高等学校教材

工程数学

矢量分析与场论

（第3版）

学习辅导与习题全解

谢树艺

高等教育出版社

高等学校教材

工程数学
矢量分析与场论
（第3版）
学习辅导与习题全解

谢树艺

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学．矢量分析与场论(第3版)学习辅导与习题全解/谢树艺．—北京：高等教育出版社，2005.4
ISBN 7-04-016336-5

Ⅰ.工… Ⅱ.谢… Ⅲ.①工程数学-高等学校-教学参考资料②矢量-分析-高等学校-教学参考资料③场论-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 026436 号

策划编辑 徐 可 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 于 涛
责任绘图 郝 林 **版式设计** 王 莹 **责任校对** 杨雪莲
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	河北省财政厅印刷厂		

开　　本	850×1168　1/32	**版　　次**	2005年4月第1版
印　　张	3.75	**印　　次**	2005年4月第1次印刷
字　　数	90 000	**定　　价**	5.80元

物料号　16336-00

内 容 提 要

本辅导书除了对教材的内容作了一些扼要解释和补充一些示范性例题外，还增补了教材中各章节的全部习题解答，以帮助读者在其独立做题之后，或遇到困难而又深思不得其解时，参考使用。此外，还给出了教材中某些超出课程教学基本要求的推证，以供有兴趣的同学参阅。

前　　言

本书是在原《矢量分析与场论学习指导书》的基础上，并根据工程数学《矢量分析与场论》教材(第3版)进行改编的。其中除了对教材的内容作一些扼要解释和补充一些示范性例题外，还增补了教材中各章节的习题全解，以帮助读者在独立作题之后，或遇到困难而又深思不得其解时参考使用。

此外，对教材中用到的某些命题，因其推证过程已超出本课程的教学要求，因而教材上未予给出。如在管形场中，计算矢势量的公式，以及在正交曲线坐标系中，坐标曲线上的切线单位矢量的导数公式等，在本书中，给出了它们的推证，以供有兴趣的读者参阅。

限于编者水平，本书一定存在不少缺点和错误，诚望读者批评指正。

编　者

2004年7月

目　　录

绪　论

工程数学《矢量分析与场论》(第3版)的主要内容有：矢量分析；场论的基本知识；哈密顿算子；正交曲线坐标的概念；梯度、散度、旋度与调和量在一般正交曲线坐标系中的表示式，以及它们在柱面坐标系和球面坐标系中的表示式；附录中还介绍了若干种正交曲线坐标系.

学习本课程，必须具有高等数学的知识. 特别是其中的曲线积分与曲面积分的概念、理论和计算方法对于顺利地学习本课程尤为重要. 若在学习过程中，遇到曾经学过的知识记不清甚至忘记了的时候，就要及时查阅复习，不要轻易放过.

学习本课程的方法和学习其他数学课程一样，对教材要仔细阅读，循序渐进地深入钻研每章、每节的内容. 弄清并熟悉每个概念，掌握好每个命题(定理或公式)，弄清该命题的证明或推导过程，弄清每个例题的解题思路和解法步骤. 在此基础之上，还要认真地做习题来巩固所学内容，并加深理解. 做题时，要独立思考，并按照规范的格式来书写. 文字要通顺扼要，务使逻辑步骤清楚，卷面整洁醒目. 这样做，既能避免错误，又能培养认真踏实的好习惯. 待习题做完后，还应小结一下自己的做题经验.

第一章 矢量分析

一、内容释要

1. 这一章矢量分析，不仅是后面场论部分的基础知识，同时也是研究其他许多学科的有用工具. 其中的几个主要概念，如矢性函数及其极限、连续以及有关导数、微分、积分等概念，都和高等数学中研究过的数性函数的相应概念完全类似，可以看成是这些概念在矢量分析中的推广. 注意到这一点，这一章的主要内容，将是不难掌握的.

2. 本章所讨论的，仅限于一个自变量的矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$，但在后面场论部分所涉及的矢性函数，则全是二个或三个自变量的多元矢性函数 $\boldsymbol{A}(x,y)$或 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$. 对于这种多元矢性函数及其极限、连续、偏导数、全微分等概念，完全可以仿照本章将高等数学中的多元数性函数及其有关的相应概念加以推广而得出. 为简单起见，就不作专门讨论了.

