现代数学基础丛书 97

代数学中的Frobenius结构

汪明义 著

2

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书　97

代数学中的 Frobenius 结构

汪明义　著

本书的出版和所论课题的研究工作得到以下基金的资助:

四川省青年基金
四川省科技厅应用基础研究基金
四川师范大学出版基金

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书共分 12 章，前面 8 章主要论述 Frobenius 结构在一个域上的代数中的运用. 尤其是总结了其一般情形的 Frobenius 环、quasi-Frobenius 环的一系列重大进展. 后面 4 章论述了 Frobenius 结构在一个域上的余代数和 Hopf 代数中的运用，系统地讨论了 Frobenius 余代数、quasi-Frobenius 余代数和 Frobenius Hopf 代数的一系列新进展，特别地还介绍了 Frobenius 代数、Frobenius Lie 代数在求解 Yang-Baxter 方程方面的奇特功效.

本书可供代数学的研究生、数学系高年级本科生、数学工作者阅读.

图书在版编目 (CIP) 数据

代数学中的 Frobenius 结构/汪明义 著. —北京：科学出版社，2005

(现代数学基础丛书；97)

ISBN 7-03-015447-9

I. 代… II. 汪… III. 代数-理论 IV. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 042803 号

责任编辑：张 扬 / 责任校对：李奕萱

责任印制：钱玉芬 / 封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2005 年 7 月第一次印刷 印张：16

印数：1—2 000 字数：287 000

定价：40.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《现代数学基础丛书》编委会

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003年8月

序　言

环论是抽象代数的一个重要组成部分，一个多世纪以来受到了越来越多的数学家的关注. 环论的发展始于有限维代数的研究, 20 世纪 20 年代以来，以 E. Artin 和 E.Noether 为代表的带有限链条件环的研究得到了蓬勃的发展. 自 20 世纪 40 年代以来，以 Jacobson 为代表的不带有限链条件环的结构研究，以及应用模及模范畴和同调代数理论，使一般环的研究走上了更为广阔的发展道路，并取得了更为现代化的成果.

在环论中有一个十分活跃的研究对象，那就是 Frobenius 代数(及其广义形式 quasi-Frobenius 代数)，它在环论发展中的处于重要地位，受到环论学者的重视. 它产生于 20 世纪初，成形于 20 世纪 40 年代，而后便得到了广泛的发展. 在环论中，Frobenius 环与 quasi-Frobenius 环形成了一个十分丰富的研究领域，PF-环理论就是其一个典型代表. 在 20 世纪 80 年代，随着 Hopf 代数研究的深入，人们逐渐注意到 Frobenius 余代数（Hopf 代数）和 quasi-Frobenius 余代数（Hopf 代数）也是具有丰富而又深刻的研究内容的对象. 也是在 20 世纪 80 年代，在 Lie 代数领域出现了 Frobenius Lie 代数这样的研究对象，而 Frobenius Lie 代数在求解 Yang-Baxter 方程方面也显得很有成效. 正如作者在书的前言中所陈述的那样，Frobenius 代数已渗透到了数学的诸多领域.

无论 Frobenius 代数、Frobenius 余代数（Hopf 代数），还有 Frobenius Lie 代数，它们的一个基本特征就是“域上的向量空间具有非退化的双线性型结构”，本书作者抓住这个特征，系统地整理了在代数学的“有限维代数，余代数(Hopf 代数)和有限维 Lie 代数”三个领域中有关这个结构的历史和最新进展，特别是在 quasi-Frobenius 代数和 quasi-Frobenius 环的发展中，他以一系列的著名公开问题研究为线索进行了系统地梳理，同时融入了他本人所取得的相关的系统成果. 这是一部具有创见的著作，相信该书的出版将有助于推动国内对这一领域的研究.

