高等学校交流講义

理論力学

LILUN LIXUE

下　册

西北工业大学理論力学教研組編

人民教育出版社

下册目录

第三部分　动力学

現代工程技术人員必备的常識；振动理論是設計新型机器与工程結构时不可缺少的基础；陀螺仪理論則是有关自动駕駛、导航方面的必要知識。此外，为了滿足进一步学习与进行科学研究的需要，适当地加强了分析力学基础一章的內容。

和靜力学、运动学相似，动力学的叙述也是从最簡单的問題开始。先研究一个質点的运动，然后进而研究各种質点系（包括剛体）的运动。这样，从研究的对象来看，动力学可分为質点动力学与質点系动力学两个部分。但是为了节省篇幅，本书并不对此作严格的区分。質点与質点系的定义，已在本书上册中給出，这里不再重复。但以后将会看到，平动的剛体，总是可以作为質点来研究；而且，如果只討論物体重心的运动，則任何物体都可以看成質量集中于其重心的一个質点。

§1.2 动力学基本定律

質点动力学的研究基础是几个簡单的定律，这些定律首先是由牛頓根据前人、特别是伽利略的研究总結出来的，并以完备的形式在他的“自然哲学的数学原理”一书(1687)中明确提出。按照現代的形式，这些定律可陈述如下：

第一定律 質点只在其他物体的作用下改变它的运动状态。因此，如果質点不受其他物体的作用，則运动状态將保持不变：作直綫匀速运动。这种运动称为按惯性的运动或簡称惯性运动，而質点能保持其运动不变的属性則称为惯性。这样，第一定律亦称为惯性原理。

其实，惯性原理早由伽利略发現，他通过著名的斜面实驗，論証了这个原理。在伽氏以前人們錯誤地認为靜止是物質的自然状态，要維持运动就必須經常不断地加以外界的推动。惯性定律的发現，才从根本上揭穿了这种經院式哲学观点的錯誤。

第一定律还指出了改变质点运动状态的条件：其他物体的作用。这种作用就是力。

应该注意，“保持运动状态不变”仅为质点惯性的一个方面的表现，在另一方面，当受到其他物体的作用时，质点将按一定的规律发生变化，因此惯性同时也是质点因受力作用而改变运动状态的依据。下述第二定律从数量上説明了这种变化。

第二定律　质点因受力作用而产生的加速度，方向与力相同，大小与力成正比。

表征质点运动变化的加速度，显然还与表征质点本身惯性的量有关。因此第二定律要説明的，实际上是作用力、质点的加速度与惯性三个物理量之間的关系。由經驗知，以同样的力作用于两个不同的质点，如第一质点所含的物质为第二质点的两倍，则第一质点所获得的加速度仅为第二质点的一半。物质含量的大小决定了质点惯量的大小。我們把质点的惯量的度量称为质量，并用 m 代表。它是正值常量①。于是，設以 F 代表作用的力，w 代表质点因受此力作用而获得的加速度，则由第二定律可得如下关系

$$mw=CF, \tag{1.1}$$

其中 C 是正值比例系数，决定于所采用的单位。

在工程制中，以长度、力、时間为基本量，普通分别采用米、公斤(力)、秒，或厘米、克(力)、秒为单位。质量的量綱为

$$[m]=\frac{[F]}{[w]}=\frac{[F][\tau]^2}{[L]}.$$

① 关于质量的定义，历来有所爭論。牛頓把质量簡单地定义为物质的含量。这个定义的缺点在于把物质本身和它的某方面属性等同起来。物质的属性可以随条件不同而有不同的表現程度。事实上，物体的质量与它本身运动有关。在相对論里建立了质量与运动速度的联系。

关于近几年来进行的对质量定义的爭論，可参看“苏联关于质量和能量問題的討論(論文集)”科学出版社，1959。

設以1公斤(力)·米$^{-1}$·秒^{2}为質量的单位，則式(1.1)中的比例系数$C=1$，因而有

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}. \qquad (1.2)$$

本书中一般采用工程单位制。

牛頓在定义質量时曾进行过大量的实驗，他发現了質量与重量之間的連系。質点在本身重量$\boldsymbol{P}$作用下自由下落时的加速度为$\boldsymbol{g}$，因此有如下关系

$$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}.$$

設已测知物体的重量与重力加速度，就可根据上述关系算出物体的質量，

$$m=\frac{P}{g},$$

即物体的質量等于它的重量除以重力加速度。

在地面上各处，重力加速度并不相同，例如在赤道与两极的海平面上，分别为978.10厘米/秒^{2}与983.11厘米/秒^2；在我国南北各地的实测結果其平均值可取为$g=980$厘米/秒^2，即9.80米/秒^2(相当于在首都附近之値)。

