1+1

轻巧夺冠

qingqiaoduoguan

同步讲解

全国著名特级高级教师联合编写

华东师大版

九年级数学 上

总主编：刘 强 美澳国际学校校长
学科主编：明知白 北京东城区数学特级教师
中国数学奥林匹克高级教练

金版
第三次修订

北京出版社 北京教育出版社

1+1

轻巧夺冠

同步讲解

全国著名特级高级教师联合编写

华东师大版

九年级数学 上

主　编：胡　田
副主编：高胜权
编　者：于昌喜　李秀平
王海艳　张　军
吴　敏　白文健

北京出版社　北京教育出版社

新　课　标

1+1 轻巧夺冠·同步讲解

（华东师大版）九年级数学（上）

刘强　总主编

*

北京出版社
北京教育出版社 出版

（北京北三环中路 6 号）

邮政编码：100011

北京出版社出版集团总发行

全国各地书店经销

北京市后沙峪印刷厂

*

880×1230 毫米　16 开本　5.125 印张　120000 字

2005 年 5 月第 3 次修订版　2005 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 7-200-05530-1/G·1882

定价：8.00 元

1+1 轻巧夺冠　金版 同步讲解

丛书特点

1、左右两栏对照讲解。左栏为知识点讲解；右栏为与知识点相对应的例题。

2、从基础知识的梳理，重点难点的突破（或新旧知识的融会贯通），与科技发展、生活实际相联系的综合、创新、应用三个层面解读每节内容。

3、采用“同步讲解”与“优化训练”相配套的“1+1”模式。有讲有练，方便实用。

《1+1轻巧夺冠·同步讲解》(华东师大版)九年级数学(上)

第22章 一元二次方程

22.1 一元二次方程

知识要点归纳

基础知识及掌握这些知识的方法，“源于教材，高于教材”。可以帮助你高效率地掌握基础知识结构，得到学法指导。

思维能力拓展

对重点、难点进行深层次的拓展讲解和思路点拨，能有效地形成基础知识的提高和升华，是考试得高分的关键所在。

名师解题　不但有解题思路、方法的分析和点拨，也有解题时易错点和易忽略点的提示，能有效地避免解题时心理屏蔽作用和“低级错误”，深入浅出，指点迷津。

第22章 一元二次方程

综合创新运用

用前瞻性、预测性的目光去分析、展示每节知识点可能出现的考题形式、命题角度、深度，并形成与科技发展、生活实际相联系的创新应用能力，努力做到与中、高考命题趋势“合拍”，步调一致。

素质能力测试

题目轻灵、简练，针对本节（课）所有知识点设计，与前面的讲解相互对应，形成“讲、例、练”三案合一的形式，学以致用，当堂达标。

点击知识点　标注在每道随堂训练题的后面，指明该道题目对应知识点的序号，形成对每个知识点的及时巩固和有效的强化训练。并能查漏补缺、一目了然。

1

真情讲练·轻巧夺冠

优化训练·学生训练用书

同步讲解

优化训练·教师讲评用书

目 录

第 21 章 分式

21.1 整式的除法

同步教材研读
名师解疑释惑

知识要点归纳

1 同底数幂除法法则

同底数相除，底数不变，指数相减．即 $a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a \neq 0$，m，n 为正整数，且 $m > n$）（见例 1、2）

2 单项式除以单项式法则

单项式除以单项式，把系数、同底数幂分别相除．（见例 3）

3 多项式除以单项式法则

多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加．（见例 5、6）

思维能力拓展

4 对于同底数幂除法法则的理解

（1）两个幂的底数相同，且是相除关系．

（2）商中幂的底数不变，指数相减．

（3）法则对于三个或三个以上的同底数幂相除仍然成立，应按从左到右的顺序演算．

（4）幂的底数和指数，可以是具体数，也可以是整式（除特殊说明外，后面遇到的底数均不为零）．

5 单项式除以单项式时，应注意以下几点

（1）对于只在被除式中含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式；

（2）系数相除与同底数幂相除的区别：前者是有理数的除法运算，后者实际是指数相减．

（3）单项式除以单项式，所得结果仍然是单项式．

6 多项式除以单项式实际转化为单项式除以单项式，应注意以下几点

（1）所得的商写成省略加号的代数和．

（2）用多项式的每一项除以单项式时，注意每一项的符号和单项式的符号．

（3）多项式除以单项式，所得结果仍为多项式，商的项数与多项式的项数（即被除式的次数）相同，不能遗漏．

典型题例解析
了解考题形式

名师解题

例1 计算

（1）$x^5 \div x^2$　　（2）$(xy)^5 \div (xy)^3$

（3）$a^4 \div (-a)^3$　　（4）$x^{m+3} \div x^3$

解析　此题利用同底数幂的除法法则计算，在计算中要分清底数与指数，如（2）题底数是 xy；还要注意符号问题，如（3）题中底数互为相反数，先确定好商的符号是负，然后再进行计算．

解：（1）原式 $= x^{5-2} = x^3$

（2）原式 $= (xy)^{5-3} = (xy)^2 = x^2y^2$

（3）原式 $= -a^4 \div a^3 = -a^{4-3} = -a$

（4）原式 $= x^{m+3-3} = x^m$

例2 计算：$[(-a)^4 \cdot (-a^2)^3] \div a^8 - a^2$

解析　此题是乘方乘除与减法的混合运算，应先算中括号中的乘方再从左到右进行乘除，最后做减法．

解：原式 $= [a^4 \cdot (-a^6)] \div a^8 - a^2$

$= -a^{10} \div a^8 - a^2$

$= -a^2 - a^2$

$= -2a^2$

例3 计算

（1）$(-2a^2b^3c)^3 \div (0.8a^3b^6)$

（2）$-(2a^2b^3c)^2 \cdot 2a^2c^2 \div (-6a^3b^3c) \div (3a^2b^2c^2)$

解析　（1）有乘方和除法两种运算，按先乘方后除法的运算顺序进行．

（2）题是单项式的乘除，乘方的混合运算，先乘方，然后从左到右按顺序进行．

解：（1）原式 $= -8a^6b^9c^3 \div 0.8a^3b^6$

$= (-8 \div 0.8)(a^6 \div a^3)(b^9 \div b^6)c^3$

$= -10a^3b^3c^3$

解：（2）原式 $= -4a^4b^6c^2 \cdot 2a^2c^2 \div (-6a^3b^3c) \div (3a^2b^2c^2)$

$= (-4 \times 2)\, a^{4+2}\, b^6c^{2+2} \div (-6a^3b^3c) \div (3a^2b^2c^2)$

$= -8a^6b^6c^4 \div (-6a^3b^3c) \div (3a^2b^2c^2)$

$= [(-8) \div (-6) \div 3]a^{6-3-2}b^{6-3-2}c^{4-1-2}$

$= \frac{4}{9}abc.$

综合创新运用

7. 同底数幂的乘除法往往与幂的乘方结合计算，可根据其运算性质按运算顺序计算.

