

高等院校经济管理学科
数学基础系列教材

/主 编 刘书田

微积分

编著者 刘书田 孙惠玲



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等院校经济管理学科

数学基础系列教材 / 主编 刘书田

微 积 分

编著者 刘书田 孙惠玲



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分/刘书田,孙惠玲编著. —北京:北京大学出版社,2006.4

(高等院校经济管理学科数学基础系列教材)

ISBN 7-301-10577-0

I. 微… II. ①刘… ②孙… III. 微积分-高等学校-教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 016714 号

书 名: 微积分

著作责任者: 刘书田 孙惠玲 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-10577-0/O · 0681

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

787×960 16 开本 23.75 印张 510 千字

2006 年 4 月第 1 版 2006 年 4 月第 1 次印刷

印 数: 0001—4000 册

定 价: 32.00 元

内 容 简 介

本书根据教育部颁布的本科《经济数学基础》教学大纲、高等教育面向 21 世纪的改革和创新精神,并结合作者长期在教学第一线积累的丰富教学经验编写。全书共分九章,内容包括:一元函数微积分、多元函数微积分、无穷级数、微分方程和差分方程初步。按节配置适量习题,每章配有总习题,书末附有习题答案与提示,便于读者参考。

本书针对高等院校本科经济管理学科学生的接受能力、理解程度,讲述“微积分”的基本内容,选材上强调“加强基础、培养能力、重视应用”;叙述上由浅入深,思路清晰、语言精炼、讲解透彻,注意各章节之间的内在联系;例题丰富、图文并茂,便于教学与自学。

本书内容适应面广,富有弹性,可作为高等院校经济类、管理类各专业本科生“微积分”课程的教材或教学参考书。

**《高等院校经济管理学科数学基础系列教材》
编审委员会**

主 编 刘书田
编 委 (按姓氏笔画为序)
卢 刚 冯翠莲 许 静
孙惠玲 李博纳 张立卓
胡京兴 袁荫棠 阎双伦

高等院校经济管理学科数学基础系列教材书目

微积分	刘书田等编著	定价 32.00 元
线性代数	卢 刚等编著	定价 23.00 元
概率论与数理统计	李博纳等编著	定价 23.00 元
微积分解题方法与技巧	刘书田等编著	定价 25.00 元
线性代数解题方法与技巧	卢 刚等编著	定价 22.00 元
概率论与数理统计解题方法与技巧	李博纳等编著	定价 22.00 元
高等数学解题方法与技巧	胡京兴等编著	定价 25.00 元

前 言

当前,我国高等教育蓬勃发展,教育改革不断深入,高等院校经济管理学科数学基础课的教学理念、教学内容及教材建设也孕育在这种变革之中。为适应高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革的总目标,培养具有创新能力的高素质人才,我们应北京大学出版社的邀请,经统一策划、集体讨论、并分工编写了这套《高等院校经济管理学科数学基础系列教材》,其中包括:《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》。

本套教材参照教育部本科《经济数学基础教学大纲》,按照“加强基础、培养能力、重视应用”的指导方针,为培养“厚基础、宽口径、高素质”的人才,力求实现基础性、应用性、前瞻性的和谐与统一,集中体现了编写者长期讲授经济管理学科数学基础课所积累的成功教学经验,反映了当前本科数学基础课的教学理念和教学内容的改革趋势。具体体现在以下几个方面:

1. 精心构建教材内容。本教材在内容选择方面,既考虑了数学的科学性、系统性、逻辑性,又汲取了国内外优秀教材的优点,对传统的教学内容在结构和内容上作了适当的调整,更紧密了各章内容之间的内在联系,注意了数学基础课与相关专业课的联系,为后续课程打好坚实的基础。

2. 按照认知规律,以几何直观、经济解释或典型例题作为引入数学基本概念的切入点;对重要概念、重要定理、难点内容从多侧面以辩证思维进行剖析,讲透它们的本质涵义,便于学生理解。教材叙述深入浅出、通俗易懂,行文严谨、逻辑性强,富有启发性,便于教学与自学。

3. 强调基础训练和基本能力的培养。紧密结合概念、定理和运算法则配置丰富的例题,并剖析一些综合性例题。按节配有适量习题,每章配有总习题,书末附有答案与提示,便于读者参考。

4. 注重学以致用,特别是经济与管理领域中的应用。通过分析具有典型意义的经济应用例题和配置多样化习题,以培养学生应用数学知识分析和解决实际问题的能力。

5. 为使学生更好地掌握教材的内容,提高分析和解决问题能力,我们编写了配套的辅导教材:《微积分解题方法与技巧》、《线性代数解题方法与技巧》、《概率论与数理统计解题方法与技巧》。教材与辅导教材相辅相成,同步使用。本辅导教材按题型特点着重讲