3. 本章的重点是矢性函数的概念及其微分法. 特别要注意导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$的几何意义，即 $\boldsymbol{A}'(t)$是位于 $\boldsymbol{A}(t)$的矢端曲线上的一个切向矢量，其起点在曲线上对应 t 值的点处，且恒指向 t 值增大的一方.

如果将自变量取为矢端曲线的弧长 s，即矢性函数成为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(s)$，则 $\boldsymbol{A}'(s)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}s}$不仅是一个恒指向 s 增大一方的切向矢量，而且还是一个单位切向矢量. 这一点在几何与力学上都很重要.

4. 应注意到：矢量 $\boldsymbol{A}(t)$保持定长的充分必要条件，是 $\boldsymbol{A}(t)$与其导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$互相垂直. 因此，单位矢量与其导矢互相垂直. 比如 $\boldsymbol{A}'(s)$为单位矢量，故有 $\boldsymbol{A}'(s)\perp\boldsymbol{A}''(s)$，又如圆函数 $\boldsymbol{e}(t)$为单位矢量，故有 $\boldsymbol{e}(t)\perp\boldsymbol{e}'(t)$，即 $\boldsymbol{e}(t)\perp\boldsymbol{e}_1(t)$.

5. 在矢性函数的积分法中，要注意两个矢性函数的数量积和两个矢性函数的矢量积的分部积分公式是有所不同的，二者依次为

$$\int\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}-\int\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}'\mathrm{d}t,$$

$$\int\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\int\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}'\mathrm{d}t.$$

前者与高等数学中数性函数的分部积分公式一致，后者的不同之处，在于其右端的两项是以加号“+”相连，这是因为矢量积服从于“负交换律”之故.

6. 在矢量代数中，当引进了矢量的坐标以后，一个空间矢量就和三个数量(坐标)构成一一对应的关系，而且有关矢量的一些运算，如两个矢量的和、差以及数量与矢量的乘积等都可以转化为对三个数量坐标的相应运算. 同样，在矢量分析中，若矢性函数采用其坐标表示式，则一个矢性函数，就和三个数性函数(坐标)构成一一对应的关系，而且有关矢性函数的一些运算，如计算极限、求导数、求积分等亦可转化为对其三个坐标函数的相应运算.

二、解 题 示 例

例 1 已知矢量$\boldsymbol{A}(t)=(2t-t^3)\boldsymbol{i}+3t^2\boldsymbol{j}+(2t+t^3)\boldsymbol{k}$，计算

(1) $\lim\limits_{t\to1}\boldsymbol{A}(t)$；　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)$；

(3) $\int\boldsymbol{A}(t)\,\mathrm{d}t$；　　(4) $\int_0^1\boldsymbol{A}(t)\,\mathrm{d}t$.

解 (1) $\lim\limits_{t \to 1} \boldsymbol{A}(t) = \lim\limits_{t \to 1}(2t - t^3)\boldsymbol{i} + \lim\limits_{t \to 1} 3t^2\boldsymbol{j} + \lim\limits_{t \to 1}(2t + t^3)\boldsymbol{k}$

$$= \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}\ .$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t - t^3)\boldsymbol{i} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(3t^2)\boldsymbol{j} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t + t^3)\boldsymbol{k}$

$$= (2 - 3t^2)\boldsymbol{i} + 6t\boldsymbol{j} + (2 + 3t^2)\boldsymbol{k}.$$

(3) $\displaystyle\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \int(2t - t^3)\mathrm{d}t\boldsymbol{i} + \int 3t^2\mathrm{d}t\boldsymbol{j} + \int(2t + t^3)\mathrm{d}t\boldsymbol{k}$

$$= \left(t^2 - \frac{1}{4}t^4 + C_1\right)\boldsymbol{i} + (t^3 + C_2)\boldsymbol{j} + \left(t^2 + \frac{1}{4}t^4 + C_3\right)\boldsymbol{k}$$

$$= \left(t^2 - \frac{1}{4}t^4\right)\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j} + \left(t^2 + \frac{1}{4}t^4\right)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C},$$

其中 $\boldsymbol{C} = C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + C_3\boldsymbol{k}$ 为任意常矢.