上海复旦大学　许永华
2005 年 7 月

前　言

环论作为代数学的重要分支，其理论和方法在数学的许多领域中有着广泛的应用. 一个多世纪以来越来越多的代数学家给予了环论极大的重视，他们发表和出版了具有重要影响的论文和著作. 随着环论的发展，一些古老的问题不断得到解决或部分地得到解决，而新的问题又不断地产生. 一代又一代的代数工作者们就是围绕着这些问题开始了自己的研究生涯的. 在这些问题中，有关 quasi-Frobenius 代数的问题已是圈内人士关注的焦点问题之一.

首先让我们弄清楚什么是 Frobenius 代数. 设 V 是域 k 上的一个向量空间，一个映射 $B: V\times V \to k$ 称为双线性型，如果对任意 $\alpha_1, \alpha_2 \in k, v, w, \nu_1, \nu_2, w_1, w_2 \in V$, B 满足下列条件:

$$B(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 B(v_1, w) + \alpha_2 B(v_2, w),$$
$$B(v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 B(v, w_1) + \alpha_2 B(v, w_2).$$

一个双线性型 B 称为非退化的，如果 $B(v, V) = 0 = B(V, w)$, 则 $v = w = 0$.

一个双线性型 B 称为结合的，如果 B 满足 $B(a,\ bc) = B(ab,\ c)$.

1903 年， G. Frobenius[54] 研究了域 k 上的一类特殊的有限维代数，在这类代数上，左正则表示 ${}_AA$ 等价于右正则表示 A_A 的 k- 对偶表示 $(A_A)^*$. 后来，代数学家们利用上述双线性型的语言证明了这类特殊代数的本质特征是“存在一个结合的非退化的双线性型的有限维代数 ”.

鉴于 G. Frobenius 本人在研究这类代数时所做出的开创性工作， 1939 年， T. Nakayama[101] 称这类代数为 Frobenius 代数. 同时，T. Nakayama 引入了一类更广的代数，称这类代数为 quasi-Frobenius 代数 (简称 QF- 代数), 将 Frobenius 代数的重要结论推广到了 quasi-Frobenius 代数上. 也是在这篇文章中， T.Nakayama 利用 Frobenius 代数和 quasi-Frobenius 代数的重要特征引入了 Frobenius 环和 quasi-Frobenius 环的概念 (后者简记为 QF- 环). Frobenius 代数、 QF- 代数及其一般形式的 Frobenius 环、QF- 环在环论中起着很重要的作用，近一个世纪来，得到了广泛研究，构成了代数学的中心研究课题之一.

Frobenius 代数最经典的例子是域上的有限群代数，因此， Frobenius 代数与群表示论有着直接的联系. Frobenius 环也出现在代数的其他分支中. 例如，交换局部 Frobenius 环恰好就是零维局部 Groenstein 环，这类环在交换代数，代数数论，代数几何及组合论中都有着重要的应用. Frobenius 代数也被证明在 Hopf 代数中出现. 在拓扑与几何中， Frobenius 环作为紧致定向流形的上同调环和某种紧致 Kahler 流形的量子上同调环而出现. 要指出的是， Frobenius 环的应用已经超出

了纯代数甚至纯数学的范畴. 例如, Wood 的工作表明, Frobenius 代数可以应用于编码理论. 近年来, Frobenius 代数已经出现在 Yang-Baxter 方程求解工作中.

1980 年, I. P. Lin 将 Frobenius 代数的特征性质进行对偶,引入了 Frobenius 余代数的概念, 得到了这类余代数的重要特征. 1995 年, J. G. Torrellas 和 C. Nastasescu 合作, 将 quasi-Frobenius 代数的性质进行对偶, 研究了比 Frobenius 余代数更为广泛的一类余代数, 即 quasi-Frobenius 余代数. 1980 年, A. Ioms 在 Lie 代数领域中研究了类似的对象, 称为 Frobenius Lie 代数. 1999 年 [134] A. Stolin 研究了经典 Yang-Baxter equation 的有理解和 quasi-Frobenius Lie algebras 间的关系.

