时为增函数,故当 $t=2$ 时,即 $x=0$ 时,函数取最小值为$\frac{5}{2}$.

3. 解:由电学公式,电功率 $P=UI$,有 $P_2=U_2I_2=\frac{U_2(E-U_2)}{R_1+r}$,$U_2(E-U_2)\leqslant\left[\frac{U_2+E-U_2}{2}\right]^2=\frac{E^2}{4}$.

$\therefore$ 当且仅当 $U_2=E-U_2$ 即 $E=2U_2$ 时,P_2 达到最大值,在 $E=2U_2$ 时,有 $2R_2=r+R_1+R_2$ 即 $R_2=r+R_1$ 时,消耗的功率最大,最大电功率为$\frac{E^2}{4(r+R_1)}$.

优化题型展示

考查目标

一、选择题

1.(基础题)设 a,b 是不相等的正数,则(　　)　　←考查均值不等式.

A. $\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$　　B. $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

C. $\sqrt{ab}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<\frac{a+b}{2}$　　D. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$

2.(提高题)若 $0<x<1,0<y<1$,则在 $x+y,x^2+y^2,2xy,2\sqrt{xy}$中,最大的一个是(　　)　　←考查均值不等式.

A. $2xy$　　B. $x+y$　　C. $2\sqrt{xy}$　　D. x^2+y^2

3.(基础题)已知 $x>1,y>1$,且 $\lg(xy)=4$,则 $\lg x\cdot\lg y$ 的最大值是(　　)　　←考查均值不等式.

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. $\frac{1}{4}$

4.(提高题)若 $a>0$ 且 $a\neq 1$,$M=(1+a^n)(1+a)^n$,$N=2^{n+1}\cdot a^n$,$(n\in\mathbf{N}^*)$,则 M,N 之间的大小关系是(　　)　　←考查均值不等式.

A. $M>N$　　B. $M<N$　　C. $M=N$　　D. M,N 大小关系不确定

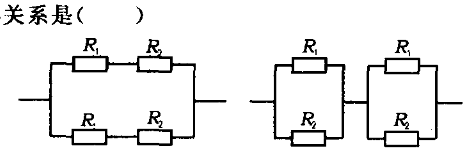
5.(创新题)一直角三角形周长为 $2p$,其斜边长的最小值为(　　)　　←考查基本不等式.

A. $\frac{2p}{\sqrt{2}+1}$　　B. $\frac{2p}{\sqrt{2}-1}$　　C. $\frac{2p}{3+\sqrt{3}}$　　D. $\frac{2p}{3-\sqrt{3}}$

6.(提高题)已知 $x,y\in\mathbf{R}_+$,且 $x+4y=1$,则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为(　　)　　←考查均值不等式.

A. 8　　B. 4　　C. 9　　D. 2

7.(基础题)已知 R_1,R_2 是阻值不同的两个电阻,现分别按图 6-2-2 中(1)、(2)连接,设相应的总阻值分别为 R_A,R_B,则 R_A 与 R_B 的大小关系是(　　)　　←考查均值不等式应用.



(1)　　(2)

图 6-2-2

A. $R_A>R_B$　　B. $R_A=R_B$　　C. $R_A<R_B$　　D. 不能确定

8.(提高题)当 $x\in\mathbf{R}^+$ 时,下列函数中最小值为 2 的是(　　)　　←考查均值不等式.

A. $y=x^2-2x+4$　　B. $y=x+\frac{16}{x}$

C. $y=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$　　D. $y=x+\frac{1}{x}$

9.(创新题)在区间$[-4,-1]$上,函数$f(x)=-x^2+px+q$与函数$g(x)=x+\frac{4}{x}$同时取得相同的最大值,那么函数$f(x)$在区间$[-4,-1]$上的最小值为(　　)　　←考查不等式综合.

A. -10　　B. -5　　C. -8　　D. -32

10.(基础题)若$a>b>1$,$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$,$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$,$R=\lg(\frac{a+b}{2})$,则下列不等式成立的是(　　)　　←考查均值不等式.

A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$　　C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

二、填空题

11.(基础题)已知$\lg(x^2+1)+\lg(y^2+4)=\lg x+\lg y+\lg 8$,则$x=$______,$y=$______.　　←考查均值不等式.

12.(基础题)当$x<0$时,函数$y=3x+\frac{1}{2x}$的最大值是______.　　←考查均值不等式.

