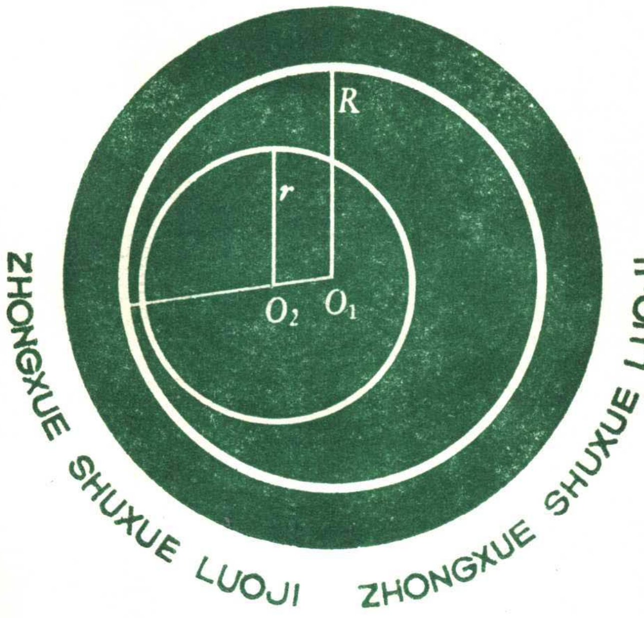
中学数学自学与研究丛书

ZHONGXUE SHUXUE ZIXUE YU YANJIU CONGSHU

中学数学逻辑

马忠林 刘 栋 编著



辽宁教育出版社

中 学 数 学 自 学 与 研 究 丛 书

中学数学逻辑

马忠林 刘 栋 编著

辽 宁 教 育 出 版 社

1985年·沈阳

中 学 数 学 逻 辑

马忠林　刘　栋　编著

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号)　大连日报印刷厂印刷

字数：125,000　开本：787×1092 1/32　印张：6¼
1985年5月第1版　　1985年5月第1次印刷
印数：1—16,500

责任编辑：俞晓群　　封面设计：赵多良

统一书号：7371·4　　定价：0.88元

出 版 说 明

为了满足中学师生和广大自学者的需要，我们根据教育部中学教学大纲的精神，组织编写了这套《中学数学自学与研究丛书》。

这套丛书的内容大致包括：初等数学知识的综合性研究；中学数学教学的经验总结；数学史、数学逻辑和数学方法论的介绍；还有数学教学中的一些补充性的专题等。

这套丛书的编辑出版，是对中学数学知识进行系统的归纳和研究的一种尝试。我们热切希望数学界和教育界人士，以及广大读者不吝赐教，并为我们提供新的选题，使这套丛书进一步充实和完善。

前　言

数学离不开概念、命题和论证，而这些内容正是逻辑学所要研究的．因此，一个正在学习数学或从事数学教育的人如果不具备一定的逻辑学知识，是很难学好数学或胜任教学工作的．所以我们认为，把一些逻辑的初步知识介绍给读者，并使之能掌握和运用它，是很有必要的．

但是，应怎样讲述数学中的逻辑问题呢？在国内，传统的数学教科书，大多没有专门讨论这些问题；而传统的形式逻辑虽然专门讨论这些问题，但是它所讲的有关判断、推理和证明方面的内容已经远远不能满足数学发展的需要．例如在数学中经常使用的一些逻辑方法在形式逻辑中没有反映，而近代蓬勃发展起来的数理逻辑却可以在这方面大显身手．这就确定了我们编写本书的主导思想：运用数理逻辑的初步知识去研究中学数学中的逻辑问题．这是一个尝试．当然，我们的这种尝试只是引玉之砖．

本书可供师范院校数学系师生、中小学数学教师、数学教育研究人员以及中学高年级学生阅读．考虑到读者对象和本书的目的，我们尽量采用通俗易懂的方法讲述，例子绝大部分是中学数学内容．

本书原稿曾蒙东北师范大学数学系数学教育研究室主任刘凤璞同志审阅过，并提出了许多宝贵的意见，谨此致谢！

编著者

一九八四年十月于长春东北师范大学

目　录

第一章 数学概念

§1 数学概念的特征

在现实世界中，存在着各种各样的事物，这些事物都有许多性质与关系，我们把事物的性质与关系，称为事物的属性。由于事物的相同或相异，在现实世界中就构成了众多不同的事物类，具有相同属性的事物就构成一类，类的存在是构成概念的基础。