(4) $\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1(2t - t^3)\mathrm{d}t\boldsymbol{i} + \int_0^1 3t^2\mathrm{d}t\boldsymbol{j} + \int_0^1(2t + t^3)\mathrm{d}t\boldsymbol{k}$

$$= \frac{3}{4}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \frac{5}{4}\boldsymbol{k}.$$

例 2 证明 $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{e}(\alpha) + (t^2 + 1)\boldsymbol{e}_1(\alpha)$的图形为一抛物线($\alpha$ 为非零常数).

证 旋转坐标轴，使 Ox 轴与 $\boldsymbol{e}(\alpha)$重合且同向，此时 Oy 轴就与 $\boldsymbol{e}_1(\alpha)$重合且同向. 这样，所论图形的矢量方程就成为

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (t^2 + 1)\boldsymbol{j},$$

其对应参数方程为

$$x = t, \qquad y = t^2 + 1.$$

消去 t，得
$$y = x^2 + 1.$$

可见，所论图形为一抛物线.

例 3 求曲线 $\boldsymbol{r}(\theta) = 2\cos\theta\boldsymbol{i} + 2\sin\theta\boldsymbol{j} + 4\theta\boldsymbol{k}$ 在 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$处的切线方程和法平面方程.

解 $$\boldsymbol{r}'(\theta) = -2\sin\theta\boldsymbol{i} + 2\cos\theta\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}.$$

当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，有

$$r\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}+\pi\boldsymbol{k},$$

$$r'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

由于 $\boldsymbol{r}'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 为在曲线 $\boldsymbol{r}(\theta)$ 上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切向矢量，故所求之切线方程为

$$\frac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{z-\pi}{4},$$

法平面方程为

$$-\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+\sqrt{2}(y-\sqrt{2})+4(z-\pi)=0,$$

或 $$x-y-2\sqrt{2}z+2\sqrt{2}\pi=0.$$

例 4 一曲线的矢量方程为 $\boldsymbol{r}(t)=(t^2+1)\boldsymbol{i}+(4t-3)\boldsymbol{j}+(2t^2-6t)\boldsymbol{k}$，求在 $t=2$ 处的单位切向矢量 $\boldsymbol{\tau}$.

解 曲线上对应于 t 值的点处的切向矢量为

$$\boldsymbol{r}'(t)=2t\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+(4t-6)\boldsymbol{k}.$$

在 $t=2$ 处有 $$\boldsymbol{r}'(2)=4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

其模 $$|\boldsymbol{r}'(2)|=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6.$$

故所求的单位切向矢量

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}'(2)/|\boldsymbol{r}'(2)|=\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}\boldsymbol{k}.$$

例 5 求与 $\boldsymbol{A}=3\cos t\boldsymbol{i}+3\sin t\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 相垂直的单位矢量.

解 将 $\boldsymbol{A}$ 写成 $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{e}(t)+4\boldsymbol{k}$，则与其同方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}/|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{5}[3\boldsymbol{e}(t)+4\boldsymbol{k}],$$

其导矢 $$\boldsymbol{\alpha}'=\frac{3}{5}\boldsymbol{e}_1(t).$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 恒为单位矢量，故有

$$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\alpha}'.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha} /\!/ \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{\alpha}' /\!/ \boldsymbol{e}_1(t)$，所以有

$$\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{e}_1(t).$$

可见，$\pm \boldsymbol{e}_1(t)$即为与 $\boldsymbol{A}$ 相垂直的单位矢量.

例 6 计算积分 $\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)\mathrm{d}\varphi \quad (a \neq 0)$.