对应地，由实驗知，同一物体在各处的重量亦不相同；但同一物体的重量与就地的重力加速度的比值，却始終不变。这正說明每个物体的質量是一常量。

第二定律只应用于单个質点，要使之能引伸应用于質点系，还需要第三定律。这个定律早在本书上册中叙述，它在物体平衡与运动时采取同样形式。

第三定律 任何两个物体相互作用的力，总是大小相等，方向相反，沿同一直綫而分别作用于这两个物体。

由此可見，当两个物体相互作用时，其作用力的矢量和恒等于零。例如，設工人用手推动沿水平直綫軌道滑行的小車，作用的力为$\boldsymbol{F}$，則根据第三定律，此时小車必同时給予工人以等于$-\boldsymbol{F}$的反

作用力，从而工人与小車的相互作用力的矢量和等于零。

从另一观点来看，当工人推动小車，使其改变运动时，小車必因惯性显示它的反抗。設力 F 是水平的，小車的加速度 w 的方向与之相同，且可以不考慮各种摩阻，则由第二定律知，$F=mw$，而小車作用于工人手上的力 $-F=-mw$ 就是这种因惯性而显示的反抗，并被称为小車的惯性力，用 $F^{и}$ 代表。因此，质点的惯性力等于它的加速度与質量的乘积取相反方向，这个力作用于使这質点产生加速度的那些物体上。

引入惯性力的概念后，可以将表示第二定律的式(1.2)改写为平衡方程的形式

$$F+F^{и}=0. \tag{1.3}$$

亦即，質点所受的力与其惯性力的矢量和等于零。这一关系是本书第三章所述用惯性力法求解动力学問題的根据。但是，必須注意，式(1.3)并不表示質点本身的平衡，而仅說明作用与反作用的总和等于零这一事实。互相作用的每个物体都是可以作任何运动的。

对于作为質点动力学基础的第二定律还有一点补充，它表述为下列定律。

第四定律　几个力同时作用于一个質点所引起的加速度，等于每个力单独作用于这質点时所引起的加速度的矢量和。

这个定律，实質上是靜力学中力平行四边形定律对动力学情形的推广。很明显，力按平行四边形法则相加，和由这些力所产生并与之成比例的加速度按同样的方式相加，說的完全是同一規律。其实，第二定律可以認为已經包含了第四定律，因为所說的力 F 既可以是一个力，也可以是若干个力的合力，但有了第四定律，则此关系更为明确。

必須指出第二定律本身中所包含的一个根本性問題。出现在

这定律中的三个量，質量、力、与加速度，都和物質及其运动有关。在古典力学范围内質点的質量可以看做常量，但加速度与作用力的計算上却存在着矛盾。

由运动学知，加速度的計算随所选参考系的不同而有所不同。同一質点，对于不同参考系，可以有完全不同的加速度。但是另一方面，質点所受的力卽其他物体对这質点的作用則認为与参考系选擇无关。可見表示第二定律的式(1.2)（当然第一定律也如此）不能适用于一切坐标系而仅适用于某些特定的参考系。这种参考系称为基础参考系或基础坐标系。問題就在于能否找到这种坐标系。

牛頓在叙述这些定律时指明，它們仅适用于“絕对运动”，而且牛頓所理解的絕对运动指的是相对于絕对“靜止”的，与物質运动无关的“絕对空間”的运动。对于这种空間来說，时間也看成与物質运动无关地均匀消逝着；到处可以用同一尺度計算时間。这就是所謂“絕对时間”。当然，对空間与时間作这种形而上学的理解是根本錯誤的，尽管在古典力学所研究的范圍內物質运动对空間、时間的实际度量的影响小到可以忽略。

由于牛頓定律本身是在研究天体以及地面上物体的运动的基础上总結出来的，因此它們适用于描述这些运动所采用的参考系。例如工程問題中选取固連于地球的参考系，可以获得足够准确的結果；在必須考虑地球自轉时，可取以地球中心为原点、三軸分別指向某些恒星的参考坐标系；天文学上，需要考虑地球的公轉，因而把参考坐标系原点移至太阳中心。对于这种坐标系应用牛頓定律所得的結果，和最精密的观察結果相符。