如：计算：$x^{n+2}\cdot x^{n-2}\div(x^2)^{n-1}$

分析：观察所给的三个因式，发现根据幂的乘方$(x^2)^{n-1}=x^{2n-2}$，那么，原算式就变成关于同底数幂的乘、除的混合运算.

解法一：$x^{n+2}\cdot x^{n-2}\div(x^2)^{n-1}$
$=x^{n+2+n-2}\div x^{2n-2}$
$=x^{2n-(2n-2)}$
$=x^2$

解法二：$x^{n+2}\cdot x^{n-2}\div(x^2)^{n-1}$
$=x^{n+2}\cdot x^{n-2}\div x^{2n-2}$
$=x^{n+2+(n-2)-(2n-2)}$
$=x^2$

8. 同底数幂乘除法中，换元思想应用较多，往往把多巷式作为一个"整体"参加运算.

如：(1)$(x+y)^{m+2}\div(x+y)$

(2)$[(a+b)^5-2(a+b)^4-(a+b)^3]\div[2(a+b)^3]$

分析：(1)中把$(x+y)$看成一个"整体"参加运算，(2)中把$(a+b)$作为一个"整体"，这样运算较为简便.

解：(1)$(x+y)^{m+2}\div(x+y)$
$=(x+y)^{m+2-1}$
$=(x+y)^{m+1}$

(2)$[(a+b)^5-2(a+b)^4-(a+b)^3]\div[2(a+b)^3]$
$=\frac{1}{2}(a+b)^2-(a+b)-\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2-a-b-\frac{1}{2}$

9. 同底数幂除法法则的逆用

如：$10^m=5$，$10^n=4$，求10^{2m-3n}的值.

分析：10^{2m-3n}由$10^{2m}\div10^{3n}$得到.

$10^{2m}=(10^m)^2$，$10^{3n}=(10^n)^3$

解：$10^{2m-3n}=10^{2m}\div10^{3n}$
$=(10^m)^2\div(10^n)^3$
$=5^2\div4^3$
$=\frac{25}{64}$

10. 通过多项式除以单项式推广到多项式除以多项式以及多项式除以多项式的竖式计算、并明确关系，被除式=除式×商式+余式，当余式等于零时，除式就能整除被除式.

如：一个多项式除以$2x^2-1$，商式为$x-2$，余式为$x-1$，求这个多项式.

解析：被除式=除式×商式+余式

解：$\because(2x^2-1)(x-2)+(x-1)$
$=2x^3-x-4x^2+2+x-1$
$=2x^3-4x^2+1$

$\therefore$这个多项式是$2x^3-4x^2+1$

说明：(1)题中要注意系数的运算及符号，不能漏写c^3，在进行积的乘方运算时，括号里的每一个因式都要乘方.

(2)题在运算过程中，特别要小心系数符号的变化.

例4 计算：

(1)$[4(x-y)^5(x+y)^4]\div[6(y-x)^3\cdot(x+y)^2]$

(2)$(2\times10^4)^3+(-3\times10^6)^2-(6\times10^5)^3\div(2\times10)^3$

解析 (1)当底数不同时，不可直接用幂的运算法则，能变成同底的要变成同底后再做.

如$(y-x)^3=-(x-y)^3$

(2)题中$(6\times10^5)^3\div(2\times10)^3=216\times10^{15}\div(8\times10^3)$

相当于将"系数"及同底数幂分别相除

解：(1)原式$=[4(x-y)^5(x+y)^4]\div[-6(x-y)^3(x+y)^2]$
$=-\frac{2}{3}(x-y)^2(x+y)^2$

(2)原式$=8\times10^{12}+9\times10^{12}-(216\times10^{15})\div(8\times10^3)$
$=8\times10^{12}+9\times10^{12}-27\times10^{12}$
$=(8+9-27)\times10^{12}$
$=-10\times10^{12}$
$=-10^{13}$

例5 计算

(1)$(-36x^4+\frac{4}{3}x^3+9x^2)\div9x$

(2)$(0.25a^6b^4-\frac{1}{2}a^4b^5-\frac{1}{6}a^5b^3)\div(-0.5a^3b^2)$

解析 此题应先利用法则，把多项式除以单项式的运算转化为单项式除以单项式的运算，要注意多项式每一项及单项式的符号.

解：(1)原式$=(-36x^4)\div9x+\frac{4}{3}x^3\div9x+9x^2\div9x$
$=-4x^3+\frac{4}{27}x^2+x$

(2)原式$=0.25a^6b^4\div(-0.5a^3b^2)+(-\frac{1}{2}a^4b^5)\div(-0.5a^3b^2)+(-\frac{1}{6}a^5b^3)\div(-0.5a^3b^2)$
$=-\frac{1}{2}a^3b^2+ab^3+\frac{1}{3}a^2b$

例6 化简

$[(x+y)(x-y)-(x-y)^2+2y(x-y)]\div4y$

解析 此题若直接利用多项式除以单项式的法则进行计算，比较麻烦，而且显得杂乱无章. 如果先将多项式进行化简后，再除以单项式就简便多了.

解：$[(x+y)(x-y)-(x-y)^2+2y(x-y)]\div4y$
$=[x^2-y^2-(x^2-2xy+y^2)+2xy-2y^2]\div4y$
$=(x^2-y^2-x^2+2xy-y^2+2xy-2y^2)\div4y$
$=x-y$

素质能力测试

一、填空题

1. $(-a)^4\div(-a)=$________.　　2. $x^{2n+1}\div x^{n+1}=$________.

3. $(-a^{10})\div(-a^3)\div a=$________.　　4. $y^{10n}\div(y^{4n}\div y^{2n})=$________.

5. $100xy\div(-8y)=$________.　　6. $-45(a^3b^3)^2\div5a^5b^4=$________.

7. $(-3ax)^3\div($________$)=-3ax$　　8. $(8x^3y^2-6x^2y^2-2x^2y^3)\div3xy=$________.