13.(基础题)甲、乙两人在每一个月里,总是相约到一家小店里去买三次白糖,假设白糖的价格是变化的,而他们的购买方式又不一样,甲每一次总是买1千克白糖,乙每一次只拿1元钱来买糖,而不管买多少,试问这两种买糖的方式哪一种合算?答:______.　　←考查不等式应用.

14.(探究题)某工厂年产值第二年比第一年增长的百分率为p_1,第三年比第二年增长的百分率为p_2,若p_1+p_2为定值,则年平均增长率的百分率p的最大值为______.　　←考查不等式应用.

三、解答题

15.(基础题)已知:正数a,b满足$a+b=1$.　　←考查基本不等式及均值不等式.

求证:(1)$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 4$,$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 8$;

(2)$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$,$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leqslant 2\sqrt{2}$;

(3)$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}$.

16.(提高题)在某两个正数x,y之间,若插入一个正数a,使x,a,y成等比数列;若另插入两个数b,c,使x,b,c,y成等差数列.求证:$(a+1)^2\leqslant(b+1)(c+1)$.　　←考查不等式综合.

17.(应用题)某商店经销某种洗衣粉,年销售总量为6000包,每包进价2.8元,销售价3.4元,全年分若干次进货,每次进货均为x包,已知每次进货运输劳务费为62.5元,全年保管费为$1.5x$元.　　←考查不等式应用.

(1)把该商店经销洗衣粉一年的利润y(元)表示为每次进货量x(包)的函数,并指出函数的定义域;

(2)为了使利润最大,每次应该进货多少包?

18.(创新题)如图6-2-3所示,$\triangle ABC$中,BC边上有一动点P,由P引AB,AC的垂线,垂足分别为M,N,求使$\triangle MNP$面积最大时点P的位置.　　←考查不等式应用.

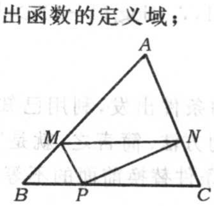


图 6-2-3

6.3 不等式的证明(一)

学习目标要求

目标1:掌握比较法的证明思路,能够利用作差法和作商法证明不等式.

目标2:了解综合法的意义,熟悉综合法证明不等式的步骤和方法.

目标3:掌握分析法证明不等式的方法和步骤,能够用分析法来证明一些复杂的不等式.

重点难点突破

1. 比较法

我们已经知道,$a-b>0\Leftrightarrow a>b$,$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.因此,要证明$a>b$,只要证明$a-b>0$;要证明$a<b$,只要证明$a-b<0$.这种证明不等式的方法,在上两节中实际上已经使用过,通常叫做比较法.

点拨:比较法是不等式证明的最基本、最重要的方法.

例1 $a>0$,且$a\neq 1$,$0<x<1$,求证:$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

分 析一：平方后作差给对数运算带来了可行性，便于运用对数的性质判断差的符号.

解 答：平方后作差 $\log_a^2(1-x)-\log_a^2(1+x)$

$=[\log_a(1-x)+\log_a(1+x)]\cdot[\log_a(1-x)-\log_a(1+x)]$

$=\log_a(1-x^2)\cdot\log_a\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

当 $a>1$ 时，$\log_a(1-x^2)<0$，$\log_a\frac{(1-x)}{(1+x)}<0$，

$\therefore\ \log_a^2(1-x)-\log_a^2(1+x)>0$，

即 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$，

当 $0<a<1$ 时，同理成立.

分 析二：利用换底公式将以 a 为底的对数换成以 10 为底的对数，进而作差比较.

解 答：$\because\ 0<x<1$，$\therefore\ \lg(1-x)<0$，$\lg(1+x)>0$，

$\lg(1-x^2)<0$，$\therefore\ |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$=\frac{|\lg(1-x)|}{|\lg a|}-\frac{|\lg(1+x)|}{|\lg a|}$

$=\frac{1}{|\lg a|}\cdot[-\lg(1-x)-\lg(1+x)]$

$=-\frac{[\lg(1-x^2)]}{|\lg a|}>0$.

分 析三：观察被证明不等式，发现不等式的两端均用绝对值表示，其值均为正数，因此可用作商法来比较大小.