本书中，如果不特別指明，我們总是采用固連于地球的坐标系作为基础坐标系。

§1.3 質点运动微分方程

質点动力学的基本問題是：1)根据質点的已知运动求作用于这質点的力，2)根据作用于質点的已知力，求这質点的运动。解答这两类問題的基本方程是(1.2)，但在計算时，需要根据問題的具体情形，把这方程写成不同的形式。普通是采用它在直角坐标軸系与自然軸系上的投影形式。在第四章与第七、八、九章里还采用了极坐标与广义坐标的形式。

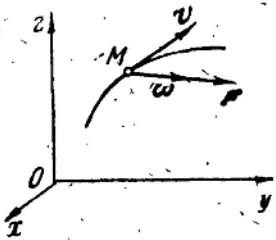

圖 1.1

設有可以自由运动的質点M，質量为m，作用力的合力为$\boldsymbol{F}$。以$\boldsymbol{w}$代表質点在这些力作用下所获得的加速度，(圖1.1)，則由运动第二定律

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F},$$

考慮到

$$\boldsymbol{w}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2},$$

其中$\boldsymbol{r}$为点M对于固定点O的矢徑，上式写为

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}, \tag{1.4}$$

这就是質点的矢量形式的运动微分方程。

将式(1.4)投影至固定坐标軸系$Oxyz$，可得質点的直角坐标形式的运动微分方程：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z, \tag{1.5}$$

其中X, Y, Z代表作用于这質点的各个力的对应投影之和。

在平面問題中，有时采用极坐标形式的运动微分方程。

設取質点M的自然軸系$M\tau nb$，并将式(1.4)投影到这个軸系，則得質点的自然形式的运动微分方程：

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_\tau,\qquad m\frac{v^2}{\rho}=F_n,\qquad 0=F_b,\tag{1.6}$$

其中 F_τ, F_n, F_b 代表力F在切綫、主法綫、副法綫上的投影。由第三式知，作用力 F 也和加速度一样，总是在密切面内。

当解答第一类問題时，只須根据已知的运动方程，运用微分演算求出加速度，从而由上述各式求得未知力。一般說来，这一过程不会遇到困难。

解答第二类問題是积分的过程。所給定的力在一般情形下可能表示为时間、質点的坐标、速度的函数（見下节的例題），只要这种函数关系一复杂，就足以使积分演算成为非常困难；在許多情形下，我們只能滿足于求出近似解。

必須注意，在解答第二类問題而求方程的积分时，要出現积分常量。为了完全确定質点的运动，必須根据运动的初始条件确定这些积分常量。这样，自由質点的运动决定于所作用的力与运动的初始条件。

但对于非自由質点，情形有所不同。非自由質点上加有約束，使它的运动受到一定的限制，其結果，質点仅能沿某些方向运动。例如曲柄連杆机构的滑块仅能沿其导軌运动，离心調速器的悬錘仅能在某一曲面上运动，等等。可見，非自由質点的运动并不完全由作用于質点的給定力与运动的初始条件决定。

非自由質点在給定力F作用下，仅发生約束所許可的运动。它获得的加速度并不由式(1.2)决定，因为約束影响了質点的运动。这种影响相当于某个附加的力 N，即所謂約束力；这种力与給定力F即主动力有所不同，它一般是預先未知的，大小、方向都与質点本身的运动、作用于質点的主动力、以及約束的性質有关。这样，在非自由質点运动問題中，往往需要同时确定运动与約束力。

为了写出非自由質点的运动微分方程，我們可以把約束給予

質点运动的限制看为它对約束力 N 的某种規定，而这个質点則象自由質点一样地在主动力 F 与約束力 N 同时作用下运动。这等于說我們可以假想地去掉約束，而加上一个特殊的力 N，这个力能自动調节到和存在約束时一样使質点仅进行約束所許可的运动。这就是所謂动力学中的解除約束原理。

因此，加上約束力 N，我們就可以形式上应用自由質点的运动微分方程 (1.2) 于非自由質点（图 1.2），有

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}. \qquad (1.7)$$

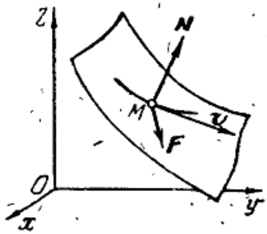

图 1.2

写成直角坐标形式，得

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=X+N_x,\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y+N_y,\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z+N_z, \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