二、选择题

9. 下面计算错误的是(　　)

A. $2x^3\div x^2=2x$　　B. $(2x)^2\div2x=x$　　C. $9(-x)^3\div3x^2=-3x$　　D. $2^3-2^2=2^2$

10. 下列各式计算中，正确的是(　　)

A. $x^{n+2}\div x^{n+1}=x^2$　　B. $(xy)^5\div(xy)^3=(x^2y)^2$

C. $x^{10}\div(x^4\div x^2)=x^8$　　D. $(x^{4n}\div x^{2n})\div x^n=x^{3n}$

11. 计算 $4x^2y^2\cdot(-3ax^2y)\div(-4xy)$ 的结果是(　　)

A. $3ax^3y^2$　　B. $-3ax^3y$　　C. $\frac{3}{4}ax^2y$　　D. $-\frac{3}{4}ax^2y$

12. 设甲数为 a，乙数为 b，则"甲数的 4 倍与乙数的差除以甲数与乙数的 4 倍的和"写成代数式是(　　)

A. $(4a-b)\div(a+4b)$　　B. $4a-b\div(a+4b)$

C. $(a+4b)\div(4a-b)$　　D. $4a-(a+4b)\div b$

13. 若 $3^{2n}=9, 3^{2m}=81$，则 7^{m-n} 的值为(　　)

A. 7　　B. 14　　C. 49　　D. 147

三、计算题

14. $(2ab)^2\cdot(-\frac{2}{5}a^5b^3c^4)\div(-2a^3b^2c)^2$

15. $(3x^2y^3z)^4\div(3x^3y^2z)^2\div(\frac{1}{2}xy^6z)$

16. $(-36\times10^{10})\div(-2\times10^2)^2\div(3\times10^2)^2$

17. $25^{2m}\div5^{2m-1}$

18. $(5x-2y)^4\div(2y-5x)^2$

19. $[3(a-b)^4-2(b-a)^3-(b-a)^2]\div(a-b)$

四、先化简再求值

20. $[5a^4(a^2-4a)-(-3a^6)^2\div(a^2)^3]\div(-2a^2)^2$，其中 $a=-5$.

点击知识点

1～4. 利用同底数幂除法法则

5、6、7. 单项式除以单项式

8. 多项式除以单项式

9. 同底数幂除法

10. 单项式除以单项式

11. 单项式乘、除法混合

12. 列式训练

13. 同底数幂除法法则运用

14、15、16. 积的乘方与单项式乘除混合

17、18. 化为同底数幂的除法

19. 相当于多项式除以单项式

20. 化简求值

21.2 分式及其基本性质

同步教材研读
名师解疑释惑

知识要点归纳

1 分式的概念

一般地,用 A、B 表示两个整式,$A \div B$ 就可以表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式.如 B 中含有字母,式子 $\frac{A}{B}$ 就叫做分式.其中,A 叫做分式的分子,B 叫做分式的分母($B \neq 0$).(见例1)

2 有理式的概念

整式和分式统称有理式,它的分类如下:

$$有理式\begin{cases}整式\\分式\end{cases}$$

注意:分式与整式的主要区别是:分母中是否含有字母,分母中含有字母的是分式;分母中不含字母的是整式.(见例2)

3 分式的基本性质

分式的分子与分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式,分式的值不变,这个性质叫做分式的基本性质,用式子表示是:$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot M}{B\cdot M}$,$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$,其中 M 是不等于零的整式.(见例3)

4 约分

(1)根据分式的基本性质,把一个分式的分子与分母的公因式约去,叫分式的约分,约分后、分子与分母没有公因式的分式,叫最简分式.(见例4)

(2)分式约分的主要步骤是:先把分式的分子、分母分别进行因式分解,然后再约去公因式.

想一想:与分数的约分相比较,分式约分的依据是什么?(依据是分式的基本性质)

说明:①当分式的分子、分母都是单项式或乘积的形式时,可直接进行约分,但要注意符号的处理.如:$\frac{-32a^2b^3c}{24b^2cd}$ 中由于分子的系数是负数时,为了避免错误,一般可根据分式的变号法则把符号先提到分式的前面去.②当分式的分子、分母是多项式时,一般应先把分子和分母分别分解因式,然后再约分.在约分时要根据分式的分子、分母的特点,具体问题具体分析,逐步培养自己分析问题与化简问题的能力;同时在约分过程中要强调分式约分的方法和分式约分的依据.

5 通分

(1)把 n 个异分母的分式分别化为与原来的分式相等的同分母分式,这个过程叫通分.

(2)通分的关键是确定几个分式的公分母.

典型题例解析
了解考题形式

名师解题

例1 下列各有理式中,哪些是整式?哪些是分式?

$\frac{x}{x+1}$,$-\frac{2x-y}{x-1}$,$\frac{1}{\pi}$,$\frac{x^2+1}{2}$,$\frac{1}{3}x+y^2$,$\frac{1}{x^2+y}$

解析 (1)区分整式与分式的唯一标准就是看分母,分母中不含字母的是整式,含有字母的是分式.(2)$\frac{1}{\pi}$ 中的 π 是常数,不是字母,所以 $\frac{1}{\pi}$ 是整式.

例2 填空:________和________统称为有理式.

解析 说明:本题主要考查知识(1)有理式的概念.(2)有理式是式而不是数.答案:整式,分式

例3 不改变分式的值,将下列各分式中的分子和分母中的各项系数都化为整数.

(1)$\frac{0.2x+0.3y}{0.5x-0.02y}$　　(2)$\frac{0.2x-\frac{1}{2}y}{\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y}$

解析 (1)要把分式的分子、分母中的各项系数都化为整数,可根据分式的基本性质,将分子、分母都乘以一个恰当的不为零的数,怎样确定这个数呢?第(1)小题中分子、分母中的各项系数是小数,这个适当的数应是各项系数的最小公倍数(50),第(2)小题中分子、分母中各项系数$\left(0.2=\frac{1}{5}\right)$是分数,这个适当数应该是各项系数的分母的最小公倍数,即5,2,4,3的最小公倍数60.(2)将分式的分子、分母都乘以(或除以)同一个不为零的数时,要乘遍分子、分母每一项,防止漏乘.

解:(1)原式 $=\frac{(0.2x+0.3y)\times 50}{(0.5x-0.02y)\times 50}=\frac{10x+15y}{25x-y}$

(2)原式 $=\frac{\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{2}y\right)\times 60}{\left(\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y\right)\times 60}=\frac{12x-30y}{15x-40y}$

例4 约分:(1)$\frac{a^2-6a+9}{a^2-9}$　　(2)$\frac{x^2y(5y^2-5x^2)}{xy(10x^2-10xy)}$

解析 (1)分式的分子、分母分别分解因式后,再约去分子和分母的公因式.(2)要注意括号内的式子还可以分解因式,应继续分解,便于找到隐含在分子与分母中的公因式,约分的结果必须是分式或整式.

