能力培养丛书

中学数学解题方法

第一册

代 数

吴 云 编著

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书是编者长期在北京廿六中学从事高中数学教学的经验总结。书中选编了一些较新颖的、灵活的、思考性较强而又耐人寻味的例题和练习题，对典型例题进行了详细分析和多方位探索，以此来介绍多种解题方法．特别注意介绍解题思路、解题的对策处理、数学观点方法的灵活运用。对解题错误的教训也进行了小结。

《中学数学解题方法》共分三册出版。本书为第一册，内容包括高中数学的代数部分；第二册内容包括高中数学的解析几何部分；第三册内容包括高中数学的立体几何部分。第一册共有253道例题和240道练习题。

本书可供高中学生、自学青年在学习代数时参考，也可供数学教师使用。

中学数学解题方法

第一册　代数

吴　云　编著

●

北京工业大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京通县向阳印刷厂印刷

●

787×1092毫米　32开本14.375印张　333千字

1988年12月第一版　1988年12月第一次印刷

印数：0001～7000册

ISBN 7-5639-0010-1/O1·2

定价：3.90元

前　言

《中学数学解题方法》一书主要是探索初等数学的解题方法。鉴于数学能力对解数学题所起的决定性作用和数学思维能力是数学能力的核心，所以也对它们作些简单介绍。

本书的重点是在分析问题的基础上，通过解题来探索解题思路的发现与形成的过程，以及对策处理与观点方法的运用。本书不仅研究典型的，也研究灵活的综合性的数学题的解题方法，并籍此试探性地总结一些规律性的东西。希望它能对正在学习和复习中学数学的同学与青年职工同志有所启发和帮助。

牛顿说过"在数学中，例子比定理更重要"。本书各章节都包含了大量的例题，各节后面附有适量的练习题，并给出答案或必要的提示。

本书共分三册：第一册是代数；第二册是解析几何；第三册是立体几何。每册中都有一些专题研究，最后一册附有综合性较强的系统练习题。

限于个人水平和能力，在论述中难免有不当和错误之处，请提出批评、指正。籍此机会一并向提供支持和帮助的老师和同学表示衷心的感谢。

编　者

1988年2月

目 录

第一章　绪论

数学的解题方法是随着对数学对象的研究发展而发展的。难以数计的数学题，千差万别，日新月异，它们的解法也各不相同，难以枚举。那么是否可以从中找出一些解题方法，特别是思维活动的规律性东西？这是我们关心的第一个问题。我们关心的第二个问题是：如何培养和提高解数学题的能力？它与哪些因素有关？

这两个问题，正是本书想要探索和研究的问题。

首先来研究几个常见的数学题，通过对它们的解法研究，对我们所要探索的问题，应该有所启发。

例1　设全集

$$I=Z,$$

$$M=\left\{x \mid \frac{x}{2}\in Z\right\},$$

$$N=\left\{x \mid \frac{x}{3}\in Z\right\}。$$

那么$M\cap N=$ ________________。(选择题)

$(A)\{x \mid x=3k\pm 1,\ k\in Z\}$；

$(B)\{x \mid x=6k\pm 1,\ k\in Z\}$；

$(C)\{x \mid x=4k,\ 或4k+2,\ k\in Z\}$；

$(D)\{x \mid x=6k+2,\ k\in Z\}$；

$(E)\{x \mid x=6k\pm 4,\ k\in Z\}$。

解：据题给条件，可知M是所有偶数的集合，N是所有不能被3整除的整数的集合。所以$M\cap N$是所有不能被3整

除的偶数的集合。

由于(A)、(B)中的集合都含有奇数，故应排除。

(C)中的集合含有3的倍数，故亦应排除。

(D)中的集合$x=6k+2$可写成 $x=2(3k+1)$。显然可以看出：此集合中的各元素都是不能被3整除的偶数，但是却不是所有的不能被3整除的偶数，例如"4"这个不能被3整除的偶数，此集合却没有，故也应排除。

