中学立体几何解题指南

沈 勋

辽宁教育出版社

中学立体几何解题指南

沈 勋编

辽 宁 教 育 出 版 社

1987年·沈阳

中学立体几何解题指南

沈 勋 编

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号） 沈阳新华印刷厂印刷

字数：194,000 开本：787×1092 1/32 印张：8 1/8
印数：1—25,000
1987年5月第1版 1987年5月第1次印刷

责任编辑：黄晓梅 责任校对：学 力
封面设计：邹君文 插 图：秦东辉

统一书号：7371·378 定价：1.32 元

前　　言

为了帮助学生掌握立体几何的基础知识和解题规律，进而提高空间想象能力及分析问题和解决问题的能力，笔者根据中学数学教学大纲的要求和现行教材内容，将自己多年来对在校生进行数学竞赛辅导讲座的专题资料及指导毕业总复习的心得体会，编写了这本《中学立体几何解题指南》。

本书共十六个专题，笔者近年在《数学通报》等刊物上发表的七、八个专题，这次经整理也一并收入。其中有帮助读者巩固基础知识在解题中的运用，有帮助读者提高画图能力的几种立体图形的画法。为帮助读者提高分析问题和解决问题的能力，本书还介绍了某些类型题的通常解法和某些证题方法的应用范围，并且对一般习题的分析、综合等方法也做了较详尽的介绍。

本书的每个问题除论述有关概念和基本题型的解法、规律外，还对一些题列举了数种不同的解法。同时指出解题中的注意事项，其中还列举了错误解法及其原因。本书的每个问题还备有相应的练习题，并附有答案。此书也可作为广大中学数学教师的教学参考书。

编　　者

一九八六年二月八日

目　　录

一、有关证明“……在同一平面内”或“……是平面图形”这类问题的一般方法

这类问题主要是利用平面的基本性质去解决．而平面的基本性质是：

【公理一】 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内．

本公理是用来判定空间的一条直线是否在一个已知的平面内的．

【公理二】 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线．

本公理提示我们，今后在解立体几何问题遇到作直线时，一般是作平面，其直线常以两个平面相交的交线形式出现．

【公理三】 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面．

本公理是确定平面的基本条件．由此又可推导出以下推论：

【推论一】 经过一条直线和这直线外的一点，有且只有一个平面．

【推论二】 经过两条相交直线，有且只有一个平面．

【推论三】 经过两条平行直线，有且只有一个平面.

从公理三到推论三都是确定平面的条件. 下面请看例题.

例 1 求证：两两相交且不共点的四条直线必在同一平面内.

已知：如图 1—1. 直线a、b、c、d两两相交，交点分别为A、B、C、D、E、F.

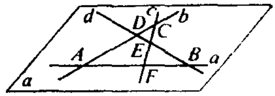

图1—1

求证：直线a、b、c、d都在同一平面内.

证明 ∵ 点A、B、D是不在同一条直线上的三个点，

∴ 过点A、B、D可作一个平面α（根据公理三）.

∵ 点A和点B在平面α内.

根据公理一，直线a在平面α内.

同理，直线b和d也都在平面α内.

由于直线b、d上的点C、E都在平面α内，所以直线c也在平面α内.

因此，两两相交且不共点的四条直线a、b、c、d都在同一平面α内.

例 2 求证：梯形是平面图形.

已知：如图 1—2. 在梯形$ABCD$中，$AB \parallel CD$.

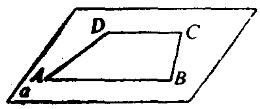

图1—2

求证：梯形$ABCD$是平面图形.

证明 ∵ $AB \parallel CD$,

∴ 过AB和CD可作一个平面α（根据推论三）.