其中 N_x, N_y, N_z 为約束力在固定軸 x, y, z 上的投影。

式 (1.7) 写成自然形式，得

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2s}{dt^2}&=F_\tau+N_\tau,\\ m\frac{v^2}{\rho}&=F_n+N_n,\\ 0&=F_b+N_b, \end{aligned}\right\} \qquad (1.9)$$

其中 N_τ, N_n, N_b 为約束力在切綫、主法綫与副法綫上的投影。設約束是光滑的，則 $N_\tau=0$。

必須注意，由于事实上存在約束，質点的坐标 x, y, z 之間存在一定連系，因此方程 (1.8) 各式并不彼此独立，而且反作用力 N 恒

为未知力，这就构成了求解非自由質点动力学問題的困难所在。关于这种質点系的运动，主要在分析力学中研究。

最后，对于非自由質点，亦可写出类似于式(1.3)的方程，显然由式(1.7)，可得

$$F+N+F^{\text{и}}=0, \tag{1.10}$$

即非自由質点的惯性力与作用于这質点的主动力和約束力組成平衡力系。

現在来举几个例子，說明上列各方程的应用。

例 1-1 电梯以不变的加速度 a 上升，求放在电梯地板上重 P 的物块 M 对地板的压力(图 1.3)。

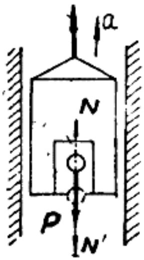

图 1.3

解 作用于物块的力除重量 P 以外，尚有地板反力 N。重物的加速度为已知，故可以直接应用式(1.7)，有

$$P+N=ma, \qquad a)$$

从而求得

$$N=ma-P. \qquad b)$$

地板所受的压力 N' 与它給予物块的反力 N 大小相等方向相反，有

$$N'=P-ma=P+F^{\text{и}}, \qquad c)$$

其中 $F^{\text{и}}=-ma$ 是物块的惯性力。

考虑到加速度 a 方向朝上，惯性力 $F^{\text{и}}$ 方向朝下，故将式 c) 投影至鉛直軸，可得

$$N'=P\left(1+\frac{a}{g}\right). \qquad d)$$

可見，压力由两部分組成：第一部分即物块的重量，这是当电梯靜止或作匀速直綫运动时所有的，因此称为靜压力；另一部分为 $\frac{P}{g}a$，它只在物块加速运动时才发生，这部分压力称为动附加压力。全部压力 N' 称为动压力。本例中动压力大于靜压力，这种現象称为过載(或超重)。

式 d)常写成形式

$$N'=nP, \qquad e)$$

其中 $n=1+\frac{a}{g}$ 称为过載系数。

显然，由于过載，不仅使地板所受的压力增大了，而且也使物块内部的压力增大。如果人站在电梯內，他将感到很沉重。而实驗指出，过載系数大至 $n>6$ 后，一般人甚至不易維持两分鐘以上。究竟人能經受多大的过載并能維持多久，这个問題在宇宙航行中是必須解决的。

設加速度 a 向下，动压力將为

$$N'=P\left(1-\frac{a}{g}\right), \tag{f}$$

即小于静压力。設 $a=g$，則 $N'=0$，这相当于物块与电梯各自自由落下，互不影响，同时，物块各部分間也消除了因重力而引起的压力。这种現象称为失重。例 1.12 中还要談到这个問題。

例 1-2 求質点 M 在重力作用下拋射运动。設初速为 v_0，发射角为 α（图 1.4），空气阻力可以略去不計。

解 取固定坐标系 $Oxyz$ 如图所示，原点 O 在質点的初始位置，軸 z 鉛直向上，平面 Oyz 包含初速 v_0 的矢量。

質点的直角坐标形式运动微分方程为

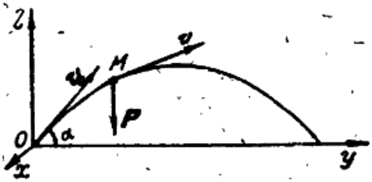

图 1.4

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=0, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg;$$

消去 m 得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=-g; \tag{a}$$

連續积分两次，可得

$$\left.\begin{array}{lll} v_x=\dfrac{dx}{dt}=c_1, & v_y=\dfrac{dy}{dt}=c_2, & v_z=\dfrac{dz}{dt}=-gt+c_3 \\ x=c_1t+c_4, & y=c_2t+c_5, & z=-\dfrac{1}{2}gt^2+c_3t+c_6 \end{array}\right\} \tag{b}$$