上述的这些代数和余代数具有一个共同特征, 那就是我们上面定义的 "非退化的双线型结构 ", 我们把这个结构称为 **Frobenius 结构**. 前面说了, A 为 Frobenius 代数当且仅当 A 是域 k 上的一个有限维结合代数且存在一个非退化的结合的双线性型; C 为 Frobenius 余代数当且仅当 C 是域 k 上的一个余代数且存在一个 C-平衡的非退化的双线性型; 如果 L 是域 k 上的一个有限维 Lie 代数且存在一个非退化双线性型, 则 L 称为 Frobenius Lie 代数.

因此, 我们可以这样认为, 关于 Frobenius 代数的研究有这样两个主要途径: 一个是将向量空间的非退化的双线性结构运用到其他的代数学研究对象上, 构成了这些领域的新的研究对象, 例如: Frobenius 余代数、 Frobenius Hopf 代数、Frobenius Lie 代数及其这些对象的种种推广. 另一个是将 Frobenius 环的概念进行推广, 例如: quasi-Frobenius 环、 PF- 环、 IF- 环以及 GPF- 环. 在这条发展路径上, 主要依赖于 1940 年 Baer 引入的内射性概念. 1951 年, Ikeda-Nakayama 将 quasi-Frobenius 环刻画成自内射 Artin 环, 即 quasi-Frobenius 环等价于单边 Artin 单边自内射环, 同时也等价于单边 Noether 单边自内射环. quasi-Frobenius 环还具有很好的对偶性质. 例如 Faith-Walker 证明了环 R 为 quasi-Frobenius 环等价于每个内射右 R- 模投射, 也等价于每个投射右 R- 模内射.

本书共分 12 章, 前面 8 章主要论述 Frobenius 结构在一个域上的代数中的运用, 后面 4 章论述了 Frobenius 结构在一个域上的余代数和 Hopf 代数中的运用.

在第 1 章, 我们主要阐述了内射模尤其是自内射环的基本性质. 在这章中, 我们给出了两个重要的例子, 一个是 Maschke 定理的证明, 一个是 Osofsky 给出的自内射环的左右非对称性例子, 同时我们还给出了 Connell-Renault 定理的证明, 这个定理指出: "群环 RG 是右自内射环群当且仅当 G 为有限群, 并且环 R 为右自内射环 ".

在第 2 章, Frobenius 代数和 quasi-Frobenius 代数的特征性质成为我们关注的重点, 同时我们也专节介绍了有关 quasi-Frobenius 代数的几个著名的猜想, 如 Nakayama 猜想、广义 Nakayama 猜想、有限维数猜想以及 Auslander-Reiten 猜想及其它们的最新进展.

在第 3 章，我们给出了 quasi-Frobenius 环最基本也是最常用的特征，尤其是使用对偶的语言去刻画 quasi-Frobenius 及 Frobenius 环.

第 4 章给出了 quasi-Frobenius 环的同调特征性质，即 QF- 环的特征是其模范畴中内射模与投射模是一致的，这是一个深刻的结果．利用 QF- 环的这个特征，我们得到了 QF- 环的一个自然推广：IF- 环，即内射模为平坦模的环类，我们给出了这类环的特征性质.

链条件是研究环论的重要手段，最初引入的链条件是要求环的所有理想满足升链和降链，后来人们引入了所谓的限制链条件，即“环的一些特殊理想类满足升链或降链的条件”对环进行刻画，这一手段在 quasi-Frobenius 环的研究中显得十分有效，这就是第 5 章的内容.

在第 6 章，我们系统地总结了内射性的几种重要推广：FP- 内射、f- 内射、P- 内射、GP- 内射、单内射、极小内射、极大内射、FGT- 内射性与 CT- 内射性，它们之间的关系如下：

内射性 $\Rightarrow$ FP- 内射性 $\Rightarrow$ f- 内射性 $\Rightarrow$ P- 内射性 $\Rightarrow$ GP- 内射性 $\Rightarrow$sim 内射性 $\Rightarrow$min 内射性，内射性 $\Rightarrow$max 内射性，内射性 $\Rightarrow$ FGT 内射性 $\Rightarrow$ CT 内射性. 这些推广都是本质的并构成了 quasi-Frobenius 研究的主要内容.