例如，在数学中，三角形是一类事物，它是由无数具有相同属性的个别三角形组成的。圆也是一类事物，它是由无数具有相同属性的个别圆组成的。三角形和圆是二个不同的类。三角形这个类的共同属性和圆这个类的共同属性不同。

和事物密切联系，一旦消失事物就不再是原事物的那些属性，称为事物的**本质属性**。例如，圆是平面内到定点的距离等于定长的点的集合，这是圆的本质属性。至于圆的半径的长短就不是圆的本质属性，而是非本质属性。

数学概念是现实世界事物数量关系和空间形式的本质属性在人们头脑中的反映。

数学概念和其他概念一样，是在人们的感觉、知觉和印象的基础上产生的，但这些只是人们认识事物的初级阶

段——感性认识阶段．在感性认识的基础上再经过比较、分析、综合、抽象、概括等一系列思维活动，从而认识事物的本质属性，形成概念，这是理性认识阶段．概念的产生，是人们认识过程中的质变．只有形成了概念，才能更深入、更全面地反映事物的本质．例如，通过对太阳、满月等事物形状的感觉、知觉，人们初步形成了圆的观念，通过制造圆形器皿等生产实践，逐步认识了圆的本质属性，最后形成了圆的概念．

毛泽东同志在《实践论》中谈到概念的形成及其与实践的关系时说："社会实践的继续，使人们在实践中引起感觉和印象的东西反复了多次，于是在人们的脑子里生起了一个认识过程中的突变（即飞跃），产生了概念。概念这种东西已经不是事物的现象，不是事物的各个片面，不是它们的外部联系，而是抓着了事物的本质，事物的全体，事物的内部联系了。概念同感觉，不但是数量上的差别，而且有了性质上的差别。"①

恩格斯说："和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。"②

由上述可以看出，概念是由外部世界具体事物中抽象出来的．在数学中最常见的抽象形式是视为同一的抽象和视为理想的抽象．

① 《毛泽东选集》第一卷，人民出版社1966年横排本，第262页．
② 恩格斯《反杜林论》，人民出版社1970年版，第35页．

自然数概念的产生是视为同一的抽象的典型例子. 例如，人们在生产、生活实践中接触到象二个人、二条鱼、二只眼睛…这样一些可以互相建立一一对应关系的集合，称这些集合是**等势的集合**.所有等势的集合构成一个类.在这个类中，每个集合的元素虽然互不相同，但是这类集合却都具有一个共同的特征，而不属于这个类的集合都不具有这个特征. 由于这个共同的特征，人们可以抛开具体内容把这类集合看作是同一的，从而抽象出自然数“2”这个概念.

一般地，在任一集合中按任一性质确定等价关系（详见第三章§2）后，属于同一等价类的所有对象都具有确定的性质，就把这类对象视为同一的，并从中抽象出新的概念. 在数学的各个分支中广泛地采用这种形成概念的方法.

在数学中形成某些概念时还广泛地采用视为理想的抽象形式，用这种方法得到的概念不仅具有从它的现实原型抽象出来的性质，而且也具有原先对象所不具有的想象的性质. 数学中的许多初始概念，如点、线、面等概念就是这种视为理想的概念. 例如，在自然界的任何地方都不会遇到没有部分的“几何上的点”，但是若不利用这样的概念，就不可能建立几何学. 又如，球的所有现实原型都具有凸凹不平的性质，但是如果几何不忽略这种凸凹性就永远不可能获得球的体积公式. 这个公式在应用到球的现实原型时，虽然会产生误差，但是可以得到满足实际需要的足够精确的近似的答案.

数学概念是思维的一个形态，它与数学中的其他思维形态——命题、推理和证明有密切的联系.例如，我们必须有关

于圆的概念，才能作出关于圆的命题、推理和证明．命题是由概念组成的，推理与证明又是由命题组成的．因此，我们可以说概念是命题、推理和证明的基础．另一方面，通过命题、推理和证明，人们又能获得新知识，形成新的较深刻的概念．在一定的意义上可以说，科学的成果是概念．能作为科学发展的总结的这种功用，乃是概念的一个非常重要而又非常珍贵的特点．概念常常成为人们在科学研究和学习中的主要思考对象之一．因此，正确地理解并运用概念，是一件复杂而重要的工作．

§2　概念的内涵和外延

每一个概念都有两个重要的方面，这两方面是互相联系的，这就是概念的内涵和外延．

概念的内涵就是那个概念所反映的事物的本质属性的总和．

例如，有三条边，任意两边之和大于第三边，三内角之和等于180°等本质属性的总和构成了三角形这一概念的内涵．有四条边，两组对边分别平行，两组对边分别相等，两组对角分别相等，两条对角线互相平分等本质属性的总和构成了平行四边形这一概念的内涵．