解 答：$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=|\log_{(1+x)}(1-x)|$，

$\because\ 1+x>1$，$0<1-x<1$，

$\therefore$ 原式 $=-\log_{(1+x)}(1-x)=\log_{(1+x)}\frac{1}{1-x}$

$=\log_{(1+x)}\frac{1+x}{1-x^2}=1-\log_{(1+x)}(1-x^2)$.

$\because\ 0<1-x^2<1$，$1+x>1$，$\therefore\ \log_{(1+x)}(1-x^2)<0$，

$\therefore\ \frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}>1$，$\therefore\ |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

2. 综合法

综合法就是由已知条件出发，利用已知不等式和不等式的性质来推证不等式的方法. 简言之，就是“由因导果”. 其推理过程是：不断用必要条件替换前面的不等式，直至推出欲证结论.

> **解 读**：综合法是证明不等式的最基本最常用的方法. 由已知条件或一些重要不等式作为基础，利用不等式的性质推出所要证明的不等式，不等式证明多直接采用综合法，但是对于比较复杂的不等式的证明，需要结合分析法等其他方法及技巧才能完成.

例2 若 $x+y+z=1$，证明不等式 $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$.

分 析：本题是“和＞数”型不等式，一般可直接运用均值不等式.

解 答：$3(x^2+y^2+z^2)=x^2+y^2+z^2+(x^2+y^2+z^2)+(x^2+y^2+z^2)\geqslant x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

$=(x+y+z)^2=1$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$.

3. 分析法

分析法就是从欲证不等式出发，不断运用充分条件替换前面的不等式，直至归出已知(或显然成立的)不等式的方法. 简言之，就是“执果索因”. 因此，分析法也被称为“逆求法”.

> **注 意**：比较综合法有何异同.

例3 设 $a>0$，$b>0$，求证：

$a+b\geqslant2\sqrt{ab}+\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$.

分 析：直接运用定理证明，无法完成；用分析法对待欲证的不等式，实施等价变换，显示其结构的本质特征.

解 答：为了证明 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}+\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$，

只需证明：$(a+b-2\sqrt{ab})\cdot2(a+b)\geqslant(a-b)^2$，

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\cdot2(a+b)\geqslant[(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})]^2$，

即证：$2(a+b)\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$，展开得：$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$.

$\because\ a+b\geqslant2\sqrt{ab}$ 成立，$\therefore\ a+b\geqslant2\sqrt{ab}+\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$ 成立.

思维能力拓展

重要不等式的应用

例4 若 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，求证：$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

分 析：如何将不等式左边的每个根式缩小呢？注意到每个根号里的分式的分子与分母的和分别为 $a+b+c$，$2(a+b+c)$，而右边是常数 2，试着将根式 $\sqrt{\frac{a}{b+c}}$ 缩小为 $\frac{2a}{a+b+c}$.

解 答：$\because\ (b+c-a)^2\geqslant0$，$\therefore\ (a+b+c)^2\geqslant4a(b+c)$，

$\therefore\ \frac{1}{b+c}\geqslant\frac{4a}{(a+b+c)^2}$，

即 $\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geqslant\frac{2a}{a+b+c}$，$b+c=a$ 时取“＝”；

同理，$\sqrt{\frac{b}{a+c}}\geqslant\frac{2b}{a+b+c}$，$a+c=b$ 时取“＝”；

$\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geqslant\frac{2c}{a+b+c}$，$a+b=c$ 时取“＝”；

$\therefore\ \sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}$

$\geqslant\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}=2$.

但上面三个不等式中的等号不能同时成立，否则 $a+b+c=0$ 与 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$ 矛盾，

$\therefore\ \sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

拓展延伸 如果由根式想到利用定理，就无法证明. 有时根据不等式的结构特征，大胆猜想或许能找到解题的途径.

跟踪练习 1 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ 且 $a+b+c=1$，求证：$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leqslant\sqrt{21}$.

例5 已知函数 $f(x)=\lg\left(\frac{1}{x}-1\right)$，$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，若 $x_1,x_2\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$x_1\neq x_2$，求证：$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

分 析：要证明上述不等式，只需证明

$\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)>\left(\frac{2}{x_1+x_2}-1\right)^2$. 可考虑作差比较.