授解题思路、解题方法和解题技巧,可作为参加考研学生的一本无师自通的复习指导书。

本套教材在编写过程中,同行专家和教授提出了许多宝贵的建议,在此一并致谢!参加本书编写工作的还有胡京兴副教授、冯翠莲副教授、阎双伦教授、袁荫棠教授。限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者指正。

编 者

2006 年 3 月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
§ 1.1 函数	(1)
一、实数	(1)
二、函数概念	(2)
三、初等函数	(6)
习题 1.1	(8)
§ 1.2 数列的极限	(9)
一、数列极限定义	(9)
二、极限存在准则	(12)
习题 1.2	(14)
§ 1.3 函数的极限	(14)
一、函数极限定义	(14)
二、有界变量、无穷小与无穷大	(19)
习题 1.3	(21)
§ 1.4 极限的性质与运算法则	(22)
一、极限的性质	(22)
二、极限的运算法则	(23)
习题 1.4	(29)
§ 1.5 无穷小的比较	(31)
习题 1.5	(34)
§ 1.6 函数的连续与间断	(34)
一、函数的连续性概念	(34)
二、函数的间断点及其分类	(37)
习题 1.6	(38)
§ 1.7 连续函数的性质	(39)
一、连续函数的运算性质	(39)
二、初等函数的连续性	(39)
三、闭区间上连续函数的性质	(39)
习题 1.7	(41)

总习题一	(41)
第二章 导数与微分	(44)
§ 2.1 导数概念	(44)
一、问题的提出	(44)
二、导数定义	(46)
三、函数可导与连续的关系	(49)
习题 2.1	(49)
§ 2.2 初等函数的导数	(50)
一、基本初等函数的导数公式	(50)
二、导数的运算法则	(51)
习题 2.2	(55)
§ 2.3 高阶导数	(56)
习题 2.3	(59)
§ 2.4 隐函数的导数	(59)
习题 2.4	(61)
§ 2.5 函数的微分	(62)
一、微分概念	(62)
二、微分计算	(64)
三、用微分作近似计算	(66)
习题 2.5	(67)
§ 2.6 边际·弹性·增长率	(68)
一、经济学中常用到的几个函数	(68)
二、边际	(69)
三、弹性	(69)
四、增长率	(72)
习题 2.6	(73)
总习题二	(75)
第三章 微分中值定理与导数应用	(77)
§ 3.1 微分中值定理	(77)
习题 3.1	(82)
§ 3.2 函数的单调性与极值	(82)
一、函数单调性的判别法	(82)
二、函数的极值	(84)
三、用函数的单调性与极值证明不等式	(86)
习题 3.2	(88)

§ 3.3 几何最值问题	(88)
一、函数的最大值与最小值	(88)
二、几何最值问题	(89)
习题 3.3	(91)
§ 3.4 经济最值问题	(92)
一、利润最大	(92)
二、收益最大	(93)
三、平均成本最低	(94)
四、产量最高	(95)
五、征税收益最大	(97)
六、最佳时间选择	(99)
七、最优批量	(101)
习题 3.4	(103)
§ 3.5 曲线的凹凸与拐点	(104)
习题 3.5	(107)
§ 3.6 函数图形的描绘	(108)
习题 3.6	(110)
§ 3.7 洛必达法则	(110)
习题 3.7	(113)
§ 3.8 泰勒公式	(114)
一、泰勒公式	(114)
二、几个初等函数的麦克劳林公式	(116)
习题 3.8	(118)
总习题三	(118)
第四章 不定积分	(121)
§ 4.1 不定积分概念	(121)
一、原函数与不定积分概念	(121)
二、基本积分公式	(123)
习题 4.1	(125)
§ 4.2 换元积分法	(126)
一、第一换元积分法	(126)
二、第二换元积分法	(130)
习题 4.2	(134)
§ 4.3 分部积分法	(135)
习题 4.3	(139)

§ 4.4 有理函数的积分	(140)
一、真分式的分解	(140)
二、有理函数的积分	(141)
习题 4.4	(143)
总习题四	(143)
第五章 定积分	(145)
§ 5.1 定积分概念与性质	(145)
一、问题的提出	(145)
二、定积分概念	(148)
三、定积分的性质	(150)
习题 5.1	(153)
§ 5.2 微积分基本定理	(154)
一、微积分基本定理	(154)
二、牛顿-莱布尼茨公式	(156)
习题 5.2	(157)
§ 5.3 定积分的计算	(158)
一、定积分的换元积分法	(158)
二、定积分的分部积分法	(161)
习题 5.3	(162)
§ 5.4 反常积分	(164)
一、无限区间上的反常积分	(164)
二、无界函数的反常积分	(166)
习题 5.4	(168)
§ 5.5 反常积分敛散性的判别法 · Γ 函数与 B 函数	(168)
一、无限区间反常积分敛散性的判别法	(169)
二、无界函数反常积分敛散性的判别法	(171)
三、 Γ 函数与 B 函数	(173)
习题 5.5	(176)
§ 5.6 定积分的几何应用	(176)
一、微元法	(176)
二、平面图形的面积	(177)
三、立体的体积	(179)
习题 5.6	(182)
§ 5.7 积分学在经济学中的应用	(183)
一、由边际函数求总函数	(183)