∵ 点C、B在平面α内，

∴　腰BC在平面 α 内（根据公理一）。
同理，腰AD也在平面 α 内。

因此，梯形 $ABCD$ 为平面图形。

由此可知，这类问题的一般证题步骤是：

1．先取已知条件中的某些元素（点或直线），利用公理三或三个推论去作出一个平面。

2．再证明已知条件中的其它元素都在这个平面内。这里一般用公理三。当问题引深时，有时可用同一法、反证法或其它证法。

注　当已知条件中有平行直线时，一般是先利用平行直线作出平面，再证明就较为简便，如例2．若采用过不在一条直线上的三点A、B、C，或过两条相交直线AB和AD等方法去作一个平面时，本题证明就要繁杂了。

现再举几例。

例 3　试证：一条直线与一组平行线都相交，它们必在同一平面内。

已知：如图1—3．直线 l 与一组平行直线$a\parallel b\parallel c\cdots$ 都相交，其交点分别为A、B、$C\cdots$。

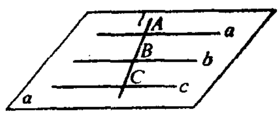

图1—3

求证：直线 l、a、b、$c\cdots$都在同一平面内。

证明　∵　直线 $a\parallel b$，

∴　过直线 a 和 b 可作一个平面 α。

∵　点A在直线 a 上，

∴　点A在平面 α 内。

同理，点B也在 α 内。

∴　直线 l 在平面 α 内。

假设直线 c 不在平面 α 内。

∵　点C在平面 α 内，

∴　过点C在平面 α 内可作直线 $c' \parallel b$.

故导出：过直线 b外一点 C 能作两条直线 c 和 c' 平行于 b. 这不可能。

∴　直线 c 在平面 α 内。

同理，直线 d、…都在平面 α 内。

∴　直线 l, a, b, c……在同一平面内。

例 4　过平面外一条直线上的所有点，向这个平面引垂线。求证：所有这些直线同在一个平面内。

已知：如图 1—4．直线 l 不在平面 M 内， A、B、C、… 是直线 l 上的点，且 $AA' \perp M$, $BB' \perp M$, $CC' \perp M$, …。

求证：直线 l 以及直线 AA'、BB'、CC'、…都在同一平面内。

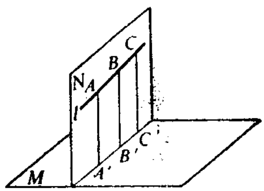

图1—4

证明　过 AA'和 l 作平面 N。

∵　$AA' \perp M$,

∴　$N \perp M$。（根据平面与平面互相垂直的判定定理）

又∵　点B在 l 上，

∴　点B在N内。

又∵　$BB' \perp M$,根据平面与平面互相垂直的性质，BB在平面N内。

同理，CC'、… 都在平面N内。

因此，所有这些直线必在同一平面内。

例 5 求证：过两条异面直线中一条上的各点，引另一条直线的平行线，它们必在同一平面内。

已知：如图1—5，两条异面直线 a 和 b。l_1、l_2、l_3、…为过直线 b 上的点 A、B、C、…与直线 a 平行的直线。

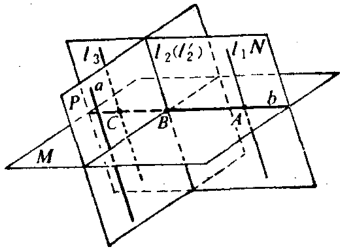

图1—5

求证：直线 l_1、l_2、l_3、…都在同一平面内。

证明 反证法。

过直线 b 和 l_1 可作平面N。

假设直线 l_2 不在平面N内。

$\because$ $l_2 \parallel a$,

$\therefore$ 过l_2和 a可作平面 P。设与平面 N 的交线为 l'_2。

$\because$ $a \parallel l_1$，l_1在N内，a 在 N外，

$l_2 \cap l_2' = B$

$\therefore$ $a \parallel N$，$a \parallel l'_2$。

又 $a \parallel l_2$且 l_2与 l_2'均过点 B。

故导出：过点 B 可作两条直线 l_2 和 l_2' 同时平行于直线a。这不可能。

$\therefore$ 直线 l_2在平面 N 内。

同理可证，直线 l_3、…都在平面 N内。

因此，直线 l_1、l_2、l_3、…它们都在同一平面内。

注 本题也可用同一法证明。

练 习 一

1. 两两相交且不共点的三条直线必在同一平面内。

2．两条平行直线同时和若干条直线都相交．求证：它们必在同一平面内．

3．已知点O是直线 l 外的一点，及点O与 l 上的各点A、B、C、…的连线．求证：它们必在同一平面内．

4．已知：四边形 $ABCD$ 是空间四边形，E、H分别是边 AB、AD的中点， F、G 分别是边CB、CD 上的点，且$CF:CB=CG:CD=2:3$．求证：四边形 $EFGH$是梯形．