在第 7 章，我们利用第 6 章的一些结果，将 quasi-Frobenius 环进行了推广，引入了 PF- 环和 GPF- 环．我们知道在相当长一段时间内，QF- 环是具有自对偶的环仅有的例子．直到 1966 年，Osofsky 才去掉 QF- 环的链条件而保留了 QF 环的其他特征，从而引入了另一类非常重要的环类，后来称之为 PF- 环．任意 QF- 环都是双边 PF- 环，一般地，反过来不成立．并且和 QF- 环不同的是 PF- 环不是左右对称的．Azumaya, Osofsky 和 Utumi 各自独立地证明了“环 R 是右 PF- 环当且仅当 R 是具有本质右基座的半完全环右自内射”．这是 PF- 环的一个应用十分广泛的特征，这为后来推广 PF- 环奠定了基础．在 1995 年和 2001 年，Nicholson 与 Yousif 合作引入了广义 PF- 环 (简记为 GPF) 和 FP- 环的概念．PF- 环的许多特征都被推广到了 GPF- 环和 FP- 环上．在本章，我们系统地总结了关于 PF- 环类、GPF- 环类和 FP- 环类一些著名结果.

在 quasi-Frobenius 环的漫长研究岁月里，逐渐提炼出由著名环论学者 Carl Faith 等提出三个猜想，一个是 1982 年提出的，内容为“如果环 R 的每个循环左 R- 模可嵌入自由模中，则 R 为左 Artin 环”(简称为 CF- 猜想)，与这个猜想相关的猜想是“如果每个有限生成的左 R- 模可嵌入自由模，则环 R 为 quasi-Frobenius 环”(简称 FGF- 猜想)．这两个问题是具有包含关系的，如果 CF- 猜想得到证明，FGF 就自然成立了，所以我们把它们归结为一个问题．第二个是“完全单边自内射环为 quasi-Frobenius 环”，这个问题是 Carl Faith 于 1990 年正式提出的，其实她的最初形式是：“半准素的单边 PF- 环是 QF- 环”，出现在 Carl Faith 的著作

Algebra II (Ring Theory) 中. 第三个猜想称为 Faith-Menal 猜想，于 1994 年正式提出，其最简形式为 “右 Noether 左 FP- 内射环为 QF- 环 ”. 这三个猜想使环论学者备受煎熬，听圈内人士透露， Carl Faith 本人还为他提出的这三个问题悬赏. 我们在第 8 章系统地总结了这三个猜想的最新进展.

在本书的第二部分也就是第 9 章至第 12 章，我们系统地讨论了 Frobenius 余代数、 quasi-Frobenius 余代数和 Frobenius Hopf 代数的一系列新进展，特别地，我们还介绍了 Frobenius 代数、 Frobenius Lie 代数在求解 Yang-Baxter 方程方面的奇特功效. 这些讨论使我们看到了 1903 年 G. Frobenius 所研究的数学对象是多么的深刻，已渗透到了数学的诸多领域，形成了一个根深叶茂的代数学分支.

说到这里使我想到了最近文汇出版社出版了一套原创丛书，其首页有这样一段精彩话语： “在科学创造中，个人的灵性最终淹没在对共性和规律的探求中. 而艺术的创造，则是一种无可替代的个人的灵性. 如果没有牛顿，一定会有马顿或羊顿取而代之，因为苹果总要从树上掉下来，万有引力总要被发现. 然而如果没有达·芬奇、莎士比亚和曹雪芹，也许我们永远不会知道人类还会创造《蒙娜丽莎》、《哈姆雷特》和《红楼梦》这样的不朽之作 ······” 其实我们所钟爱的数学又何尝不是这样呢？有谁能使 G. Frobenius 黯然失色呢？ A. Wiles 的出现同样也掩盖不了陈景润的不朽啊！