二、投资和资本形成	(185)
三、现金流量的现在值	(186)
习题 5.7	(187)
总习题五	(188)
第六章 多元函数微积分	(191)
§ 6.1 空间解析几何基本知识	(191)
一、空间直角坐标系	(191)
二、两点间的距离	(192)
三、空间曲面与方程	(193)
习题 6.1	(198)
§ 6.2 多元函数的基本概念	(198)
一、平面区域	(199)
二、多元函数概念	(199)
三、二元函数的极限	(201)
四、二元函数的连续性	(202)
习题 6.2	(203)
§ 6.3 偏导数	(204)
一、偏导数	(204)
二、高阶偏导数	(207)
习题 6.3	(208)
§ 6.4 全微分	(209)
一、全微分概念	(209)
二、用全微分作近似计算	(211)
习题 6.4	(212)
§ 6.5 复合函数的微分法	(212)
一、复合函数的全导数公式	(212)
二、复合函数的偏导数公式	(214)
三、全微分形式的不变性	(216)
习题 6.5	(217)
§ 6.6 隐函数的微分法	(218)
习题 6.6	(219)
§ 6.7 多元函数的极值	(220)
一、多元函数的极值	(220)
二、条件极值	(222)
三、有界闭区域上的最大值与最小值问题	(226)

*四、最小二乘法·····	(226)
习题 6.7 ·····	(228)
§ 6.8 边际·偏弹性·经济最值问题 ·····	(229)
一、边际及偏弹性 ·····	(229)
二、经济最值问题 ·····	(233)
习题 6.8 ·····	(236)
§ 6.9 二重积分概念与性质 ·····	(237)
一、曲顶柱体的体积 ·····	(237)
二、二重积分概念 ·····	(238)
三、二重积分的性质 ·····	(239)
习题 6.9 ·····	(240)
§ 6.10 二重积分的计算与应用·····	(241)
一、在直角坐标系下计算二重积分 ·····	(241)
二、在极坐标系下计算二重积分 ·····	(245)
三、二重积分的几何应用 ·····	(247)
*四、无界区域上的反常二重积分·····	(248)
习题 6.10 ·····	(250)
总习题六·····	(252)
第七章 无穷级数 ·····	(254)
§ 7.1 无穷级数概念与性质 ·····	(254)
一、无穷级数的收敛与发散 ·····	(254)
二、无穷级数的基本性质 ·····	(257)
习题 7.1 ·····	(258)
§ 7.2 正项级数 ·····	(259)
习题 7.2 ·····	(265)
§ 7.3 任意项级数 ·····	(266)
一、交错级数 ·····	(266)
二、绝对收敛与条件收敛 ·····	(267)
习题 7.3 ·····	(268)
§ 7.4 幂级数 ·····	(269)
一、函数项级数概念 ·····	(269)
二、幂级数及其收敛域 ·····	(270)
三、幂级数的性质 ·····	(272)
习题 7.4 ·····	(274)
§ 7.5 函数的幂级数展开 ·····	(274)

一、泰勒级数	(274)
二、函数展开成幂级数	(276)
习题 7.5	(280)
总习题七	(280)
第八章 微分方程	(283)
§ 8.1 微分方程的基本概念	(283)
习题 8.1	(286)
§ 8.2 一阶微分方程	(287)
一、可分离变量的微分方程	(287)
二、齐次微分方程	(288)
三、一阶线性微分方程	(289)
习题 8.2	(293)
*§ 8.3 可降阶的二阶微分方程	(294)
一、形如 $y''=f(x)$ 的微分方程	(294)
二、形如 $y''=f(x, y')$ 的微分方程	(295)
三、形如 $y''=f(y, y')$ 的微分方程	(295)
习题 8.3	(296)
§ 8.4 高阶常系数线性微分方程	(296)
一、线性微分方程解的基本定理	(296)
二、二阶常系数线性微分方程的解法	(298)
*三、 n 阶常系数线性微分方程的解法	(303)
习题 8.4	(305)
§ 8.5 微分方程在经济学中的应用	(306)
习题 8.5	(310)
总习题八	(312)
第九章 差分方程初步	(313)
§ 9.1 差分方程的基本概念	(313)
一、差分概念	(313)
二、差分方程的基本概念	(314)
习题 9.1	(316)
§ 9.2 常系数线性差分方程	(316)
一、线性差分方程解的基本定理	(317)
二、一阶常系数线性差分方程的解法	(318)
三、二阶常系数线性差分方程的解法	(322)
*四、 n 阶常系数线性差分方程的解法	(326)

习题 9.2	(328)
§ 9.3 差分方程在经济学中的应用	(329)
习题 9.3	(331)
总习题九	(331)
习题参考答案与提示	(333)

第一章 函数与极限

“微积分”研究的对象是函数,其理论基础是极限理论,基本方法是极限方法.