二、在立体几何中，关于“点在直线上”、“三点共线”、“三线共点”的一个通常证法

在立体几何中，如果掌握了“点在直线上”的证题方法，那么关于“三点共线”、“三线共点”一类证明题也就迎刃而解。关于“三点共线”的证明，只要证出第三点在已知两点决定的直线上即可。“三线共点”的证明题，只要证出已知两条直线的交点在第三条直线上即可。所以，有关“三点共线”、“三线共点”的证法，实质可归结为“点在直线上”的证法。那么证明“点在直线上”采用什么方法呢？且看下面例题。

例 1 试证：空间四边形 $ABCD$ 内有一个平面四边形 $EFGH$，若对边 EH 与 FG 相交，则交点 P 必在空间四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 的延长线上。

已知：如图 2—1．空间四边形 $ABCD$ 中有平面四边形 $EFGH$，EH 与 FG 相交于点 P。

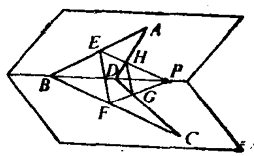

图2—1

求证：点 P 在 BD 延长线上。

证明 $\because BD$ 是平面 ABD 和平面 BCD 的交线，

又 $\because$ 点 P 是直线 EH 和 FG 的交点。

$\because$ 点P既在直线 EH 上又在直线 FG 上，而直线 EH 和 FG又分别在平面 ABD 和平面 BCD 内。

$\therefore$点P既在平面 ABD 内，又在平面 BCD 内。

$\therefore$点P就在这两个平面的交线 BD 上。

由此可知，本题是先把直线 BD 看成是两个平面 ABD 和 BCD 的交线，再证交点P既在平面 ABD 内又在平面 BCD 内，从而证明点P在直线 BD 上。因此，"三点共线"、"三线共点"一类问题也可按照上述方法去证明。

例 2　一个三角形的三边（或延长）与一个平面都相交。试证：这三个交点必在同一条直线上。

已知：如图 2 — 2 。$\triangle ABC$的三边 AB、AC、BC 与平面M的交点分别为D、E、F。

求证：点D、E、F必在同一条直线上。

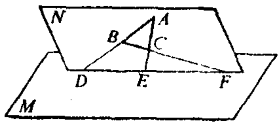

图2—2

证明　设过边 AB 和 AC 所确定的平面为N，它与平面M相交于过 D、E 两点的一条直线。

$\because$ 点B和C都在平面N内，

$\therefore$直线BC上的F也必在平面N内。

又$\because$点F在平面M内，

$\therefore$点F必在平面M和平面N的交线DE上。

$\therefore$点D、E、F在同一条直线上。

例 3　三个平面两两相交成三条直线，如果其中有两条相交，试证：这三条直线必相交于一点。

已知：如图 2 — 3 。平面M与N相交于 a，平面M与P相交于 b，平面N与P相交于C，且 a 与 b 交于点O。

求证：a、b、c 相交于一点 O。

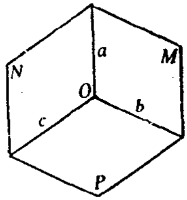

图2—3

证明 ∵直线 a 是平面 M 与 N 的交线，

∴ 直线 a 在平面 N 内。

同理，直线 b 在平面 P 内。

又∵点 O 是直线 a 与 b 的交点，

∴点 O 既在平面 N 内，也在平面 P 内。

∴点 O 必在平面 P 与平面 N 的交线 C 上。

∴三条直线 a、b、c 相交于一点 O。

由此可知，这三种类型题的一般证题规律：

1．先证（或作）直线是两个平面的交线；

2．再证点是这两个平面的公共点，即在交线上。

现再举二例。

~~$\because a \subset N$~~

$\because a = M \cap N$

$\therefore a \subset N$

同理 b 在 P

$\because a \cap b = O$

$\therefore O \in N$ $O \in P$

即 $O \subset C$.