解:(1)原式 $=\frac{(a-3)^2}{(a+3)(a-3)}=\frac{a-3}{a+3}$

(3)分式的最简公分母的确定：通常取各分母所有因式的最高次幂的积作为公分母，也叫做最简公分母．当分式的分母是多项式时，先把各个分母按同一个字母的降幂(或升幂)排列，然后对分母进行因式分解；确定最简公分母，最后利用分式的基本性质把各分式化为同分母的分式，即通分．(见例 5)

(4)通分的目的是为异分母的分式加减服务的．(此部分内容在分式加减中有所体现)

思维能力拓展

6 对分式概念的理解

(1)分式是两个整式相除的商式，其中分子是被除式，分母是除式，而分数线起除号和括号的作用．

如$\frac{a+b}{a-b}$表示$(a+b)\div(a-b)$

(2)分式的分子可以含有字母，也可以不含字母，但分式的分母中一定要含字母．

(3)分式的分母不能为零是分式概念的重要组成部分．

注意：本章中没有特别说明，所遇到的分式都是有意义的，也就是说分式中的值不等于零、如：

给出分式$\frac{1}{x-1}$，则隐含着 $x\neq 1$

7 分式是否有意义的条件

(1)分式有意义的条件：分母不等于零，见例 6(1)

(2)分式无意义的条件：分母等于零．见例 6(2)

(3)分式的值等于零的条件：分子等于零且分母不等于零．见例 6(3)

注意：必须在分式有意义的前提下，才能谈分式的值是多少，如：$\frac{|y|-1}{y+1}$的值为零，这个条件隐含着 $y+1\neq 0$，即 $y\neq -1$．

8 对分式基本性质应从以下两方面加深理解

(1)基本性质中的 A、B、M 表示的是整式，其中 $B\neq 0$ 是已知条件中隐含的条件，一般在解题过程中不需要强调；$M\neq 0$ 是在解题过程中另外附加的条件，在运用分式的基本性质时，必须重点强调 $M\neq 0$ 这个前提条件．

如$\frac{a}{b}=\frac{ab}{b^2}$由已知条件$\frac{a}{b}$有意义，可以知道 $b\neq 0$，因此在用 b 去乘以分式的分子、分母时，不需要特别强调 $b\neq 0$ 这个条件．(见例 7)

再如：$\frac{y+1}{y-1}=\frac{y^2+2y+1}{y^2-1}$，这个变形是在已知分式$\frac{y+1}{y-1}$的分子、分母都乘以同一个整式 $y+1$ 得到的，是在 $y+1\neq 0$ 这个条件下才能进行的．所以 $y+1\neq 0$ 这个条件必须另外附加强调．(见例 8)

(2)应用分式的基本性质时，要深刻理解“都”与“同”这两个字的含义，避免犯只乘分子或只乘分母的错误，也要避免只乘分子或分母中部分项的错误．(见例 9)

(2)原式 $=\frac{-x^2y(5x^2-5y^2)}{xy(10x^2-10xy)}=-\frac{5x^2y(x+y)(x-y)}{10x^2y(x-y)}$

$=-\frac{x+y}{2}$

例 5 通分：

(1)$\frac{4a}{5b^2c}$，$\frac{3c}{10a^2b}$，$\frac{5b}{-2ac^2}$

(2)$\frac{1}{x(x+y)}$，$\frac{x}{y(x-y)}$，$\frac{y}{(x+y)(x-y)}$

(3)$\frac{1}{x^2-4}$，$\frac{x}{4-2x}$

解析 (1)题通分时要注意第三个分式分母上的“－”号的处理．(2)中分式的分母是整式的积的形式，其通分方法不变．(3)题是分母是多项式的分式通分．

解：(1)∵最简公分母是 $10a^2b^2c^2$

$\therefore \frac{4a}{5b^2c}=\frac{4a\cdot 2a^2c}{5b^2c\cdot 2a^2c}=\frac{8a^3c}{10a^2b^2c^2}$

$\frac{3c}{10a^2b}=\frac{3c\cdot bc^2}{10a^2b\cdot bc^2}=\frac{3bc^3}{10a^2b^2c^2}$

$\frac{5b}{-2ac^2}=-\frac{5b\cdot 5ab^2}{2ac^2\cdot 5ab^2}=-\frac{25ab^3}{10a^2b^2c^2}$

(2)最简公分母是 $xy(x+y)(x-y)$

$\therefore \frac{1}{x(x+y)}=\frac{1\cdot y(x-y)}{x(x+y)\cdot y(x-y)}=\frac{y(x-y)}{xy(x+y)(x-y)}$

$\frac{x}{y(x-y)}=\frac{x\cdot x(x+y)}{y(x-y)\cdot x(x+y)}=\frac{x^2(x+y)}{xy(x+y)(x-y)}$

$\frac{y}{(x+y)(x-y)}=\frac{y\cdot xy}{(x+y)(x-y)\cdot xy}=\frac{xy^2}{xy(x+y)(x-y)}$

(3)最简公分母是 $2(x+2)(x-2)$

$\therefore \frac{1}{x^2-4}=\frac{1\times 2}{(x+2)(x-2)\times 2}=\frac{2}{2(x+2)(x-2)}$

$\frac{x}{4-2x}=-\frac{x(x+2)}{2(2-x)\cdot(x+2)}=-\frac{x(x+2)}{2(x+2)(x-2)}$

例 6 当 x 取何值时，分式$\frac{x^2-3x-4}{x^2-2x-3}$(1)有意义？(2)无意义？(3)分式的值为零．

解析 ①分母不等于零时，分式有意义．

②当分母等于零时，分式无意义．

解：(1)当 $x^2-2x-3\neq 0$，即$(x-3)\cdot(x+1)\neq 0$，即当 $x\neq 3$，且 $x\neq -1$ 时，分式有意义．

(2)当 $x=3$ 或 $x=-1$ 时，分式无意义．

(3)由 $x^2-3x-4=0$ 得$(x-4)(x+1)=0$

$\therefore x=4$ 或 $x=-1$

∴当 $x=4$ 时，分式值为零

想一想(3)中 $x=-1$ 为什么不取呢？

例 7 写出下列等式中的未知分子或未知分母

(1)$\frac{a-b}{ab^2}=\frac{(\quad)}{a^2b^3}$　　(2)$\frac{1}{b}=\frac{b}{(\quad)}$

解析 (1)等号两边的分母都是已知的，$a^2b^3=ab^2\cdot ab$，根据分式的基本性质$(a-b)$也要乘以 ab，所以括号内应填$(a-b)ab$．

(2)等号两边的分子都是已知的，由分式的左边知 $b\neq 0$．而分子由 1 变为 b，是按照分式的基本性质分式的分子、分母同乘以 b 得到的，所以括号内应填 b^2．

9 对通分概念应明确以下几点

(1)通分的依据是分式的基本性质

(2)通分后的各分式分母相同

(3)通分后的各分式分别与原来的分式相等

(4)通分的关键是确定最简公分母.(见例10)

10 确定最简公分母的一般步骤

(1)取各分母数字系数的最小公倍数.

(2)凡出现的字母(或含字母的式子)为底的幂的因式都要取.

(3)相同字母(或含字母的式子)的幂的因式取指数最大的.(见例11)

综合创新运用

11 分式在物理、化学中有着重要应用

如(1)浓度配比问题.(见例12)

(2)把阻值分别为 R_1、R_2 的两电阻并联求它们的并联阻值? 由公式 $\frac{1}{R_{并}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$,得 $R_{并}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$.(见例13)

12 分式的基本性质一般与整式乘除法,因式分解,添(去)括号法则,分式的意义相结合.

如:不改变分式的值,使下列各式的分子、分母的最高次项系数为正数

(1) $\frac{1-a-a^2}{1+a^2-a^3}$.

(2) $\frac{y+3}{-y^2+3y-2}$.