初始条件为，在 $t=0$ 时有

$$x_0=y_0=z_0=0, \quad v_{0x}=0, \quad v_{0y}=v_0\cos\alpha, \quad v_{0z}=v_0\sin\alpha, \tag{c}$$

代入 b)，求得积分常量

$$c_1=c_4=c_5=c_6=0;\quad c_2=v_0\cos\alpha,\quad c_3=v_0\sin\alpha.$$

故运动方程写为

$$x=0,\quad y=v_0t\cos\alpha,\quad z=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2.\qquad \text{d)}$$

显然这質点的軌迹为一拋物綫。本例是所謂在均匀重力場中的眞空彈道問題。

例 1-3 質点 M，重为 P，用不可伸长的繩悬于固定点 O。設开始运动时，繩对鉛直綫的偏角为 φ_0(图 1.5)，質点在位置 M_0，速度为零。求繩的張力 N，繩长为 ρ，重量可以不計。

解 本例已知質点的运动軌迹，方便的是写出自然形式的运动微分方程。已知加速度在切綫与主法綫方向的投影为 $w_\tau=l\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ 与 $w_n=l\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$；作用力的对应投影为 $F_\tau=-P\sin\varphi$ 与 $F_n=N-P\cos\varphi$，故得

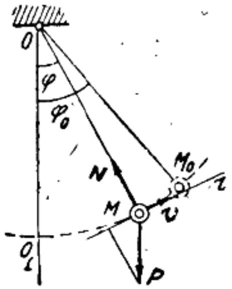

图 1.5

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-P\sin\varphi,\qquad \text{a)}$$

$$ml\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=N-P\cos\varphi;\qquad \text{b)}$$

式 a) 左右两边各乘以 $\frac{d\varphi}{dt}$，

$$\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)=-\frac{g}{l}\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt},$$

則可改写为:

$$\frac{1}{2}d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=-\frac{g}{l}\sin\varphi d\varphi,$$

从下限 φ_0 至上限 φ 取定积分，可得

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{2g}{l}(\cos\varphi-\cos\varphi_0),\qquad \text{c)}$$

代入式 b) 有

$$N=2P(\cos\varphi-\cos\varphi_0)+P\cos\varphi=P(3\cos\varphi-2\cos\varphi_0).\qquad \text{d)}$$

可見，当質点到达最低位置($\varphi=0$)时，N 有最大値；例如，設 $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$，則此最大張力为 $N=3P$，亦即动反力为静反力的三倍。

如欲确定質点 M 的运动規律，尙須积分式 c)。本例中可以初步看到非自由質点运动問題的某些特点。

§ 1.4 質点的直線运动

在許多实际問題中遇到質点的直線运动。在此情况下，只須写出一个运动微分方程。設以軌迹直綫为 x 軸，則有方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X. \tag{1.11}$$

不难看出，为了实現直綫运动，必須滿足下列条件：1)作用的力在垂直于軌迹直綫的方向的投影之和等于零，2)質点的初速必須沿此直綫。

这样，在直綫运动問題中只須求方程(1.11)的积分。現举例如下。

例 1-4 質点在牛頓引力作用下的运动。 假定物体受因地球引力而向地心作直綫运动。空气阻力与地球轉动的影响可以忽略不計。

由地心 O 画出固連于地球的坐标軸 Ox，通过質点 M 的初始位置（图 1.6)。为使質点沿鉛直軸 x 运动，其初速 v_0 显然必須沿此直綫。

質点 M 所受的引力 $\boldsymbol{F}$，方向恒指向地心 O，且根据万有引力定律，这力的大小与距离 $OM=x$ 的平方成反比；因此投影至軸 x，得

$$X=-\frac{c}{x^2},$$

其中 $c=fm_0m$ 为比例常数，f 称为万有引力常数，m_0 为地球質量，m 为質点的質量(参看第四章)。因为当 $x=R$ 即地球半徑时，地心引力等于重力即 $P=mg$，故由关系

$$-mg=-\frac{c}{R^2},$$

可得

$$c=mgR^2.$$

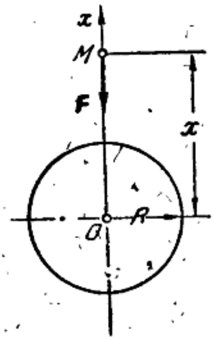

图 1.6

于是，質点的运动微分方程可写为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mgR^2\cdot\frac{1}{x^2}. \tag{1.12}$$