解 答：∵ $0<x_1, x_2<\frac{1}{2}$ 且 $x_1\neq x_2$,

$$\therefore \left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)-\left(\frac{2}{x_1+x_2}-1\right)^2$$
$$=\frac{1}{x_1x_2}-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}-\frac{4}{(x_1+x_2)^2}+\frac{4}{x_1+x_2}$$
$$=\frac{(x_1-x_2)^2(1-x_1-x_2)}{x_1x_2(x_1+x_2)^2}>0,$$
$$\therefore \left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)>\left(\frac{2}{x_1+x_2}-1\right)^2,$$
$$\therefore \lg\left[\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\right]>\lg\left(\frac{2}{x_1+x_2}-1\right)^2,$$

故 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

拓展延伸 分析法宜于思考，综合法宜于表述，两者结合，效果甚佳.

综合探究创新

多种证明不等式方法及综合知识整合

例6 已知 $a>b>0$，求证：$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$.

分 析：本题可运用作差法、作商法、综合法及分析法加以证明.

解 答：**证法1**（作商法）：

$$\frac{\frac{(a-b)^2}{8b}}{\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}}=\frac{2(a-b)^2}{8b(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4b}=\frac{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+1\right)^2}{4}.$$

因为 $a>b>0$，所以 $\frac{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+1\right)^2}{4}>1$,

所以 $\frac{\frac{(a-b)^2}{8b}}{\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}}>1$，即 $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$.

同理可证：$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$.

证法2（分析法）：

欲证 $\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$,

只需证：$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}<\frac{(a-b)^2}{8b}$,

只需证：$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8a}<\frac{1}{2}<\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8b}$,

即证：$\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2<4<\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$,

即证：$\sqrt{\frac{b}{a}}<1<\sqrt{\frac{a}{b}}$.

又 $a>b>0$，所以上式恒成立.

证法3：综合法：由分析法证明反推即为综合法.

证法4：作差法类似于作商法，不赘述.

拓展延伸 以上各证法方法各异，但殊途同归. 分析法反推即为综合法.

跟踪练习 2 （2003年北京卷）设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[-1,1]$ 上的函数，且满足条件：① $f(-1)=f(1)=0$. ②对任意的 $u, v\in[-1,1]$，都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|$.

(1)证明：对任意 $x\in[-1,1]$，都有 $x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x$;

(2)证明：对任意 $u, v\in[-1,1]$，都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant 1$.

误区障碍跨越

障碍点　在不等式的证明过程中，要严格按各种方法的步骤要求去做

如用综合法证明不等式时，对不等式放缩不当或选用公式不妥，更主要的错误是忽略了不等式加、乘所满足的条件，从而错误地应用不等式的性质.

跟踪练习答案

1. ∵ $\sqrt{4a+1}\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}\leqslant\frac{4a+1+\frac{7}{3}}{2}=2a+\frac{5}{3}$,

∴ $\sqrt{4a+1}\leqslant\sqrt{\frac{3}{7}}\left(2a+\frac{5}{3}\right)$

同理 $\sqrt{4b+1}\leqslant\sqrt{\frac{3}{7}}\left(2b+\frac{5}{3}\right)$，$\sqrt{4c+1}\leqslant\sqrt{\frac{3}{7}}\left(2c+\frac{5}{3}\right)$

三式相加得 $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leqslant\sqrt{\frac{3}{7}}\left(2a+2b+2c+3\times\frac{5}{3}\right)=\sqrt{21}$

当且仅当 $4a+1=4b+1=4c+1=\frac{7}{3}$,

即 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时取“=”号.

2. (1)证明：由题设条件可知：当 $x\in[-1,1]$ 时有 $|f(x)|=|f(x)-f(1)|\leqslant|x-1|=1-x$

即 $x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x$

(2)证明：对任意 $u, v\in[-1,1]$.

当 $|u-v|\leqslant 1$ 时，有 $|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|\leqslant 1$

当 $|u-v|>1$ 时，$u\cdot v<0$，不妨设 $u<0$，则 $v>0$ 且 $v-u>1$,

∴ $|f(u)-f(v)|\leqslant|f(u)-f(-1)|+|f(v)-f(1)|\leqslant|u+1|+|v-1|=1-u+1-v=2-(v-u)<1$.

综上，对任意的 $u, v\in[-1,1]$ 都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant 1$ 成立.

优化题型展示

一、选择题

1.（基础题）设 $a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$，以下四个数恒大于1的个数是（　　）

① a^3+1；② a^4-2a^2+2；③ $a+\frac{1}{a}$；④ $a^2+\frac{1}{a^2}$.