概念的外延就是概念的适用范围，即是概念所涉及的事物类（集合）．

例如，锐角三角形、直角三角形、钝角三角形的全体就是三角形这一概念的外延．一般的平行四边形、矩形、菱

形、正方形的全体，就是平行四边形这一概念的外延．在自然数系中，集合{1, 3, 5, …}是正奇数这个概念的外延．

根据概念的外延是一个事物还是多于一个的事物，概念还有**单独概念与普遍概念**的区别．

单独概念的外延是由一个唯一的事物构成的．例如，“世界上最高的山峰”、“最小的自然数”都是单独概念．“世界上最高的山峰”这个概念的外延是{珠穆朗玛峰}，“最小的自然数”这个概念的外延是{1}．

普遍概念的外延是由多于一个的事物构成的．例如，“自然数”、“圆”都是普遍概念．“自然数”这个概念的外延是{1, 2, 3, …}，“圆”这个概念的外延是由不同圆心或半径的无穷多个具体圆所构成的集合．类似地，“方程”、“定理”、“多项式”等概念也是普遍概念．

因为普遍概念的外延包含着多于一个的事物，所以在它的前面可以用“所有的”或“有些”这样的词来修饰．例如，我们可以说“所有的自然数”、“有些自然数”，但对单独概念却不能这样修饰，说“所有的最小自然数”、“有些最小的自然数”是没有意义的．

概念的外延和概念的内涵一样，是每个概念的逻辑特征．

§3 概念的限定与概括

概念的内涵和外延是互相制约的，在它们之间存在着一种重要的关系．例如，“平行四边形”这个概念的内涵要比

“菱形”这个概念的内涵少，因为前者不具有邻边相等、对角线互相垂直并且平分它的角等属性。但从外延方面看，“平行四边形”这个概念的外延却比“菱形”这个概念的外延多，因为平行四边形除了包括菱形外，还包括其他种类的平行四边形。

由此可以看出，如果某一个概念A比另一个概念B的内涵少，则A的外延就比B的外延多；反之，如果A的内涵比B的内涵多，则A的外延就比B的外延少。概念的内涵与外延的这种关系，逻辑学上称为内涵与外延的**反变关系**。

根据这条规律，我们可以用逐渐增多概念的内涵的方法，来逐渐减少概念的外延。若概念A有$P_1, P_2, \cdots, P_n$个本质属性，则概念A的外延是由具有这些属性的所有对象构成的集合。如果在这些属性之外再加上一个新的属性P_{n+1}（但不是上述属性的推论），则得出一个新的概念B，其内涵是$P_1, P_2 \cdots, P_n, P_{n+1}$。概念$B$的外延是概念$A$的外延的真子集。仍可照样推演下去。这种逻辑推演，叫做**概念的限定**。

反之，把概念B的内涵中的P_{n+1}这个属性舍去，则可得到内涵是$P_1, P_2, \cdots, P_n$的概念A。概念A的外延是概念B的外延的真扩集。这种逻辑推演，叫做**概念的概括**。

例如：

$$\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \text{限定}$$

$$\text{平行四边形} \underset{-\text{邻边相等}}{\overset{+\text{邻边相等}}{\rightleftarrows}} \text{菱形} \underset{-\text{角为直角}}{\overset{+\text{角为直角}}{\rightleftarrows}} \text{正方形}$$

$$\text{概括} \xleftarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

总之，概念的限定，是由一种外延较大的概念，过渡到外延较小的概念的一种逻辑推演．过渡的方法是在原概念的属性中添加新的属性，而这种新的属性只是原概念外延中一部分对象所具有的．

概念的概括是与概念的限定相反的逻辑推演．概念的概括是靠扬弃只属于被概括概念的外延所包括的那些对象的属性，借以从外延较小的概念，过渡到外延较大的概念．

§4 概念间的关系

对概念进行比较，明确它们之间的关系，是进行逻辑思维的必要步骤．

概念的外延是一个类，或者用我们更习惯的语言，说概念的外延是一个集合．例如，自然数这个概念的外延是集合$\{1,2,3,\cdots\}$．有一个概念，就有一个集合与之对应．一个真实概念的外延不是空集．我们下面只研究真实概念间的关系．