还是言归正传吧！本书稿的原始形式是作者在南开大学作博士后时出站报告的一部分，那时要来总结这方面的工作的原因一是自己从在复旦大学读博士和在浙江大学作博士后时起就对 Frobenius 代数和 Frobenius 余代数产生了兴趣，二是发现在 Lie 代数领域也有 Frobenius Lie 代数这个研究对象. 后来我在西南交通大学的一个研究生刘敏同志不辞辛劳，认真地阅读了该稿子，并把它译成了中文. 再后来我在四川师大的一个研究生赵国也对这个领域感兴趣，我们合作又做出了些新的结果，在书稿的取材上又补充了许多新的内容. 去年年底，我开始在西南财经大学应用经济学流动站做研究，我的合作导师王裕国教授非常鼓励我在做教育经济学研究的同时一定要把这部书稿整理后正式出版. 我对王裕国先生的理解和支持表示深深地敬意和谢意！

作者在此要特别感谢复旦大学的许永华教授、浙江大学的李慧陵教授、南开大学的孟道骥教授、广西师范大学的程福长教授，是他们的直接指导、种种帮助和鼓励才使得我能够有对代数学的持久兴趣；还要感谢刘绍学教授、姚慕生教授、彭联刚教授、薛卫民教授、吴泉水教授、陈维新教授、易中教授，还有我在广西师范大学、复旦大学、浙江大学和南开大学求学时的各位同学以及我现在的各位同事，是他们的不断激励和鞭策才使这项工作得以顺利完成. 我还要感谢西南财经大学、四川师范大学给我提供了宽松自由的研究环境，使得教育经济学的研究和代数学的研究工作能同时进行. 还有我的爱人李咏梅同志，她在后勤保障方面做了许多工

作，我的几个研究生如赵国、罗荣、蹇红、徐龙玉、李珊珊、余柏林，他们在书稿的校对方面也做了大量的工作，在此一并感谢！

无论将来我还要从事些什么样的工作，但 Frobenius 代数和 Frobenius 余代数将永远伴随着我的研究生涯和研究生的培养工作，同时希望有更多更年轻的代数学爱好者也对这一领域产生兴趣，如果本书能起到抛砖引玉的作用，作者已心满意足了.

最后，受水平所限，书中错误难免，在取材方面很多国内学者的工作又未能完全收入，真诚地请各位同行原谅、批评和指正！

汪明义

2005 年春于成都望江嘉苑

符号说明

在本书中，除了特别指明外，我们总是用 $J(R)$(有时直接用 J) 表示环 R 的 Jacobson 根， 用 $Soc(R_R)(Soc(_RR))$(有时也直接用 $S_r(S_l)$) 表示环 R 的右 (左) 基坐,用$s(m)$表示模M的基座，$Spec(R)$ 表示环 R 全体素理想的集合，$ann_r(S)(ann_l(S))$ (有时也直接用 $r_R(S)((l_R(S)))$ 表示集合 S 在 R 中的右 (左) 零化子理想，这些记号可相应地运用到模.

用 $E(M_R)$ 表示模 M_R 的内射络，用 $leng(M_R)$ 表示 M_R 的长度， $N \subseteq_e M$ 表示 N 是 M 的本质子模， M^* 表示模 M 的对偶模，有时也用 M^* 表示 M 的特征模，从上下文不难做出区分， Tr 用来表示迹映射.

目　　录

* * *

第1章 内 射 性

内射性的概念是 Baer 于 1940 年提出的，模的内射性与投射性一起构成了同调代数的最基本的概念体系．在应用方面，模的内射性显得更加突出，它极大地丰富了代数学特别是环论的研究内容.

在本章，我们系统地总结了内射模、自内射环的一系列基本性质，特别是给出了两个重要例子的证明：一个是 Maschke 定理，一个是 Osofsky 给出的自内射环的左右非对称性例子，同时我们还给出了 Connell-Renault 定理的证明．本章所涉及的结果是基础的，在后面的章节中，这些结果将被广泛地应用.