(1)式中分子、分母要同时改变符号,运用了添括号法则.

(2)式中只有分母要变号,分子不变号,所以分式要变号,运用了添括号的法则.

解:(1) $\frac{1-a-a^2}{1+a^2-a^3}$

$=\frac{-(a^2+a-1)}{-(a^3-a^2-1)}$

$=\frac{a^2+a-1}{a^3-a^2-1}$.

(2) $\frac{y+3}{-y^2+3y-2}$

$=\frac{y+3}{-(y^2-3y+2)}$

$=-\frac{y+3}{y^2-3y+2}$.(见例14).

13 分式的基本性质是分式约分、通分的依据

如(1)约分 $\frac{-16x^2y^3}{20xy^4}=-\frac{4xy^3\cdot 4x}{4xy^3\cdot 5y}=-\frac{4x}{5y}$

(2)通分 $\frac{1}{x-y}$,$\frac{1}{x+y}$,

解:$\frac{1}{x-y}=\frac{1\cdot(x+y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{x+y}{x^2-y^2}$,

$\frac{1}{x+y}=\frac{1\cdot(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{x-y}{x^2-y^2}$

例8 先约分,再求值 $\frac{3+2a-a^2}{a^2-7a+12}$ 其中 $a=-3$.

解析 原式 $=\frac{(-a+3)(a+1)}{(a-3)(a-4)}=\frac{-(a-3)(a+1)}{(a-3)(a-4)}$.

$\because a=-3$,$\therefore a-3=-6\neq 0$.

$\therefore$ 原式 $=-\frac{a+1}{a-4}=\frac{-(-3+1)}{-3-4}=-\frac{2}{7}$.

例9 选择:下列运用正确的是(　　).

A. $\frac{a}{b}=\frac{a}{b^2}$　　B. $\frac{a}{b}=\frac{a+a}{b^2}$

C. $\frac{a+1}{b}=\frac{ab+1}{b^2}$　　D. $\frac{a}{b}=\frac{ab}{b^2}$

解析 A分式只乘以分母,错误;B中分式的分子、分母出现分母乘以 b 而分子加上 a 的错误,C出现分子、分母中部分项乘以 b 的错误,而只有D正确,所以应选D.

例10 通分:$\frac{a+5}{5a-20}$,$\frac{5}{a^2-9a+20}$

解析 最简公分母是 $5(a-4)(a-5)$.

$\therefore \frac{a+5}{5a-20}=\frac{(a+5)(a-5)}{5(a-4)(a-5)}=\frac{a^2-25}{5(a-4)(a-5)}$.

$\frac{5}{a^2-9a+20}=\frac{5\times 5}{(a-4)(a-5)\times 5}=\frac{25}{5(a-4)(a-5)}$.

例11 填空:

$\frac{x-1}{-2a(x-y)}$,$\frac{4}{3b(y-x)}$ 的最简公分母是________.

解析 分母的数字系数的最小公倍数是6,相同多项式为 $(x-y)$ 或 $(y-x)$,最大指数是1.

$\therefore$ 最简公分母是 $6ab(x-y)$ 或 $6ab(y-x)$.

例12 b kg的糖完全溶解在 a kg的水中,则该溶液的浓度为多少?

解析 $\frac{b}{a+b}\times 100\%$.

例13 已知一个圆台的下底面是上底面的4倍,将圆台放在桌面上,桌面承受压强 p N/m²,若将圆台倒放,则桌面受到的压强为多少?

解析 该圆台的压力为 G N,下底面积为 S_1 m²,上底面积为 S_2 m²,

则 $p=\frac{G}{S_1}$,$S_1=4S_2$

$\therefore G=pS_1$,$S_1=4S_2$

$\therefore G=pS_1=4pS_2$

$\therefore$ 当圆台倒放时,桌面受到的压强为

$\frac{G}{S_2}=\frac{4S_2p}{S_2}=4p$ (N/m²).

答:桌面受到的压强为 $4p$ N/m².

例14 不改变分式的值,把下列各式的分子与分母中各项的系数都化为整数:

(1) $\dfrac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y}{\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y}$　　(2) $\dfrac{0.6x^2+\frac{4}{5}x}{\frac{1}{2}x^2-0.4x}$

解析 (1) $\dfrac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y}{\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y}=\dfrac{\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y\right)\times 12}{\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y\right)\times 12}=\dfrac{4x+3y}{4x-3y}$

(2) $\dfrac{0.6x^2+\frac{4}{5}x}{\frac{1}{2}x^2-0.4x}=\dfrac{\left(0.6x^2+\frac{4}{5}x\right)\times 10}{\left(\frac{1}{2}x^2-0.4x\right)\times 10}=\dfrac{6x^2+8x}{5x^2-4x}$

素质能力测试

一、选择题

1. 在有理式 $-2ab$，$-\dfrac{x}{y+2}$，$\dfrac{x+y}{x^2-y^2}$，$\dfrac{1}{2}x^2y-3xy$，$\dfrac{59}{x}+\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{x-1}{2}$，$\dfrac{y^2}{y}$ 中，分式的个数为(　　)

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

2. 如果分式 $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$ 有意义，则 x 的取值为(　　)

A. $x\neq 2$　　B. $x\neq 1$ 或 $x\neq 2$　　C. $x\neq 1$ 且 $x\neq 3$　　D. $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$

3. 如果把分式 $\dfrac{a+2b}{a+b}$ 中的 a、b 都扩大 10 倍，那么分式的值(　　)

A. 扩大 10 倍　　B. 缩小 10 倍　　C. 是原来的 $\dfrac{2}{3}$　　D. 不变

4. 下列等式成立的是(　　)

A. $\dfrac{a+b}{a^2-b^2}=a-b$　　B. $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^3-b^3}=\dfrac{1}{a-b}$

C. $\dfrac{b^2-2ab+a^2}{a-b}=b-a$　　D. $\dfrac{a-b}{(b-a)^2}=\dfrac{1}{a-b}$

5. 不改变分式的值，使分母的第一项系数是正数，下面各式中正确的做法是(　　)

A. $\dfrac{-x+y}{-x-y}=\dfrac{x+y}{x-y}$　　B. $\dfrac{1}{-x-y}=-\dfrac{1}{x+y}$

C. $\dfrac{-x+y}{-x-y}=\dfrac{x+y}{x+y}$　　D. $\dfrac{-x-y}{-y-x}=-\dfrac{x+y}{y-x}$

6. 下列分式中是最简分式的为(　　)

A. $\dfrac{4y}{6x^2}$　　B. $\dfrac{2(x-y)^2}{y-x}$　　C. $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$　　D. $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

二、填空题

7. $\dfrac{x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{(\quad)}{x+y}$　　8. $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+y}{(\quad)}=\dfrac{x^2+xy}{(\quad)}$

三、解答题

9. 当 x 取何值时，分式 $\dfrac{1-x}{-x^2+8x+20}$ 没有意义？

点击知识点

1. 有理式的分类
2. 分式有意义的条件
3. 分式基本性质的运用
4. 分式的恒等变形
5. 利用分式的基本性质进行恒等变换
6. 最简分式的判断
7. 约分
8. 通分后再利用性质
9. 分式没有意义的条件

10. 已知分式$\frac{|y|-2}{y^2-y-2}$的值为零,求 y 的值.