因为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv_x}{dt}=\frac{dv_x}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v_x\frac{dv_x}{dt},$$

故式(1.12)可改写为

$$mv_x\frac{dv_x}{dx}=-mgR^2\frac{1}{X^2}.$$

分离变量后积分，并根据初始条件($v_x=v_0, x=x_0$, 当 $t=0$)确定积分常量①，可得

$$v_x^2-v_0^2=2gR^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right). \qquad a)$$

为求質点的运动規律，亦卽将坐标 x 表示为时間 t 的函数，尙須将式 b)积分一次。

以上所述当然完全适合于向上的运动。現在假定質点M以初速 v_0 向上作直綫运动（例如发射探空火箭）需求質点所能到达的高度 H。显然，在最高点时質点的速度 $v_x=0$，而距离地心为 $x=R+H$，代入式 a)，得

$$H=\frac{Rv_0^2}{2gR-v_0^2}. \qquad (1.13)$$

如果由地面发射物体的初速足够大，可使物体最后脱离地球。現求这个初速的最小值。为此只須令上式左端 $H=\infty$；亦卽令右端的分母 $2gR-v_0^2=0$。由此可得所需的发射速度

$$v_0=\sqrt{2gR}. \qquad (1.14)$$

代入数値 $g=980$ 米/秒^2，$R=6370$ 公里，則得

$$v_0=11.2\ \text{公里/秒}, \qquad (1.14')$$

这个速度称为在地球表面的脱离速度，或第二宇宙速度。苏联于1959年1月2日所发射的世界第一顆人造行星的速度就超过了这一速度。

順便指出，設物体以速度（絕对速度）

$$v_0=\sqrt{gR}=7.9\ \text{公里/秒}, \qquad (1.15)$$

① 方便的是采用定积分，由下限 $x_0, v_{0x}=v_0$ 至上限 x, v_x。

沿水平方向发射，則将沿地面而繞地球作圓周运动，成为一个地球的人造卫星(空气阻力不計)。这个速度称为在地球表面的第一宇宙速度。

但是，必須注意宇宙速度随发射地点而异。如果发射点不在地面而在离地心为 r_0 之处，則式(1.14)与(1.15)中的 R 都应换成 r_0，又 g 則换成对应地点的引力加速度 fm_0/r_0^2，因而該处的第一、第二宇宙速度(对于地球来說)分别表示

$$V_I=\sqrt{fm_0/r_0},\qquad V_{II}=\sqrt{2fm_0/r_0}. \tag{1.16}$$

例 1-5 質点在阻尼介質中的运动 設質点在重力 P 的作用下沿鉛直綫降落。空气阻力可認为与速度平方成正比，即 $R=\alpha v^2$，其中 α 是由实驗測定的比例系数，不考虑地球的自轉。

在地面附近，重力 $P=mg$ 可看为常数。考虑到空气阻力 R 方向恒与速度相反，故如图 1.7 将質点所受的力投影至鉛直向下的軸 x，得質点的运动微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=P-\alpha v^2.$$

可見，当 $v=\sqrt{\dfrac{P}{\alpha}}$ 时，阻力与重力大小相等，方向相反，此时質点的速度到达了稳定值。用 u 代表此值，則上式可写为

$$m\frac{dv}{dt}=\frac{g}{u^2}(u^2-v^2). \tag{a}$$

分离变量，并求由下限 O, v_0 至上限 t, v 的定积分，得

$$\frac{1}{2u}\ln\frac{u+v}{u-v}=\frac{g}{u^2}t,$$

图 1.7

从而解得

$$v=u\frac{l^{2\frac{g}{u}t}-1}{l^{2\frac{g}{u}t}+1}=u\cdot th\frac{gt}{u}. \tag{1.17}$$

由式(1.17)可知，欲使速度到达稳定值 u，須經过时間 $t=\infty$。但实际上不需要很久，落体的速度即可接近此值。例如当 $\frac{gt}{u}=3.8$，即 $t=\frac{3.8}{g}\sqrt{\frac{P}{\alpha}}$，$th\frac{gt}{u}=0.999$，因而 $v=0.999u$，亦即这时的速度已只和它的稳定值相差 0.1%。

应該注意，如果質点的初速 $v>u$，最后速度也是向稳定值 u 接近。