解 用分部积分法：

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)\mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi) - \frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}_1(b\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi) - \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}_1(b\varphi) - \frac{b^2}{a^2}\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

由此可得

$$\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)\mathrm{d}\varphi = e^{a\varphi}\frac{a\boldsymbol{e}(b\varphi) - b\boldsymbol{e}_1(b\varphi)}{a^2 + b^2} + \boldsymbol{C}.$$

若记 $\boldsymbol{C} = C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j}$，并将字母 φ 改为 x，再分别令上式等号两端矢量的对应坐标相等，便得到数性函数中的两个不定积分公式：

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2} + C_1,$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} + C_2.$$

例 7 已知矢量 $\boldsymbol{A} = t\boldsymbol{i} - 2t\boldsymbol{j} + \ln t\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B} = \mathrm{e}^t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} - 3t\boldsymbol{k}$，计算积分 $\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t$.

解 用分部积分法：

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} - \int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}'\mathrm{d}t \\ &= t\mathrm{e}^t - 2t\sin t - 3t\ln t - \int (\mathrm{e}^t - 2\sin t - 3)\mathrm{d}t \\ &= t\mathrm{e}^t - 2t\sin t - 3t\ln t - \mathrm{e}^t - 2\cos t + 3t + C \\ &= (t-1)\mathrm{e}^t - 2(t\sin t + \cos t) + 3t(1 - \ln t) + C.\end{aligned}$$

例 8 已知矢量 $\boldsymbol{A} = t\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{B} = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + \mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{k}$，计算

积分 $\int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}' \mathrm{d}t$.

解 用分部积分法：

$$\int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}' \mathrm{d}t = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \int \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}' \mathrm{d}t,$$

其中

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ t & 2t & 0 \\ \cos t & \sin t & \mathrm{e}^{-t} \end{vmatrix} = 2t\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{i} - t\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{j} + (t\sin t - 2t\cos t)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos t & \sin t & \mathrm{e}^{-t} \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{i} + \mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{j} + (2\cos t - \sin t)\boldsymbol{k},$$

$$\int \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}' \mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{i} - \mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{j} + (2\sin t + \cos t)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C},$$

所以

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}' \mathrm{d}t = {} & 2(t+1)\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{i} - (t+1)\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{j} \\ & + [(t+2)\sin t + (1-2t)\cos t]\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C}.\end{aligned}$$

例 9 设 $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{e}_1(\theta) + b\boldsymbol{k}$，求 $S = \int_0^{2\pi} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\theta$.

解 $\boldsymbol{r}' = -a\boldsymbol{e}(\theta)$,

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}' = [a\boldsymbol{e}_1(\theta) + b\boldsymbol{k}] \times [-a\boldsymbol{e}(\theta)] = a^2\boldsymbol{k} - ab\boldsymbol{e}_1(\theta)$$

[其中 $\boldsymbol{e}_1(\theta) \times \boldsymbol{e}(\theta) = -\boldsymbol{k}$； $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}(\theta) = \boldsymbol{e}_1(\theta)$]. 于是

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a^2\boldsymbol{k} - ab\boldsymbol{e}_1(\theta)] \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}[a^2\theta\boldsymbol{k} - ab\boldsymbol{e}(\theta)]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi a^2\boldsymbol{k} - \boldsymbol{0}) = \pi a^2\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

例 10 一质点以常角速度沿圆周 $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{e}(\varphi)$运动，证明其加速度

$$\boldsymbol{w} = -\frac{v^2}{a^2}\boldsymbol{r},$$

其中 v 为速度$\boldsymbol{v}$的模.

证 注意到在运动过程中，角度 φ 为时间 t 的函数，则速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=a\boldsymbol{e}_1(\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

其中$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$为角速度，由条件知其为常数，故加速度

$$\boldsymbol{w}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-a\boldsymbol{e}(\varphi)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

由于$v=|\boldsymbol{v}|=\left|a\boldsymbol{e}_1(\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right|=\left|a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right|$，或 $v^2=a^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2$，即有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{v^2}{a^2},$$

代入前式，即得

$$\boldsymbol{w}=-\frac{v^2}{a^2}a\boldsymbol{e}(\varphi)=-\frac{v^2}{a^2}\boldsymbol{r}.$$

三、习 题 全 解

习题 1　解答

1. 写出下列曲线的矢量方程，并说明它们是何种曲线.

(1) $x=a\cos t$，$y=b\sin t$；

(2) $x=3\sin t$，$y=4\sin t$，$z=3\cos t$.

