高中代数
解题思路与技巧

山西教育出版社　　　萧启洁

高中代数解题思路与技巧

萧 启 洁

山 西 教 育 出 版 社

高中代数解题思路与技巧

萧启洁

*

山西教育出版社出版 （太原并州北路十一号）

山西省新华书店发行 山西人民印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：15.125 字数：328千字

1990年8月第1版 1990年8月山西第1次印刷

印数：1—6000册

*

ISBN 7—80578—181—8

G·180 定价：4.50元

内 容 提 要

本书针对高中代数中有关问题的解法，对各种题型总结出了一套行之有效的解题思路与方法，介绍了许多解题技巧。覆盖知识面广，讲解透彻，并配有大量的例题和习题，供读者进一步理解内容和练习。

本书内容与教学同步，可作为高中各年级学生学习参考书，也可供应届高中毕业生总复习使用及高中教师教学时参考。

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一、集　合

【题型及解题方法】

1．用判断、问答、填空、图形等形式考查概念和表示法。

例1．判断下列命题是否正确：

若$A=\{0,1\}$，$B=\{x|x\subseteq A\}$，则$A\subseteq B$。

解：由$B=\{x|x\subseteq A\}$可知，集合B是由集合A的子集组成的集合，用列举法可表示为：

$$B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$$
$$=\{\varnothing,\{0\},\{1\},A\}$$

∴　$A\in B$。故原命题不正确。

说明：既然集合的元素可以是任何对象，当然也可以用集合作为元素构成新的集合。在解题时，对概念的理解、表达不要混淆，还要掌握同一集合的不同表示方法。

例2．设$M=\{(x,y)|\ 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，

$$N=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

在直角坐标系内用图形表示$M\cup N$，$M\cap N$。

解：M是由直线$x=0$，$x=1$，$y=0$，$y=1$围成的正方形及其内部的点组成的集合；N是以原点为圆心，1为半径

的圆面，$M\cup N$、$M\cap N$在直角坐标系内的图形分别为图1—1与图1—2。

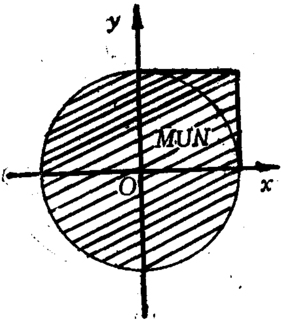

图 1—1

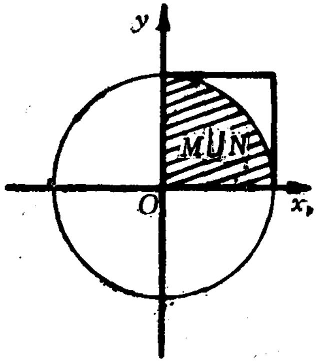

图 1—2

例3. 写出下列韦恩图中阴影部分相应的集合。

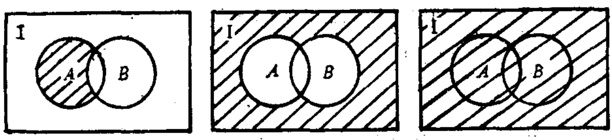

图 1—3

答： $A\cap\overline{B}$；$(\overline{A\cup B})\cup(A\cap B)$；$\overline{A\cap B}$。

2．求已知集合的子集、交集、并集、补集。

例4. 设$I=R$，$A=\{x|x^2-3x\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-5x+4<0\}$，$C=\{x|x^2-4>0\}$。求：

（1）$A\cap B$；（2）$A\cup B$；（3）$A\cap\overline{B}$；

（4）$\overline{A}\cup B$；（5）$\overline{A}\cap\overline{B}$；（6）$(A\cap B)\cup C$。

解释：什么叫解题？解题就是归结为已解过的题．解题过程就是变复杂为简单的过程．这是解题的总思路。

分析：本例中集合A、B、C都是不等式的解集．为此，

首先要解各个不等式，进而把要求的问题转化为求几个不等式的解的交集、并集等问题。

解：由$x^2-3x\leqslant 0$，得$x(x-3)\leqslant 0$　$A=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 3\}$