10. 分式的值为零的条件

11. 当 x 为何值时,分式$\frac{2x+3}{1+3x}$的值为 1?

11. 在分式有意义的条件下求取值

12. 不改变分式的值,将下列分式的分子和分母各项的系数都化为整数.

(1)$\frac{0.2x-0.03y^2}{0.4x+0.3y}$　　(2)$\frac{3-\frac{3}{2}y}{\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y}$

12. 系数化整

13. 不改变分式的值,使下列分式的分子与分母的最高项的系数是正数.

(1)$\frac{-x^2-1}{3-x}$　　(2)$\frac{1+y+y^2}{1+y-y^2}$

13. 分式变号

21.3　分式的运算

同步教材研读
名师解疑释惑

典型题例解析
了解考题形式

知识要点归纳

1 分式的乘除法法则(见例 1)

分式乘以分式,用分子的积做积的分子,分母的积做积的分母.

即$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$　$(b,d\neq0)$

如:$\frac{2y}{3x}\cdot\frac{9x^2}{4y^2}=\frac{2y\cdot9x^2}{3x\cdot4y^2}=\frac{3x}{2y}$

分式除以分式,把除式的分子、分母颠倒位置后,与被除式相乘.

即$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}(b,d,c\neq0)$

如:$\frac{a}{a^2-1}\div\frac{a^2}{a^2+a}=\frac{a}{a^2-1}\cdot\frac{a^2+a}{a^2}=\frac{a\cdot(a^2+a)}{(a^2-1)\cdot a^2}$

$=\frac{a\cdot a(a+1)}{(a+1)(a-1)\cdot a^2}=\frac{1}{a-1}$

名师解题

例 1 计算

(1)$\frac{a^2b}{-3c}\cdot\frac{-6cd}{5ab^2}$　　(2)$\frac{-3m^2}{4n^2}\div6mn^4$

(3)$\frac{a^2-4}{a^2-4a+3}\cdot\frac{a-3}{a^2+3a+2}$　(4)$\frac{a^2+2ab+b^2}{ab-b^2}\div\frac{ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$

解析 (1)题可以根据分式乘法法则直接相乘,但要注意符号.(2)题中的除式是整式,可以把它看成$\frac{6mn^4}{1}$,再颠倒相乘.(3)(4)题都需要把分式的分子、分母先分解因式,再计算.

解:(1)$\frac{a^2b}{-3c}\cdot\frac{-6cd}{5ab^2}=\frac{a^2b\cdot(-6cd)}{(-3c)\cdot5ab^2}=\frac{2ad}{5b}$

(2)$\frac{-3m^2}{4n^2}\div6mn^4=\frac{-3m^2}{4n^2}\div\frac{6mn^4}{1}=\frac{-3m^2}{4n^2}\cdot\frac{1}{6mn^4}=-\frac{m}{8n^6}$

(3)$\frac{a^2-4}{a^2-4a+3}\cdot\frac{a-3}{a^2+3a+2}=\frac{(a+2)(a-2)}{(a-1)(a-3)}\cdot\frac{a-3}{(a+1)(a+2)}$

2. 分式的乘方法则(见例 2)

分式的乘方是把分式的分子、分母各自乘方.

即:$(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$($n$ 为正整数)

如:(1)$(\frac{b}{-3a})^2=\frac{b^2}{(-3a)^2}=\frac{b^2}{9a^2}$

(2)$(\frac{a+b}{a^2-b^2})^2=[\frac{a+b}{(a+b)(a-b)}]^2=\frac{1}{(a-b)^2}$

3. 同分母的分式加减法则(见例 3)

同分母的分式相加减,分母不变,分子相加减.

即:$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$　($b\neq0$)

$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$　($b\neq0$)

如:(1)$\frac{2x}{x+y}+\frac{2y}{x+y}=\frac{2x+2y}{x+y}=\frac{2(x+y)}{x+y}=2$

(2)$\frac{x}{x-y}-\frac{y}{y-x}=\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x-y}=\frac{x+y}{x-y}$

(3)$\frac{a^2}{a^2-b^2}+\frac{b^2}{b^2-a^2}=\frac{a^2}{a^2-b^2}-\frac{b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}=1$

4. 异分母分式加减法则(见例 4)

异分母分式相加减,先通分为同分母的分式,然后再加减.

即$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$　(b、$d\neq0$)

如:(1)$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}=\frac{a+b}{ab}$

(2)$\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}=\frac{2}{(x+2)(x-2)}-\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{2-(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{-x+4}{(x+2)(x-2)}=-\frac{x-4}{(x+2)(x-2)}$

思维能力拓展

5. 进行分式的乘除运算时要注意:(见例 5)

(1)乘法、除法是同级运算,应按照从左到右的顺序进行.

(2)对于乘除运算,最好先将除法化成乘法,这样可以避免运算顺序不对造成的错误.

如计算　$x\div y\cdot\frac{1}{y}=\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{x}{y^2}$

而不能这样计算:$x\div y\cdot\frac{1}{y}=x\div1=x$

(3)做分式的除法时,注意变除号为乘号,把除式的分子、分母"颠倒变换位置";并注意,除式是整式时,可以看作是分母为 1 的式子进行运算.

如:$\frac{x-4}{x-5}\div(x-5)=\frac{x-4}{x-5}\cdot\frac{1}{x-5}=\frac{x-4}{(x-5)^2}$

6. 分式乘方运算应该注意:

(1)在一个算式中,如果既有乘方,又有乘除,要先算乘方,再算乘除.

(2)分式乘方法则中"把分子、分母各自乘方",这里的分子、分母指的是分子、分母的整体,而不是部分.

$=\frac{(a+2)(a-2)(a-3)}{(a-1)(a-3)(a+1)(a+2)}=\frac{a-2}{a^2-1}$

(4)$\frac{a^2+2ab+b^2}{ab-b^2}\div\frac{ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{(a+b)^2}{b(a-b)}\div\frac{b(a+b)}{(a-b)^2}$

$=\frac{(a+b)^2}{b(a-b)}\cdot\frac{(a-b)^2}{b(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{b^2}$

例2 计算

(1)$(\frac{xy^2}{-x^2y})^4$　　(2)$(\frac{x^2+xy}{-z})^3\div(\frac{x^2-y^2}{-xz})^4$

解析　分式的乘方是把分子、分母各自乘方.计算时要注意符号,乘方之前也可以对分子、分母先约分.