考查目标

←考查不等式用法.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2.(基础题)已知 a,b,c 是△ABC 的三边,那么方程 $a^2x^2-(a^2-b^2+c^2)x+c^2=0$(　　)　←考查不等式应用.

A. 有两个不相等的实根　　B. 有两个相等的实根

C. 没有实数根　　D. 要依 a,b,c 的具体取值确定

3.(提高题)设 $a,b\in\mathbf{R}_+$,且 $ab-a-b\geqslant 1$,则有(　　)　←考查均值不等式.

A. $a+b\geqslant 2(\sqrt{2}+1)$　　B. $a+b\leqslant\sqrt{2}+1$

C. $a+b\geqslant(\sqrt{2}+1)^2$　　D. $a+b\leqslant 2(\sqrt{2}+1)$

4.(创新题)设 $a>b>c,n\in\mathbf{N}_+$ 且 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}$ 恒成立,则 n 的最大值为(　　)　←考查分析法.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

5.(提高题)若 α,β 是锐角,$P=\sin^2\alpha+\sin^2\beta$,$Q=2(\sin\alpha+\sin\beta-1)$,$R=2\sin\alpha+3\sin\beta-3$,则有(　　)　←考查综合法.

A. $P>Q>R$　　B. $Q>R>P$　　C. $R>Q>P$　　D. $P>R>Q$

6.(基础题)若 $a,b\in\mathbf{R}_+$,则代数式 a^5+b^5 与 $a^3b^2+a^2b^3$ 的值的大小关系是(　　)　←考查比较法.

A. $a^5+b^5\leqslant a^3b^2+a^2b^3$　　B. $a^5+b^5\geqslant a^3b^2+a^2b^3$

C. $a^5+b^5<a^3b^2+a^2b^3$　　D. $a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$

7.(提高题)已知 $a>b>0$,且 $ab=1$,设 $c=\frac{2}{a+b}$,$p=\log_c a$,$m=\log_c(ab)$,$n=\log_c b$,则 m,n,p 的大小关系是(　　)　←考查综合法.

A. $p<m<n$　　B. $m<p<n$　　C. $n<p<m$　　D. $p<n<m$

8.(基础题)如果 $a>b>0,m>0$,下列不等式中成立的是(　　)　←考查不等式概念.

A. $\frac{b}{a}>\frac{b+m}{a+m}$　　B. $\frac{a}{b}>\frac{a-m}{b-m}$　　C. $\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}$　　D. $\frac{a}{b}<\frac{a-m}{b-m}$

9.(创新题)设 $0<x<1$,则 $a=\sqrt{2x}$,$b=1+x$,$c=\frac{1}{1-x}$ 中最大的一个是(　　)　←考查图像法或特殊值法.

A. a　　B. b　　C. c　　D. 不能确定

10.(创新题)若 $x,y\in\mathbf{R}_+$,且 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$ 恒成立,则 a 的最小值是(　　)　←考查综合法.

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 1

二、填空题

11.(基础题)$A=a^2+b^2+c^2+3$ 与 $B=2(a+b+c)$ 的大小关系为__________.　←考查比较法.

12.(探究题)当__________时,$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$ 成立.　←考查分析法.

13.(基础题)b 克糖水中有 a 克糖($b>a>0$),若添上 m 克糖($m>0$),则糖水就变甜了,试根据这个事实提炼一个不等式__________.　←考查均值不等式.

14.(提高题)若 $a>0$ 且 $a\neq 1$,给出四个式子:$1+a^6$,$a+a^5$,a^2+a^4,$2a^3$,其中代数式值最大的一个是__________.　←考查不等式应用.

三、解答题

15.(提高题)若 $0<x<\frac{1}{y}$,求证:$y-y^2<\frac{1}{x+1}$.　←考查分析法.

16.(基础题)已知 $a\in\mathbf{R}$,求证:$3(1+a^2+a^4)\geqslant(1+a+a^2)^2$.　←考查分析法.

17.(提高题)已知 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$,求证:$\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x+y)\geqslant x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$.　←考查分析法.

18.(创新题)已知 $f(x)=x+\frac{1}{x}$,$x\in(0,+\infty)$,若 $x_1\in(0,+\infty)$,$x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1+x_2=1$,求证:$f(x_1)\cdot f(x_2)\geqslant\frac{25}{4}$.　←考查综合法.