$x^2-5x+4<0$　$(x-4)(x-1)<0$　$B=\{x\,|\,1<x<4\}$

$x^2-4>0$　$(x+2)(x-2)>0$　$C=\{x\,|\,x<-2或x>2\}$

（1）　$A\cap B=\{x\,|\,1<x\leqslant 3\}$
（图1—4）
（2）　$A\cup B=\{x\,|\,0\leqslant x<4\}$

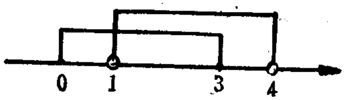

图 1—4

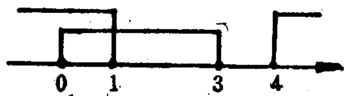

图 1—5

（3）　$A\cap\overline{B}=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}$

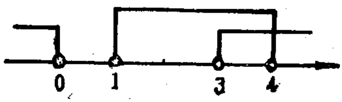

图 1—6

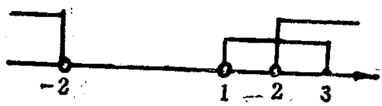

图 1—7

（4）　$\overline{A}\cup B=\{x\,|\,x<0或x>1\}$

（5）　$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{x\,|\,x<0或x\geqslant 4\}$

（6）　$(A\cap B)\cup C=\{x\,|\,x<-2或x>1\}$

例5.以实数为元素的两个集合

$A=\{2,\ 4,\ a^3-2a^2-a+7\}$,

$B=\{-4,\ a+3,\ a^2-2a+2,\ a^3+a^2+3a+7\}$,

且$A\cap B=\{2,\ 5\}$，求实数a的值，并求$A\cup B$。

解释：在解比较复杂的题时，最好先从较简单的关系入手。

解：∵ $A=\{2,\ 4,\ a^3-2a^2-a+7\}$，　$A\cap B=\{2,5\}$。

$$\therefore\quad a^3-2a^2-a+7=5$$
$$a^3-2a^2-a+2=0$$
$$a^2(a-2)-(a-2)=0$$
$$(a-2)(a+1)(a-1)=0$$
$$a_1=-1,\ a_2=1,\ a_3=2.$$

当 $a=-1$ 时，$B=\{-4,\ 2,\ 5,\ 4\}$，这时 $A\cap B=\{2,\ 4,\ 5\}$，与 $A\cap B=\{2,\ 5\}$ 矛盾，故舍去。

当 $a=1$ 时，$B=\{-4,\ 4,\ 1,\ 2\}$，这时 $A\cap B=\{2,4\}$，与 $A\cap B=\{2,\ 5\}$ 矛盾，故舍去。

当 $a=2$ 时，$B=\{-4,\ 5,\ 2,\ 25\}$，这时 $A\cap B=\{2,\ 5\}$。

∴ $a=2$，$A\cup B=\{-4,\ 2,\ 4,\ 5,\ 25\}$

例6.已知全集 $I=\{$小于10的自然数$\}$，子集 A、B 满足 $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{4,\ 6,\ 8\}$。求 A 和 B。

解释：此题可用韦恩图来解。

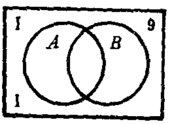

图 1—8

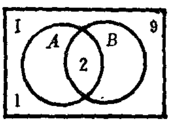

图 1—9

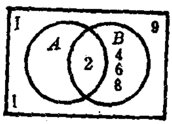

图 1—10

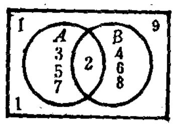

图 1—11

解：（1）由 $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 9\}$，得 $\overline{A\cup B}=\{1,\ 9\}$