解:(1)方法一:$(\frac{xy^2}{-x^2y})^4=\frac{(xy^2)^4}{(-x^2y)^4}=\frac{x^4y^8}{x^8y^4}=\frac{y^4}{x^4}$

方法二:$(\frac{xy^2}{-x^2y})^4=(-\frac{y}{x})^4=\frac{y^4}{x^4}$

(2)$(\frac{x^2+xy}{-z})^3\div(\frac{x^2-y^2}{-xz})^4$

$=[\frac{x(x+y)}{-z}]^3\div[\frac{(x+y)(x-y)}{-xz}]^4$

$=\frac{x^3(x+y)^3}{-z^3}\cdot\frac{x^4z^4}{(x+y)^4(x-y)^4}$

$=-\frac{x^7z}{(x+y)(x-y)^4}$

例3 计算

(1)$\frac{2x-3y}{4xyz}+\frac{2y+z}{4yxz}-\frac{3z+2x}{4zxy}$

(2)$\frac{3y-x}{x^2-y^2}-\frac{x+2y}{x^2-y^2}-\frac{3x-4y}{y^2-x^2}$

解析　本题是同分母分式相加减.

(1)题中 $4xyz=4yxz=4zxy$

(2)题中 $x^2-y^2=-(y^2-x^2)$

解:(1)$\frac{2x-3y}{4xyz}+\frac{2y+z}{4yxz}-\frac{3z+2x}{4zxy}$

$=\frac{2x-3y+2y+z-3z-2x}{4xyz}$

$=\frac{-y-2z}{4xyz}=-\frac{y+2z}{4xyz}$

(2)$\frac{3y-x}{x^2-y^2}-\frac{x+2y}{x^2-y^2}-\frac{3x-4y}{y^2-x^2}$

$=\frac{3y-x}{x^2-y^2}-\frac{x+2y}{x^2-y^2}+\frac{3x-4y}{x^2-y^2}$

$=\frac{3y-x-x-2y+3x-4y}{x^2-y^2}=\frac{x-3y}{x^2-y^2}$

例4 计算

(1)$\frac{1}{6x-4y}-\frac{1}{6x+4y}-\frac{3x}{4y^2-9x^2}$

(2)$\frac{y^2}{x-y}+(x+y)$

解析　本题是异分母分式相加减,应先确定最简公分母.

解:(1)$\frac{1}{6x-4y}-\frac{1}{6x+4y}-\frac{3x}{4y^2-9x^2}$

$=\frac{1}{2(3x-2y)}-\frac{1}{2(3x+2y)}+\frac{3x}{(3x+2y)(3x-2y)}$

$=\frac{(3x+2y)-(3x-2y)+6x}{2(3x+2y)(3x-2y)}=\frac{6x+4y}{2(3x+2y)(3x-2y)}$

(3)还要注意负数的乘方的规律,负数的偶次幂是正数,奇次幂是负数.

7 **同分母的分式相加减的注意事项:**

(1)分子相加减时,要把每个分子看成是一个整体而加上括号.

(2)把分子相减后,如果所得结果不是最简分式,要约分.

8 **异分母的分式相加减的一般步骤:**

(1)通分将异分母分式化成同分母分式.

(2)写成分母不变,分子相加减的形式.

(3)分子去括号,合并同类项.

(4)将结果化成最简分式或整式.

9 **分式四则混合运算:**

(1)顺序:

先乘方,再乘除,最后再加减,遇到括号,先算括号内的.(见例6)

(2)注意:

灵活运用交换律、结合律、分配律,运算结果化成最简分式或整式.

(3)对于含有绝对值符号的分式,应根据绝对值的概念,先去掉绝对值符号,再化简分式.

综合创新运用

10 巧用乘法公式,因式分解,符号变换,通分,约分等一系列知识,能简便运算.

如:$[\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}]\div(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y})$

$=[(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y})(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y})]\div(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y})=\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=\frac{2x}{x^2-y^2}$

11 **灵活变形,求分式的值**(见例7)

如:已知 $x^2-5x-2\,004=0$

求代数式$\frac{(x-2)^3-(x-1)^2+1}{x-2}$的值.

解:$\frac{(x-2)^3-(x-1)^2+1}{x-2}=(x-2)^2-\frac{(x-1)^2-1}{x-2}$

$=(x-2)^2-\frac{x(x-2)}{x-2}=x^2-4x+4-x=x^2-5x+4$

$\because x^2-5x-2\,004=0,\therefore x^2-5x=2\,004$

$\therefore x^2-5x+4=2\,008,$

$\therefore \frac{(x-2)^3-(x-1)^2+1}{x-2}=2\,008$

12 **繁分式的化简**

分式的分子或分母中含有分式的分式叫繁分式.繁分式中主分数线最长,它标志着本身的分子、分母.

如:化简 $\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x+1}}$

解法一:$\because x\neq0,x+1\neq0,\therefore x(x+1)\neq0$(题中隐含的条件)

$=\frac{2(3x+2y)}{2(3x+2y)(3x-2y)}=\frac{1}{3x-2y}$

(2)$\frac{y^2}{x-y}+(x+y)=\frac{y^2}{x-y}+\frac{(x+y)(x-y)}{x-y}$

$=\frac{y^2+x^2-y^2}{x-y}=\frac{x^2}{x-y}$

例5 计算

$\frac{x^2+2x-3}{x^2-9}\cdot\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}\div\frac{x-2}{x-3}$

解析 $\frac{x^2+2x-3}{x^2-9}\cdot\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}\div\frac{x-2}{x-3}$

$=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-3)}\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)}\cdot\frac{x-3}{x-2}$

$=\frac{(x+3)(x-1)(x-2)(x-3)(x-3)}{(x+3)(x-3)(x-1)(x-3)(x-2)}=1$

例6 计算

(1)$(\frac{a^2-4}{a^2-4a+4}-\frac{1}{a-2})\div\frac{a+1}{a+2}$

(2)$(a-\frac{a}{a+1})\div\frac{a^2-2a}{a^2-4}\cdot\frac{a+1}{a^2+3a+2}$

解析 (1)原式$=[\frac{(a+2)(a-2)}{(a-2)^2}-\frac{1}{a-2}]\cdot\frac{a+2}{a+1}$

$=[\frac{a+2}{a-2}-\frac{1}{a-2}]\cdot\frac{a+2}{a+1}$

$=\frac{a+1}{a-2}\cdot\frac{a+2}{a+1}$

$=\frac{a+2}{a-2}$

(2)原式$=\frac{a(a+1)-a}{a+1}\div\frac{a(a-2)}{(a+2)(a-2)}\cdot\frac{a+1}{(a+1)(a+2)}$

$=\frac{a^2}{a+1}\cdot\frac{a+2}{a}\cdot\frac{1}{a+2}$

$=\frac{a}{a+1}$

例7 若$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$.求代数式$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值.

解析 $\because \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3,\therefore\frac{y-x}{xy}=3,\therefore x-y=-3xy$

$\therefore\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=\frac{2(x-y)+3xy}{(x-y)-2xy}=\frac{-6xy+3xy}{-3xy-2xy}=\frac{-3xy}{-5xy}$

$\because x\neq0,y\neq0,\therefore$原式$=\frac{3}{5}$

例8 计算 $\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+5)}$.