解 (1) 矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=a\cos t\boldsymbol{i}+b\sin t\boldsymbol{j},$$

其图形是 xOy 平面上之椭圆；

(2) 矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=3\sin t\boldsymbol{i}+4\sin t\boldsymbol{j}+3\cos t\boldsymbol{k},$$

其图形是平面 $4x-3y=0$ 与圆柱面 $x^2+z^2=3^2$ 之交线，是一椭圆.

2. 设有定圆 O 与动圆 C，半径均为 a，动圆与定圆外相切且滚动(如图 1). 求动圆上一定点 M 所描曲线的矢量方程.

[提示:(1)设开始时 M 点与 A 点重合;(2)取 $\angle AOC=\theta$ 为参数;(3) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}$.]

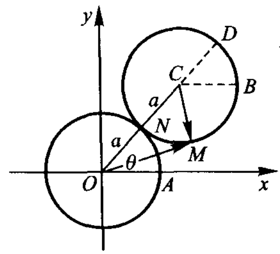

图 1

解 如图 1，延长 OC 至 D，过 C 作 $CB\,/\!/\,Ox$ 轴，则有

$\angle DCB=\theta$ (同位角相等).

又设 N 为二圆的切点，则因 $\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{MN}$，故有

$\angle MCO=\theta$ (等圆上等弧所对之圆心角相等)，

所以 $$\angle DCB=\angle MCO=\theta,$$

从而 $$\angle BCM=\pi-\angle DCB-\angle MCO=\pi-2\theta,$$

则矢量 $\overrightarrow{CM}$ 与 x 轴正向的交角为: $-(\pi-2\theta)$.

于是有 $$\overrightarrow{OC}=2a\cos\theta\boldsymbol{i}+2a\sin\theta\boldsymbol{j},$$
$$\overrightarrow{CM}=a\cos[-(\pi-2\theta)]\boldsymbol{i}+a\sin[-(\pi-2\theta)]\boldsymbol{j}$$
$$=-a\cos 2\theta\boldsymbol{i}-a\sin 2\theta\boldsymbol{j}.$$

由此得所求曲线的矢量方程为
$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}$$
$$=(2a\cos\theta-a\cos 2\theta)\boldsymbol{i}+(2a\sin\theta-a\sin 2\theta)\boldsymbol{j}.$$

3. (1) 证明 $\boldsymbol{e}(\varphi)\times\boldsymbol{e}_1(\varphi)=\boldsymbol{k}$;

(2) 证明 $\boldsymbol{e}(\varphi+\alpha)=\boldsymbol{e}(\varphi)\cos\alpha+\boldsymbol{e}_1(\varphi)\sin\alpha$.

证

(1) $$\boldsymbol{e}(\varphi)\times\boldsymbol{e}_1(\varphi)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \cos\varphi&\sin\varphi&0\\ -\sin\varphi&\cos\varphi&0\end{vmatrix}$$
$$=(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k};$$

(2) $\boldsymbol{e}(\varphi+\alpha)=\cos(\varphi+\alpha)\boldsymbol{i}+\sin(\varphi+\alpha)\boldsymbol{j}$

$$= (\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha)\boldsymbol{i}$$

$$+ (\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha)\boldsymbol{j}$$

$$= \cos\alpha(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j})$$

$$+ \sin\alpha(-\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j})$$

$$= \cos\alpha\boldsymbol{e}(\varphi) + \sin\alpha\boldsymbol{e}_1(\varphi).$$

4. 求曲线 $x = t$，$y = t^2$，$z = \frac{2}{3}t^3$ 的切向单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$.

解 曲线的矢量方程为

$$\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}t^3\boldsymbol{k},$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 2t^2\boldsymbol{k}$$

为曲线的切向矢量，其模

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 1 + 2t^2.$$

于是切向单位矢量

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big/\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 2t^2\boldsymbol{k}}{1 + 2t^2}.$$

5. 设 $\boldsymbol{a}(t)$三阶可导，证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right] = \boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right).$$

证 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right]$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right) + \boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right) + \boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right).$$

由于在三个矢量的混合积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$中，若有两个矢量相等时，此混合积为零，故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right] = 0 + 0 + \boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right)$$

$$= \boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right).$$