（2）填 $A\cap B=\{2\}$

（3）由 $\overline{A}\cap B=\{4,\ 6,\ 8\}$ 填图1—10

（4） 由I＝{小于10的自然数}填图1—11。

结论：$A=\{3,5,7,2\}$，$B=\{2,4,6,8\}$。

3．应用题

例7.高一年级共有男生50名，其中爱踢足球的有35人，爱打篮球的有40人，两样都不喜欢的有5人，求

（1） 只爱踢足球的人数；

（2） 两样都喜欢的人数。

解1：设爱踢足球与爱打篮球的学生分别组成集合A、B。依题意得

$n(A)=35$，$n(B)=40$，$n(A\cup B)=50-5=45$。

由$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

得 $45=35+40-n(A\cap B)$，

$\therefore$ $n(A\cap B)=30$

答：只爱踢足球的5人，两样都喜欢的有30人。

解2：设只爱踢足球、只爱打篮球和两样都喜欢的人数分别为x、y、z。从图1—12中可得出

$$\begin{cases}x+y+z=50-5\\x+z=35\\y+z=40\end{cases}$$

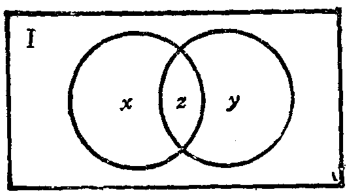

图 1—12

解得：

$x=5$，$y=10$，$z=30$。

例8.已知$\{x\,|\,ax^2+bx-2>0\}=\{x\,|\,5-x>7|x+1|\}$，求$a$、$b$的值。

解1：解不等式$5-x>7|x+1|$

当$x\geqslant5$时，无解。

当$x<5$时，有$-(5-x)<7x+7<5-x$

即 $\begin{cases} 7x+7>x-5 \\ 7x+7<5-x \end{cases}$　　$\begin{cases} x>-2 \\ x<-\dfrac{1}{4} \end{cases}$

$\therefore\quad \{x|ax^2+bx-2>0\}=\{x|-2<x<-\dfrac{1}{4}\}$

设$y=ax^2+bx-2$，其略图如图1—13

由根与系数的关系知：

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{a}=-2-\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{2}{a}=(-2)\left(-\dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$$

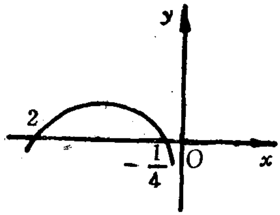

图 1—13

解得$a=-4$，$b=-9$。

解2：不等式$5-x>7|x+1|$当$x\geqslant 5$时无解。当$x<5$时，有$25-10x+x^2>49x^2+98x+49$

$48x^2+10x+24<0$

$-4x^2-9x-2>0$

于是有$\{x|ax^2+bx-2>0\}=\{x|-4x^2-9x-2>0\}$

$\therefore\quad a=-4$，$b=-9$。

例9．设$A=\{(x,\ y)|y+x+1\geqslant 0\}$，$B=\{(x,\ y)|\dfrac{1}{2}x^2+px+q\leqslant y$。$p$、$q\in R\}$。