看来，(E)是唯一的可选的答案，因为

$$6k\pm4=2(3k\pm2),\ k\in Z$$

与

$$2(3k\pm1),\quad k\in Z$$

所表示的整数都是所有(全体)的不能被3整除的偶数。

答案选(E)。

研究：

本题进行选择的办法是：否定其中4个错误结论，然后再去肯定仅剩下的唯一的结论。由于本题并未给出选择题的指导语言：待选的结论中只有一个是正确的，所以必须对(E)的正确性再进行论证。这些办法统称为"对策处理"。

但是前提却是判断结论正确与否的依据或标准。这一点只能通过认真分析题给条件和要求，得出简明的、既有特性又有数量的数学实质性的条件才能得以实现。这是解题的基础。

在分析M、N的特性与数量后，不难得到$M\cap N$是：

(1) 所有不能被3整除的偶数；或者

(2) $\{x|\ x=2(3k\pm1),\ k\in Z\}$。

理解题给条件和题意，并进行数学的分析，不妨统称为前提条件分析，简称"条件分析"。条件分析实际上是"信息处理"。

在进行否定错误的结论时，只须研究它的特性方面和数量方面，如果发现其中有任何一个方面不能满足上面的$M\cap N$的特性或数量，则应予以否定。这些判定活动可以称作具体方法的执行，也可简称“方法处理”。

本题的方法处理是根据两个集合相等的定义所进行的方法上的处理。

这样看来，解题方法的研究的基础是信息处理，重点是对策处理，关键是方法处理。三者相互紧密联系，都影响着解法的好坏与成败。这种说法不无道理。

本题的对策处理，按照上面的说法，并不是唯一的，还有其他处理选择的办法，请读者研究一下，这是不难发现的。

例2 已知a、b、x、y都是正数，变量x、y满足

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$$

求$x+y$的最小值。

解法(1)：$\because$ $x>0$，$y>0$，$\frac{a}{x}>0, \frac{b}{y}>0$

$$\therefore \quad x+y+\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\geqslant 4\sqrt[4]{x\cdot y\cdot\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}}=4\sqrt[4]{ab}$$

故$x+y$有最小值，其值为$4\sqrt[4]{ab}-1$。

解法(2)：$\because$ $x+\frac{a}{x}\geqslant 2\sqrt{a}$

$$y+\frac{b}{y}\geqslant 2\sqrt{b}$$

$$\therefore \quad x+y+\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\geqslant 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$$

注意到$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，于是

$$x+y \geqslant 2(\sqrt{a}+\sqrt{b})-1$$

故$x+y$有最小值，其值为$2(\sqrt{a}+\sqrt{b})-1$。

解法(3)：由题给条件

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$$

得

$$xy-ay-bx=0$$

于是

$$xy-ay-bx+ab=ab$$

即

$$(x-a)(y-b)=ab$$

从已知条件：$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$可知

$$x>a，\ y>b，$$
$$x-a>0，\ y-b>0。$$

所以

$$(x-a)+(y-b) \geqslant 2\sqrt{(x-a)(y-b)}=2\sqrt{ab}$$

由此可得

$x+y \geqslant a+b+2\sqrt{ab}$ （当$x-a=y-b$时，不等式取等号）

故当$x=a+\sqrt{ab}$，$y=b+\sqrt{ab}$时，$x+y$有最小值，其值为$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$。

解法(4)：由题给条件

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$$

得出

$$y=\frac{bx}{x-a}$$

且

$$x>a$$
$$y>b$$

于是

$$x+y=x+\frac{bx}{x-a}=\frac{x^2+(b-a)x}{x-a}$$

设

$$x+y=z=\frac{x^2+(b-a)x}{x-a}>a+b$$

将此式化为方程后，得

$$x^2+(b-a-z)x+za=0$$

又因为$x\in R^+$，且必有x的值满足 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，所以

$$\begin{cases}(b-a-z)^2-4za\geqslant 0\\-(b-a-z)>0\\4za>0\end{cases}$$

解上面的不等式组，得

$$z\geqslant a+b+2\sqrt{ab}$$
$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