因此 $a \cap b \cap c = O$

例 4 两个不全等的三角形不在同一平面内，它们的边两两对应平行，试证：三条对应点的连线必交于一点。

证明 如图 2 — 4．

∵ $AB \parallel A_1B_1$，$\cancel{AB \neq A_1B_1}$

∴ AA_1B_1B 为梯形。

∴ A_1A 与 B_1B 延长后必相交。设交点为 O。

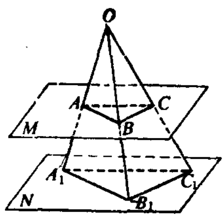

图2—4

同理，B_1B 与 C_1C、A_1A 与 C_1C 分别相交，其中 C_1C 就是平面 AC_1 与平面 BC_1 的交线。

∵直线 AA_1 在平面 AC_1 内，直线 BB_1 在平面 BC_1 内，

∴交点 O 既在平面 AC_1 内，又在平面 BC_1 内。

∴点O必在这两个平面的交线 CC_1上。

∴三条直线 AA_1、BB_1、CC_1相交于一个点。

例 5 已知线段AB交平面M于点C'，由端点 A和B分别向平面M引垂线AA' 和 BB'。求证：点 A'、B'、C' 必在同一条直线上。

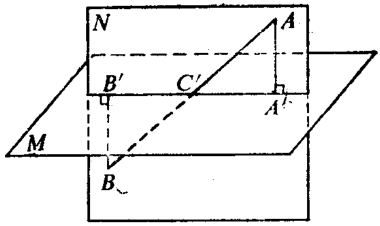

图2—5

证明 如图2—5。

∵$AA'\perp$平面M，$BB'\perp$平面M，

∴$AA'\parallel BB'$，过AA'和 BB'可确定平面 N，则与平面M的交线为$A'B'$。

∵线段 AB 上有两点 A、B 在平面N内，

∴线段 AB 上的所有点，其中包括点 C' 也必在平面N内。

又∵点C'又在平面M内，

∴点C'必在平面N与平面M的交线 $A'B'$上。

∴点 A'、B'、C' 必在同一条直线上。

这一类问题的证明除了用这种通常证法外，也可根据它们的特殊性采用其它证法。如本题也可采用三垂线定理证。

证明 如图2—6。连接$A'C$和 $B'C$，在平面M内作 $CD\perp A'C$。

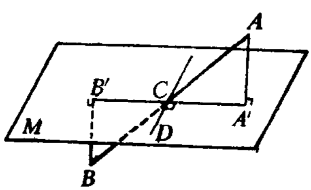

图2—6

∵$AA'\perp$平面 M，由三垂线定理知，直线 $AB\perp CD$。

又∵$BB' \perp$平面M，

∴由三垂线定理的逆定理可知，$B'C \perp CD$。

∴$\angle B'CA' = 180°$。

∴点A'、C、B'在同一条直线上。

练　习　二

1．在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为棱 CC_1和 B_1C_1 的中点，连接 DE 和 A_1F。试回答：

（1）直线 DE 和 A_1F 是异面直线吗？为什么？

（2）若直线 DE 和 A_1F 相交，求证：其交点必在棱 D_1C_1的延长线上。

2．三个平面两两相交，有三条交线。

求证：这三条交线交于一点或互相平行。

三、反证法在立体几何中的应用

反证法是间接证法的一种，它在立体几何证题中是经常采用的。

反证法的证明步骤为：

(A)先否定原命题的结论。

(B)由此推导出不合理的结果，即

a) 与已知条件相矛盾的结果。

b) 与已知公理，定理或推论相矛盾的结果。

c) 从而断定原命题成立。

它一般常应用于立体几何中以下类型的命题：

1. 证明“是异面直线”的命题。

例 1　求证：平面内的一点与平面外的一点的连线和平面内不经过该点的直线是异面直线。

已知：如图 3 — 1 。直线 a 在平面 α 内，点 A 在平面 α 外。点 B 在平面 α 内但不在直线 a 上。

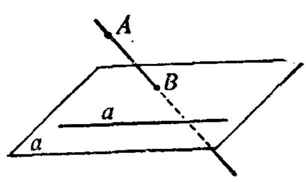

图3—1

求证：直线 AB 和 a 是异面直线。

证明　反证法。

假设直线 AB 与 a 在同一个平面内，那么这个平面一定经过点 B 和直线 a。