（1） 用不等式表示使$A\supseteq B$的p、q的条件；

（2） 求在（1）的情况下，在满足$y=\dfrac{1}{2}x^2+px+q$的最小值为0时，p能取的最大值及q能取的最小值。

解：（1） 如图1—14所示，对x的所有实数值来说，为了使$A\supseteq B$，则有

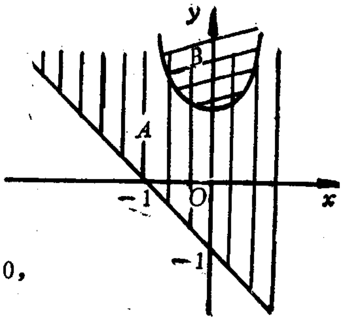

图 1—14

$$\frac{1}{2}x^2+px+q\geqslant -x-1$$

恒成立。

即 $x^2+2(p+1)x+2(q+1)\geqslant 0$，

这样，必须且只须

$$(p+1)^2-2(q+1)\leqslant 0$$

即 $q\geqslant \frac{1}{2}p^2+p-\frac{1}{2}$。 ①

（2） $y=\frac{1}{2}x^2+px+q=\frac{1}{2}(x+p)^2+q-\frac{1}{2}p^2$

当 $y=\frac{1}{2}x^2+px+q$的最小值为0时，有

$$q-\frac{1}{2}p^2=0,\qquad 即\quad q=\frac{1}{2}p^2.$$

代入①得 $\frac{1}{2}p^2\geqslant \frac{1}{2}p^2+p-\frac{1}{2}$

$p\leqslant \frac{1}{2}$ ∴ p的最大值为$\frac{1}{2}$

又由$q\geqslant \frac{1}{2}p^2+p-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(p+1)^2-1\geqslant -1$

∴ q的最小值为-1。

习 题 一

1．选择题（选择唯一正确答案的代号填空）

（1） 若“非空集合A的元素都是集合 B 的元素”是假命题，那么下列各命题中为真的只有（　　）．

命题 1，A的元素都是B的元素．

命题 2，A中有不属于B的元素．

命题 3，A中有B的元素．

命题 4，A中的元素不都是B的元素．

（A） 1 个　　（B） 2 个

（C） 3 个　　（D） 4 个

（2） 下面不正确的判断为（　　）．

（A） $\varnothing\in\{\varnothing\}$　　（B） $\varnothing\subset\{\varnothing\}$

（C） $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$　　（D） 以上都不是

（3） 已知不等非空集合A、B 满足$A\cap\overline{B}=\varnothing$，则正确的结论是（　　）．

（A） $A\subseteq B$　　（B） $A\supseteq B$

（C） $A\subseteq B$或$B=I$（全集）

（D） $A\supseteq B$或$A=I$（全集）

（4） 若非空集合A、B，有 $A\subset B\subset I$，I 为全集，则下列集合中等于空集的是（　　）．

（A） $A\cap B$　　（B） $\overline{A}\cap B$

（C） $\overline{A}\cap\overline{B}$　　（D） $A\cap\overline{B}$

（5） 若集合$A\cap B$中只有两个元素，则$A\cup B$的真子集不小于（　　）．

（A） 1个 （2） 2个 （C） 3个 （4） 4个

（6） 集合$M=\{x|x\leqslant\sqrt{12}\}$，$a=\sqrt{11}$，则下列关系成立的是（　　）。

（A） $a\subset M$　　（B） $a\notin M$

（C） $\{a\}\in M$　　（D） $\{a\}\subset M$

（7） 若$A\cap B=\varnothing$，$M=\{A$的子集$\}$，$N=\{B$的子集$\}$，则（　　）。

（A） $M\cap N=\varnothing$.　　（B） $M\cap N=\{\varnothing\}$.

（C） $M\cap N=A\cap B$.　（D） $M\cap N\subset A\cap B$.

（8） 设全集$I=\{1、2、3、4、5\}$，且$A、B\subset I$，若$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,5\}$，则下列结论正确的是（　　）。

（A） $3\in A$，$3\in B$　（B） $3\notin A$，$3\in B$

（C） $3\notin A$，$3\notin B$　（D） $3\in A$，$3\notin B$

（9） 已知$M=\{x|x=(2n+1)\pi,\ n\in Z\}$，$M=\{x|x=(4k\pm1)\pi,\ k\in Z\}$，则下列各式中正确的是（　　）。

（A） $M\subset N$　　（B） $M=N$

（C） $M\supset N$　　（D） $M\cap N=\varnothing$

（10） 已知集合$P=\{x|(x-1)(x-4)\geqslant0,\ x\in R\}$，$Q=\{n|(n-1)(n-4)\leqslant0,\ n\in N\}$和集合$S$，且$S\cap P=\{1,4\}$，$S\cap Q=S$，那么$S$的元素个数是（　　）。