也就是

$$y+y\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

故$x+y$有最小值，其值为$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$，这时

$$x=a+\sqrt{ab}$$
$$y=b+\sqrt{ab}$$

解法(5)：

$$\because\quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$$

$$\therefore\quad x+y=(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)$$

$$=a+b+\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}$$

$$\geqslant a+b+2\sqrt{ab} \quad \left(当\frac{ay}{x}=\frac{bx}{y}时，不等式取等号\right)$$

故当$x=a+\sqrt{ab}$，$y=b+\sqrt{ab}$时，$x+y$有最小值，其$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$。

研究与分析

从这五个解法中，很自然地会提出如下的疑问：

(1) $x+y$的最小值已有三个，即

$$4\sqrt[4]{ab}-1；\ 2(\sqrt{a}+\sqrt{b})-1；\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

那么，哪一个是正确的，哪些是错误的？原因何在？

(2) 正确的解法是怎样得到的？

(3) $x+y$取最小值时，这时的x和y的值是如何求出的？

乍看起来，解法(1)和(2)都是很巧妙的。解法(1)是用整体观点，采用全局对策；而解法(2)却是采用拆拼组合对策。但是，这两种解法和结果都是错误的。对策处理并非不好，问题是这两种解法都存在对已知条件理解不深，分析不透的缺点，特别是在求最值的方法上有严重错误。其中未指明不等式取等号的条件就轻易地作出最小值已求出的错误结论是发生错误的根本原因。

解法(1)中，不等式取等号的条件是

$$x=y=\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$$

此式与已知条件

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1 \quad (a,\ b,\ x,\ y\in R^+)$$

联立，解得

$$x=y=\sqrt{a}=\sqrt{b}$$

从而得到

$$a=b$$

由此可知，若$a\neq b$，则$x+y\neq 4\sqrt[4]{ab}-1$，只有$x+y>4\sqrt[4]{ab}-1$的情况。由于题给条件的$a>0$，$b>0$是说明a、b都是任意正数，并非特指两个相等的正数a、b，所以求解得到的不等式取等号的条件：$a=b$，与已知条件矛盾，故此不等式不能取等号，于是不能把$4\sqrt[4]{ab}-1$当作$x+y$的最小值。

由于同样的原因，解法(2)也是错误的。

我们知道，不等式$x+\frac{a}{x}\geqslant 2\sqrt{a}$当$x=\frac{a}{x}$时即$x=\sqrt{a}$时取等号；不等式$y+\frac{b}{y}\geqslant 2\sqrt{b}$当$y=\sqrt{b}$时取等号，所以不等式

$x+\frac{a}{x}+y+\frac{b}{y}\geqslant 2(\sqrt{a}+\sqrt{b})$取等号的条件是：

$$x=\sqrt{a}, \quad y=\sqrt{b}$$

代入已知条件$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，得

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$$

此结果与a、b是任意正数的已知条件矛盾，故$x+y$只能大于$2(\sqrt{a}+\sqrt{b})-1$，不能把$2(\sqrt{a}+\sqrt{b})-1$当作$x+y$的最小值。

从作为一般解题方法研究来看，这两种解法发生漏洞与错误的原因，还在于未进行复核检查。复核检查是解题的必不可少的步骤，可称作复查处理。

解题方法研究，实际上可以看成是对上面四个"处理"的方法的研究。

解法(3)是一个好解法。由于题给条件是分式，不便于

研究问题，所以先化为整式，然后通过因式分解发现：正数$x-a$和$y-b$的积是一个定值ab，并且$x-a$可以与$y-b$相等。由此肯定此二正数必有最小值，余下的问题可利用均值定理很易得到$x+y$的最小值。

解法(4)是比较麻烦、不易理解的方法，但仍不失为一个求最值的重要方法。它的观点是将$x+y$转化为x(或y)的函数$f(x)$(或$f(y)$)，发现函数z是分式函数，于是将$z=f(x)$转化为x的二次方程，再根据题给条件：$x\in R^{+}$，且必有x的值满足$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，得到不等式组。解之，得出$z$的最小值。