§1.1 内 射 模

定义 1.1.1 环 R 上的右 R- 模 E 称为 **内射模**, 如果对任意模 M, 其子模 K 到 E 的任意 R- 同态 $h: K \to E$ 均可扩张为 R- 同态 $\overline{h}: M \to E$, 即下列图形是交换的

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & K & \xrightarrow{g} & M \\ & & h\downarrow & \overline{h} \swarrow & \\ & & E & & \end{array}$$

由定义去判断一个模的内射性的成本是很大的, 因为涉及任意模. 因此我们尽量去寻找一个在理论上比较经济的方法，这就是我们著名的 Baer 准则.

定理 1.1.1(Baer 准则) 右 R- 模 E 为内射模当且仅当对环 R 任意的右理想 I, 任何 R- 同态 $\varphi: I_R \to E_R$ 均可扩张成 R- 同态 $\overline{\varphi}: R_R \to E_R$.

证明 只证明充分性. 为此设 $g: K \to M$ 为任意单右 R- 模同态，同时设为 $h: K \to E$ 为任意 R- 同态，我们需要验证存在 R- 同态 $\overline{h}: M \to E$ 使得下面的图交换

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & K & \xrightarrow{g} & M \\ & & h\downarrow & h_0 \swarrow & \\ & & E & & \end{array}$$

不失一般性，我们可以假定 K 是 M 的子模，而 $g: K \to M$ 为嵌入映射我们将通过把映射 $h: K \to E$ 逐步扩张为 $h': K' \to E$ 使得 $K \leqslant K' \leqslant M$, 从而得到所求的 R- 同态 $\overline{h}: M \to E$.

为此构造集合

$$\sum = \{(K',\ h') \mid \quad K \leqslant K' \leqslant M,\ h'|_K = h\}.$$

因为 $(K,\ f) \in \Sigma$, 所以 $\Sigma \neq \phi$ 定义 Σ 上的偏序 $\prec$ 如下:

$$(K',\ h') \prec (K'',\ h'') \Leftrightarrow K' \subseteq K'', h''|_{K'} = h'$$

由 Zorn 引理, Σ 中存在极大元 $(K_0,\ h_0)$, 即有如下的交换图

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{g} & K_0 \\ & & h\downarrow & h_0 \swarrow & \\ & & E & & \end{array}$$

下证 $K_0 = M$.

假设 $K_0 \neq M$, 取定 $m \in M \setminus K_0$, 则

$$I = \{r \in R \mid mr \in K_0\}.$$

是 R 的右理想, 定义映射 $\varphi : I \rightarrow E$ 为

$$\varphi(r) = h_0(mr), \quad \forall r \in I.$$

易证 $\varphi \in Hom_R(I,\ E)$ 由假设, 同态 $\varphi : I_R \rightarrow R_R$ 可扩张成 R- 同态 $\bar{\varphi} : R_R \rightarrow R_R$. 现令 $K_1 = K_0 + mR$, 并定义 $h_1 : K_1 \rightarrow E$ 满足

$$h_1(k_0 + mr) = h_0(k_0) + \overline{\varphi}(r), \quad \forall k_0 \in K_0, \quad r \in R,$$

则易知 $h_1 \in Hom_R(K_1,\ E)$. 如果能证明 h_1 是有定义的, 那么因为 $h_1 : K_1 \rightarrow E$ 是 h_0 的扩张, 这就与 $(K_0,\ h_0)$ 的极大性矛盾. 由此可以断言 $K_0 = M$.

为证明 h_1 是有定义的, 假设 $k_0 + mr = 0$, 则由 $mr = -k_0 \in K_0$ 可得 $r \in I$. 从而

$$\varphi(r) = \overline{\varphi}(r) = h_0(mr) = -h_0(k_0),$$

即 $h_1(k_0 + mr) = 0$, 这就推出了 h_1 是有定义的.　　**证毕.**

下面的内射生成引理将是我们构造内射模的重要工具.

设 S, R 是有单位的环, 令 P 为固定的 $(R,\ S)$- 双模并且 P 作为左 R- 模平坦. 对任意右 S- 模 M_S, 我们记

$$M^* = Hom_S(P_S,\ M_S).$$

因为 P 为左 R- 模, 所以 M 具有如下的自然右 R- 模结构:

$$(fr)(p) = f(rp)\ ,$$