（A） 2　　（B） 2或4

（C） 2或3或4　　（D） 无穷多个

（11） 若$A=\{x|x=a^2+1,\ a\in N\}$，$B=\{x|x=b^2-4b+5,\ b\in N\}$，则（　　）。

（A） $A\subset B$　　（B） $A\supset B$

（C） $A=B$　　　　（D） 以上都不是

（12） 设$A=\{(x,\ y)|\dfrac{y}{1-x^2}=1\}$，$B=\{(x,\ y)|y=1-x^2\}$，$C=\{(x,\ y)|(x,\ y)\in B$ 但 $(x,\ y)\overline{\in} A\}$，且上述$x$、$y$均为实数，则$B\cap C=$（　　）．

（A） $\varnothing$　　　（B） $\{-1,\ 1\}$

（C） $(1,\ -1)$　（D） $\{(1,\ 0),\ (-1,\ 0)\}$

（13） 若$A=\{x|x=\dfrac{k\pi}{2},\ k\in Z\}$，$B=\{x|x=m\pi,\ m\in Z\}\cup\{x|x=n\pi+\dfrac{\pi}{2},\ n\in Z\}$，则（　　）．

（A） $A\supset B$　　　　（B） $A\subset B$

（C） $A=B$　　　　（D） 以上都不是

（14） 若不等式$f(x)\geqslant 0$的解集是F，不等式$g(x)<0$的解集是G．则不等式组

$$\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)\geqslant 0 \end{cases}$$ 的解集是（　　）．

（A） $\overline{F\cup G}$　　　　（B） $\overline{F\cap G}$

（C） $F\cup G$　　　　（D） $F\cap G$

（15） 头100个自然数中，不能被 2 或 3 或 5 整除的数的个数是（　　）．

（A） 26 （B） 25 （C） 24 （D） 23

2．填空题

（1） {小于一亿的自然数}是______限集；

{大于 1 且小于 2 的有理数}是______限集；

{小于10的整数}是______限集。

（2） {质数}$\cap${偶数}＝________。

（3） 若$\overline{A}=A$，则全集$I=$______。

（4） 已知$\{1,\ 2\}\subseteq x\subseteq\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，则这样的$x$共有____个。

（5） 集合$M\cup N=\{-1,\ 1\}$，就M、N两集合的元素组成情况而论，M、N两集合组成情况最多有不同的______种。

（6） 已知$A=\{a|a=3m+1,\ m\in Z\}$，$B=\{b\mid b=3n+2,n\in Z\}$。若$a_0\in A$，$b_0\in B$，那么$a_0+b_0$____$A$，$a_0b_0$____$B$。

（7） 已知$A=${不大于10的自然数}，$B=${不大于20的质数}。$C\subseteq A$且$C\subseteq B$，则这样的集合C共有____个。

（8） 设$A=\{x|1234x^2+2345x-3456=0\}$，$B=\{x|\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x^2+2}\}$，则$A\cap B=$________。

（9） 已知全集$I=\{2,\ 4,\ a^2-a+1\}$，$A=\{a+1,\ 2\}$，$\overline{A}=\{7\}$，则实数$a=$______。

（10） 设$A=${面积不小于1，内切圆半径为1的三角形}，$B=${周长为2的三角形}，则$A\cap B=$____________。

（11） 已知集合$M=\{x,\ xy,\ \lg(xy)\}$，$N=\{0,|x|,y\}$，并且$M=N$，那么$x=$____，$y=$____。

（12） 设二次方程$x^2+ax+b=0$和$x^2+cx+15=0$的解集分别是A、B，又$A\cup B=\{3,\ 5\}$，$A\cap B=\{3\}$，则$a=$____，$b=$____，$c=$____。

（13） 已知全集$I=${不超过5的正整数}，$A=\{x|x^2-$