此法曾有人称之为"Δ"法，这是不确切的、有害的。

解法(5)是最好的解法，但难以发现。这是由于人们往往习惯于解法(3)、(4)中的正向思维活动，而解法(5)虽也是从求$x+y$的表达式出发，但是首先逆向思维：$1=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$。从而得出关键的一步：$x+y=(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)$。然后正向思维，直接顺势得出：

$$\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}\geqslant 2\sqrt{ab}$$

同时研究等号成立条件，不难求出$x+y$的最小值。

这种思维活动，从某一点出发，先逆向再正向思维是背向思维。反映在对策处理上就是双向处理，可称作背向对策处理。

本题还有其他解法，不再介绍。

例3 设$\triangle ABC$的内角A、B、C都是锐角，求证

$$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$$

研究与分析：

本题和上题都是十分诱人深钻的问题。令人满意的解法

确实不易得到，其原因首先是由于对已知条件和待解决的问题的认识与分析未臻最佳.即信息处理不当，因而难以有良好的或最优的方法处理。

如果对已知条件的分析与认识仅仅是

$$0<A<90^\circ,\ 0<B<90^\circ,\ 0<C<90^\circ$$

那显然是不够的，因为这是对一般的锐角的认识而不是对锐角三角形的内角的认识，因认识不足，证法的选择自然难以优化。为了证出：

$$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$$

可采用自左向右(或自右向左)的证明方式及和差化积的方法进行推证。这是很麻烦的。

如果对题给条件的认识与分析再全面些，思维活动再发散些，便可得到：

$$90^\circ<A+B<180^\circ,\ 90^\circ<B+C<180^\circ,$$
$$90^\circ<C+A<180^\circ。$$

于是

$$90^\circ>A>90^\circ-B,\ 90^\circ>B>90^\circ-C,$$
$$90^\circ>C>90^\circ-A$$

与待证的问题的左、右两方对照并进行分析，不难想到较好证法使问题得到证明。

证：由题给条件，可知

$$90^\circ<A+B<180^\circ,\ 90^\circ<B+C<180^\circ,$$
$$90^\circ<C+A<180^\circ$$

否则相应的角C、A、B必须是直角或钝角，显然和已知条件矛盾。于是

$$90^\circ>A>90^\circ-B,\ 90^\circ>B>90^\circ-C,$$
$$90^\circ>C>90^\circ-A$$

所以

$$\sin A>\sin(90^\circ-B)=\cos B$$
$$\sin B>\sin(90^\circ-C)=\cos C$$
$$\sin C>\sin(90^\circ-A)=\cos A$$

由此三式可得

$$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$$

故原式成立。

根据本题的“研究与分析”，尚有一证法，请读者完成，并与上面的证法作比较。

例4 k为何实数时，方程

$$(k+1)x^2-4x+k-2=0$$

至少有一个正根？

研究与分析：

由题意可知，本题是研究k的取值问题。

当$k\neq-1$时，题给方程

$$(k+1)x^2-4x+k-2=0$$

是二次方程，这时方程至少有一正根的含义是指：

(1) 二根都是正的；

(2) 一根为正，一根为负；

(3) 一根为正，另一根是零。

而不合乎题意的有：

(1) 二根皆为负数；

(2) 一根为负，另一根为零。

对本题的整体的信息处理初步完成。下一步要研究对策处理问题。这是本题的重要问题。那么采取什么样的对策才可能较好地求出符合要求的k的取值？

有两种可供选用的方案。

首先，不管是哪种方案都要保证k的值使得方程必有实根，对那些使得方程无实解的k值，根本不去考虑，即必须

保证判别式$\Delta \geqslant 0$，在此基础上来研究下列两种方案：

(i)根据合乎题意的三种情况，逐个提 出对k的附加条件；

(ii)从满足$\Delta \geqslant 0$的k值中，排除使得二根皆负和一根为负而另一根为0的k值。

显然，采取后者为好。这是反向对策。此外，尚需注意$k=-1$的情况。(其根为负则应排除)