本章先复习函数概念;然后讲述极限概念,极限的性质及运算,并在此基础上导出函数连续性概念及连续函数的性质.

§ 1.1 函 数

一、实数

“微积分”是在实数范围内研究函数,先概述学习本课程所必须具备的一些实数知识.

1. 实数与数轴

实数由有理数与无理数两大类数组成,全体实数构成的集合称为实数集,记做 $\mathbf{R}$;排除数 0 的实数集记做 $\mathbf{R}^*$;全体正实数的集合记做 $\mathbf{R}^+$. 自然数集合,即全体非负整数的集合记做 $\mathbf{N}$;全体正整数的集合记做 $\mathbf{N}_+$;全体整数的集合记做 $\mathbf{Z}$.

数轴是定义了原点、正方向和单位长度的直线.

由于全体实数与数轴上的所有点有一一对应关系,所以本教材在以下的叙述中,将把“实数 x ”与“数轴上的点 x ”两种说法看做有相同的含义,而不加以区别.

2. 实数的绝对值

设 x 是一个实数,则记号 $|x|$ 称为 x 的**绝对值**,定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

数 x 的绝对值 $|x|$ 的**几何意义**: 在数轴上,不论点 x 在什么位置, $|x|$ 都表示点 x 到原点的距离.

设 x, y 是两个数,按绝对值的定义可得

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ y - x, & x < y. \end{cases}$$

设数 $h > 0$, 由绝对值的定义,有下述等价关系式:

$|x| < h$ 等价于不等式 $-h < x < h$; $|x| \leq h$ 等价于不等式 $-h \leq x \leq h$;

$|x| > h$ 等价于不等式 $x < -h$ 或 $x > h$; $|x| \geq h$ 等价于不等式 $x \leq -h$ 或 $x \geq h$.

3. 区间与邻域

3.1 区间

区间是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集. 区间分为有限区间和无限区间.

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 有限区间有

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$, 称为以 a, b 为端点的开区间;

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$, 称为以 a, b 为端点的闭区间;

$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$, $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$, 称为以 a, b 为端点的半开半闭区间.

以上各有限区间的长度都为 $b - a$.

无限区间有

$$(a, +\infty) = \{x | a < x < +\infty\}; \quad [a, +\infty) = \{x | a \leq x < +\infty\};$$

$$(-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\}; \quad (-\infty, b] = \{x | -\infty < x \leq b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$$

本教材在以后的叙述中, 若我们所讨论的问题在任何一种区间上都成立时, 将用字母 I 表示这样一个泛指区间.

3.2 邻域

设数 $\delta > 0$, 称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域, 记做 $U_\delta(x_0)$. x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径. 邻域的长度为 2δ , 点 x_0 的 δ 邻域(图 1-1)用不等式表示为

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \text{或} \quad |x - x_0| < \delta.$$

以下, 以 x_0 为中心, 以任意长为半径的邻域记做 $U(x_0)$, 称为点 x_0 的某邻域.

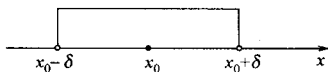


图 1-1

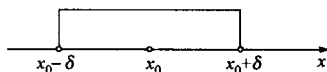


图 1-2

若把邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的中心点 x_0 去掉, 由余下的点构成的集合, 称为点 x_0 的 δ 空心邻域(图 1-2), 记做 $U_\delta^\circ(x_0)$. 常表示为

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \quad \text{或} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

以下, 以任意长为半径的点 x_0 的空心邻域记做 $U^\circ(x_0)$, 称为点 x_0 的某空心邻域.

二、函数概念

1. 函数定义

定义 设 D 是一个非空数集, 若按照某一确定的对应法则 f , 对 D 内每一个数 x 都有唯一确定的数 y 与之对应, 则称 f 是定义在 D 上的函数, 记做

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中 x 称为函数 f 的自变量, y 称为函数 f 的因变量, D 称为函数 f 的定义域, 可记做 D_f .

定义域 D 是自变量 x 的取值范围. 若 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 则称该函数在点 x_0 有定义, 与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 的函数值, 记做 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 遍取数集 D 中的所有数值时, 对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的数集