形式逻辑所讲的两个概念间的关系，实质上就是讲这两个概念的外延之间的关系，即这两个概念所对应的集合之间的关系．下面我们就以这种观点谈概念间的关系．

1．同一关系

如果两个概念A和B的外延相等，则称这两个概念为具有同一关系的两个概念，或简称同一概念（图1—1）．

例如，因为“等边矩形”和“直角菱形”这两个概念的

外延相等，所以这两个概念是同一概念，它们所指的都是“正方形”这个概念．一个等腰三角形底边上的“高线”和“中线”这两个概念是同一概念，因为它们的外延都是由同一条线段构成的．

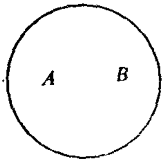


图1—1

在证明中，具有同一关系的两个概念可以互相代替．

2．从属关系

如果概念 B 的外延是概念A的外延的真子集，则称这两个概念具有从属关系（图1—2）．

例如，“平行四边形”和“四边形”是具有从属关系的概念，“有理数”和“实数”是具有从属关系的概念．外延较小的概念，从属于外延较大的概念．

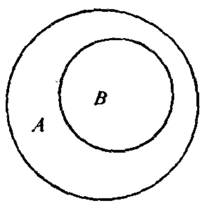


图1—2

此时，我们把外延较大的概念A叫做属概念，把外延较小的概念B叫做种概念．例如，对“实数”和“有理数”这两个概念来说，前者是属概念，后者是种概念．

一个概念是属概念还是种概念，不是绝对的．同一个概念，对某一个概念来说，是属概念，但对另一个概念来说，却成为种概念了．例如，四边形、平行四边形、矩形、正方形是一些可以进行限定和概括的概念．其中每个外延较大的概念，对外延较小的概念，都是属概念．而每个外延较小的

概念，对外延较大的概念都是种概念．譬如，平行四边形对矩形来说是属概念，而对四边形来说，它又是种概念（图1—3）．

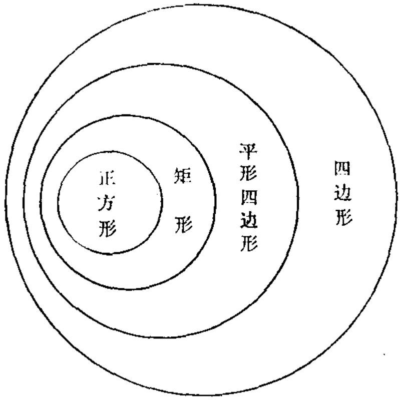


图1—3

概念的从属关系是一个很重要的逻辑关系，在数学上表现为特殊与一般、狭义与广义的概念关系．在研讨问题、检查数学结论的普遍意义时，经常与这种关系有关．

从属关系可存在于两个普通概念之间．例如，“自然数”和“整数”这两个普通概念具有从属关系．从属关系也可存在于单独概念与普通概念之间．例如，“最小的自然数”和“自然数”具有从属关系．

3．交叉关系

如果概念A的外延和概念B的外延只有一部分重合，则称这两个概念具有交叉关系（图1—4）．

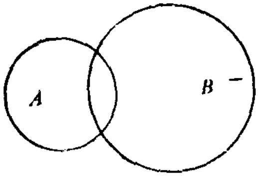


图1—4

例如，“菱形”和“矩形”是交叉概念，两个外延的交集为“正方形”概念的外延．“等腰三角形”和“直角三角形”是交叉概念，两个外延的交集为“等腰直角三角形”概念的外延．

4．全异关系

如果概念A的外延和概念B的外延的交集为空集，则称这两个概念具有全异关系（图1—5）．

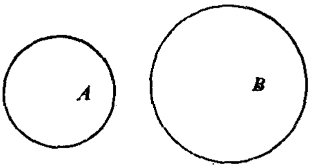


图1—5

例如，“正方形”和“平方根”这两个概念具有全异关系，“正有理数”和“负有理数”、“三角形”和“非三角形”也都具有全异关系．

同一关系、从属关系、交叉关系、全异关系是两个概念可能有的四种关系．任何两个确定的概念必然具有这四种关系中的一个关系．

对于全异关系，还有下面两种特殊情况：

（1） 矛盾关系

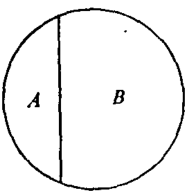


图1—6

如果概念A和B具有全异关系，且外延的并集等于最邻近的属概念的外延，则称概念A、B具有矛盾关系（图1—6）．

例如，“三角形”和“非三角形”、