解：当$k=-1$时，方程

$$(k+1)x^2-4x+k-2=0$$

转化为

$$-4x-3=0$$

显然，这时方程无正数根，所以

$$k \neq -1$$

由于要求题给方程有实根，所以其判别式

$$\Delta=16-4(k+1)(k-2) \geqslant 0$$

解此不等式得

$$-2 \leqslant k \leqslant 3$$

当方程的二根皆为负数时，必有

$$\begin{cases} \dfrac{4}{2(k+1)}<0 \\ \dfrac{k-2}{2(k+1)}>0 \end{cases}$$

解此不等式组得

$$k<-1$$

当方程的一根为0时，方程中的常数项

$$k-2=0$$

即

$$k=2$$

于是方程这时转化为

$$3x^2-4x=0$$

由此可知，此方程不可能有负根，故不存在一根为负而另一根是0的情况，因而不予考虑。

因此，只需从保证方程$(k+1)x^2-4x+k-2=0$有二实根的k的取值范围$(-2\leqslant k\leqslant 3)$中，排除使方程有二负根的$k$值$(k<-1)$，便可得到使方程至少有一个正根的$k$的取值范围。这个取值范围是

$$-1<k\leqslant 3$$

注意：

因为题中所问的是：

k为何值时，方程至少有一个正根？而解法中的作法是：

方程有实根 $\Longrightarrow \Delta\geqslant 0\Longrightarrow -2\leqslant k\leqslant 3$

二根皆负 $\Longrightarrow k<-1$

所以必须复核逻辑推理方面的合理性，即是否可以反向推导回去。若能，则符合题问。

这是复查处理中的重要的数学逻辑检查。若在推理中的条件和结论是互为充要条件，在给出说明后，复查处理时则不需进行逻辑推理的检查。实际上，在本题的解法中所用的条件都是所得结论的充要条件，在指出这一事实后，可不进行反向推证。

例5 有8个英文字母，其中有大写字母五个：A、B、C、D、E，小写字母三个：a、b、c。今将它们排成一列，要求同时满足下列三个条件：

(1) A与a必须相邻；

(2) 排头和排尾都必须是大写字母；

(3) 小写字母不许相邻。

问总共有多少种不同的、没有重复字母的排法？

解：按照题给条件逐步完成8个字母的排列。

首先，由于A与a必须相邻，且a不许和b、c相邻，所以必须再从除A以外的4个大写字母(用"大"表示)中任取一个，共3个字母组成"A、a、大"或"大、a、A"的排列，不妨暂称作"串"，这样的排列共有

$$2P_4^1 \quad (种)；$$

第二步，将第一步中的每一个串看成"一个大写字母"，再和余下的三个大写字母进行全排列，这样的排列共有

$$P_4^4 \quad (种)；$$

不妨将其中的每一种都用"串、大、大、大"表示。

最后，将b和c插入"串、大、大、大"的中间的三个间隔空档中，这样得到的排列共有

$$P_3^2 \quad (种)。$$

由于是分步进行的，所以满足条件的排列总共有

$$2P_4^1 \cdot P_4^4 \cdot P_3^2 = 1152 \quad (种)。$$

研究与分析：

由于题给条件既多又杂，若处理不当，容易造成思路混乱不清，发生重复或遗漏，故以采取分步逐个满足各个条件，即先从最严、最难满足的条件开始，再依次分步满足其他条件较为稳妥。这是将突破口选在"严条件"上的分步宽严对策。当然，也有些问题将其突破口选在"宽条件"或"软点"上。

通过对上面的几个例子的研究，进一步说明我们在学习中已取得的认识：

(1) 解题的思维活动，大致是依次集中于：

(i) 对题中的条件与要求的信息的分析、处理，也就是信息处理；

(ii)研究解决特殊矛盾的对策即对策处理；

(iii)具体方法的确定与实行，就是方法处理；