解析 本题用常规方法通分计算,计算量是比较大的,联想到$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$,将其逆用,采取拆项法使出现正负相抵消的现象,使问题简化.

解:原式$=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}+\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+4}+\frac{1}{a+4}-\frac{1}{a+5}$

$=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+5}=\frac{4}{(a+1)(a+5)}$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{(1-\frac{1}{x})\cdot x(x+1)}{(1-\frac{1}{x+1})\cdot x(x+1)}=\dfrac{x(x+1)-(x+1)}{x(x+1)-x}$

$=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x(x+1-1)}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

解法二：

原式 $=(1-\dfrac{1}{x})\div(1-\dfrac{1}{x+1})=\dfrac{x-1}{x}\div\dfrac{x+1-1}{x+1}$

$=\dfrac{x-1}{x}\cdot\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

例9　已知 $abc=1$，试求 $\dfrac{a}{1+a+ab}+\dfrac{b}{1+b+bc}+\dfrac{c}{1+c+ca}$ 的值.

解法一：$\because abc=1$　$\therefore c=\dfrac{1}{ab}$

$\therefore$ 原求值式 $=\dfrac{a}{1+a+ab}+\dfrac{b}{1+b+\frac{b}{ab}}+\dfrac{\frac{1}{ab}}{1+\frac{1}{ab}+\frac{a}{ab}}$

$=\dfrac{a}{1+a+ab}+\dfrac{ab}{a+ab+1}+\dfrac{1}{a+ab+1}$

$=\dfrac{a+ab+1}{1+a+ab}=1$

解法二：原求值式 $=\dfrac{a}{1+a+ab}+\dfrac{ab}{a+ab+abc}+\dfrac{abc}{ab+abc+a^2bc}$

$=\dfrac{a}{1+a+ab}+\dfrac{ab}{1+a+ab}+\dfrac{1}{1+a+ab}=\dfrac{a+ab+1}{1+a+ab}=1$

素质能力测试

一、选择题

1. 计算 $a^2\div b\times\dfrac{1}{b}\div c\times\dfrac{1}{c}\div d\times\dfrac{1}{d}$ 的值等于(　　)

A. a^2　　B. $\dfrac{a^2}{b^2c^2d^2}$　　C. $\dfrac{a^2}{bcd}$　　D. 其他结果

2. $(-\dfrac{b^2}{a^2})^{2n}$(n 是正整数)的值是(　　)

A. $\dfrac{b^{2+2n}}{a^{2+2n}}$　　B. $-\dfrac{b^{4n}}{a^{4n}}$　　C. $-\dfrac{b^{2n}}{a^{2+2n}}$　　D. $\dfrac{b^{4n}}{a^{4n}}$

3. 当 $m<0$ 时，计算 $\dfrac{|m^3|-m^2}{m}\div|m|$ 的结果是(　　)

A. $-m+1$　　B. $-m-1$　　C. $m+1$　　D. $m-1$

4. 若 $x^2+x-5=0$，则 $x^2+x-\dfrac{1}{x^2+x}$ 的值为(　　)

A. $5\dfrac{1}{5}$　　B. $4\dfrac{4}{5}$　　C. 5　　D. 其他结果

二、填空题

5. 计算：$(-64a^3b)\cdot(-\dfrac{b^2}{24a^2x})$ 结果是________.

6. 计算：$\dfrac{a^2-16}{a^2+2a-8}\div(a-4)\cdot\dfrac{a^2+4-4a}{a-2}$ 的结果是________.

7. 计算 $\dfrac{2}{a+3}+\dfrac{3}{3-a}+\dfrac{a+15}{a^2-9}$ 的值为________.

8. $x+y=6$，$xy=-2$，则 $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=$________.

9. 已知 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=m$，$\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}=n$，则 $m^2-n^2=$________.

三、计算题

10. $(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x}{x+2})\div\dfrac{4x}{2-x}$

11. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x+3}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+4x+3}$

点击知识点

1. 分式的乘除

2. 分式的乘方

3. 分式的除法及绝对值定义

4. 分式加减求值

5、6. 分式的乘除法

7. 分式的加减法

8、9. 综合运用

10、11. 混合运算

四、先化简,再求值

12. $\frac{y-3}{y^2-1}\div\frac{y^2-2y-3}{y^2+2y+1}+\frac{1}{y-1}$,其中 $y=\frac{1}{2}$

12、13. 化简求值

13. 已知$\frac{3}{a}=\frac{4}{b}=\frac{5}{c}$,求分式$\frac{ab-bc+ac}{a^2+b^2+c^2}$的值.

14. 计算:$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots+\frac{1}{(x+2\,003)(x+2\,004)}$

14. 采用拆项法. 如:

$\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

21.4 可化为一元一次方程的分式方程

同步教材研读
名师解疑释惑

知识要点归纳

1 分式方程概念

定义:分母里含有未知数的方程叫做分式方程.

2 可化为一元一次方程的分式方程的解法

(1)解分式方程的基本思路

把分式方程的分母去掉,使分式方程化成整式方程,然后利用整式方程的解法求解.(见例1)

(2)增根

在方程变形时,有时可能产生不适合方程的根,这种根叫做原方程的增根,因此解分式方程时,必须检验.

(3)验根方法

把求得的根代入最简公分母,看它的值是否为零,使最简公分母为零的根是原方程的增根,必须舍去.

3 解分式方程的一般步骤

(1)去分母,即在方程的两边都乘以最简公分母,化分式方程为整式方程.

(2)解这个整式方程.

(3)验根.(见例2)

典型题例解析
了解考题形式

名师解题

例1 解方程:$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-3}{x-4}=\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-4}{x-5}$.

解析 本题如果直接去分母,则方程两边同乘以最简公分母为:$(x-2)(x-4)(x-3)(x-5)$,运算量较大,观察方程的特点,可采取左右两边分别通分,化简后再解,也可将每个分式都化为整式与真分式之和来解.

解法一:方程两边分别通分得.

$$\frac{(x^2-5x+4)-(x^2-5x+6)}{(x-2)(x-4)}=\frac{(x^2-7x+10)-(x^2-7x+12)}{(x-3)(x-5)}$$

整理得$\frac{1}{(x-2)(x-4)}=\frac{1}{(x-3)(x-5)}$

$\therefore (x-3)(x-5)=(x-2)(x-4)$

解这个方程得:$x=\frac{7}{2}$

检验:当 $x=\frac{7}{2}$时,$(x-2)(x-4)(x-3)(x-5)\neq0$

所以$\frac{7}{2}$是原方程的根.

解法二:原方程变形为

$$1+\frac{1}{x-2}-1-\frac{1}{x-4}=1+\frac{1}{x-3}-1-\frac{1}{x-5}$$