集合与数

北 京 出 版 社

集 合 与 数

北京教育学院师范教研室编

北 京 出 版 社

集合与数

北京教育学院师范教研室编

*

北 京 出 版 社 出 版

（北京崇文门外东兴隆街51号）

新华书店北京发行所发行

北京第二新华印刷厂印刷

*

1982 年 4 月第 2 版　1984 年 6 月第 3 版

1984 年 6 月第 4 次印刷

书号：K7071 · 586　定价：0.43 元

说　　明

为了提高师范学校学生和在职小学教师的数学专业水平，我们结合师范学校的特点，编写了《集合与数》和《整数基础知识》两本教材，作为师范学校的专业用书，也可作为小学教师进修提高的教材或中学数学教师的教学参考书。

本书由北京教育学院师范教研室许华棋、方金秋、北京第三师范学校张君达同志编写。由于我们的水平不高，编写时间又很仓促，教材中一定会有不少的缺点和错误，殷切地希望同志们提出批评和建议，以便进一步修改。

北京教育学院师范教研室

一九八二年三月

前　　言

十九世纪末叶，德国数学家康脱(Cantor)发表了“集合论”的文献，《集合论》作为一个数学分支迅速地发展起来了．它的产生和发展，对数学的各个分支产生了深刻的影响．现在，《集合论》已成为现代数学的重要基础。

近年来，在许多国家的中、小学教材中，增加或渗透了一些“集合论的基础知识”，我国全日制十年制学校教材参考了各国教材的情况，汲取了他们在教材改革中的经验和教训，根据我国当前教育的实际情况，也增加或渗透了一些“集合论”的内容及有关的知识，这样可以扩大学生的知识面，加深对传统数学的某些内容的理解，有利于进一步学习数学和现代科学技术．为了使师范学校的学生将来更好地完成教学任务和进一步学习，我们认为有必要加强“集合论”和有关数的基础知识的学习．为此，我们编写了这册教材．

目　　录

第一章　集合……………………………………………………1
第一节　集合的概念……………………………………………1
第二节　集合的包含与相等关系………………………………9
第三节　集合的运算……………………………………………17
第四节　集合的运算定律………………………………………30
第五节　直积集…………………………………………………44
第六节　有序集…………………………………………………47
第二章　对应……………………………………………………51
第一节　单值对应………………………………………………51
第二节　一一对应………………………………………………56
第三节　集合上的运算…………………………………………62
第三章　自然数集………………………………………………68
第一节　基数理论………………………………………………68
第二节　序数理论………………………………………………81
第四章　有理数集的性质………………………………………97
第五章　实数集…………………………………………………112
第一节　实数的概念……………………………………………112
第二节　实数与实数轴…………………………………………119
第三节　实数的大小比较和实数的运算………………………128
第四节　实数的近似计算………………………………………143
第五节　实数集的性质…………………………………………153

第一章　集　　合

第一节　集合的概念

一、集合的概念

在日常生活中，我们对"集合"一词并不是陌生的．现实世界的客观事物浩如烟海，千头万绪，我们在讨论、研究一个具体问题时，常常把自己的讨论的对象限制在一定的范围内，对事物进行分类．例如，我们讨论"男子"这一概念，我们是把自己的议题限制在"人"这样一个范围内，把所有的人作为讨论的对象，然后再在其中考察性别．我们在讨论数学问题时，也是限定在一定的范围内进行的．例如，在研究数的运算及其性质、因式分解和解方程等等，也总是先确定在自然数范围内或整数范围内或有理数范围内，还是在实数范围或复数范围内进行．在研究函数时，也总是先确定自变量的变化范围．上述的例子说明，"集合"是我们会经常要遇到的一个很重要的概念．

在数学里，"集合"的涵义是什么？我们先来看下面的一些例子：

（1）从 1 到 10 的全体偶数；

（2）方程 $x^2-5x+6=0$ 的所有实数根；

（3）一个班级里所有的学生；

（4）现在世界上所有的国家；

(5) 自然数的全体；

(6) 平面上与一定点距离相等的所有的点；

(7) 所有等腰三角形的全体；

(8) 满足不等式 $x>5$ 的所有实数.

以上这些都可以作为集合的例子. 它们是分别由不同的对象组成的一个整体，它们的特点是都有确定的对象和具有一定的范围. 所以，对于集合这个概念，我们用以下的语言来描述*：

集合是具有一定范围的、确定的对象的全体.

"集合"也简称为"集". 关于集合这一概念，通常有以下几个属性，我们认为是不言而喻的.

1. 集合是被当成一个整体来看待的，它指的是某一类事物(对象)的全体，而不是指其中任何个别事物.

2. 集合中的对象可以是任何事物，但事物的范围是确定的. 我们通常说给定了一个集合，是说在我们所讨论的范围内，对于任何一个事物，我们可以通过某种法则来判定这个事物属于或不属于这个集合，二者必居其一，就是说一个集合的界限是分明的，不能含混不清**. 例如，"一切自然数"组成一个集合，它有确定的界限. 而"一切大的自然数"却没有确定的界限，如 10,000 或 100,000,000 这样的数是不是在它的范围之内，我们无法判定. 所以，"一切大的自然数"不是一个集合.

---

* 在这里，"集合"是一个不定义的原始概念. 如几何中的点、直线、平面这些概念一样，我们不再用其他的概念来给出它们的精确意义.

** 界限不分明的集合叫做模糊集合，我们在这里所讨论的集合通常也叫做普通集合.

在这里我们应该区分“不可能判定”和“尚不会判定”的本质区别．前者是指所给集合本身的不确定性而使人无法判断，后者是由于知识不够、工具不足而不会判断．例如，所有的质数组成一个集合．因为质数与非质数在概念上是十分明确的，界限是分明的．但是，对任意指定的一个自然数，我们现在还不一定能判定它是或不是一个质数．

3．在一般情况下，我们约定一个集合中的各个对象是互不相同的．例如，由 1、2、3、4 这四个数组成一个集合，而不能由 1、1、1、2 来组成一个集合，因为在这里三个 1 是同一个数．事实上，它是由 1、2 这两个数组成的集合．当我们必须考虑集合中的某一个元素重复出现的次数时，应另作说明．

4．在一般情况下，集合只与组成它的成员有关，而与它的成员的顺序无关．例如，由 1、2、3、4 组成的集合与由 2、4、1、3 组成的集合我们认为是同一个集合．

集合一般用大写字母 A、B、C、…表示．

组成一个集合 A 的每一个对象，叫做集合 A 的元素．简称为元．元素一般用小写字母 a、b、c、…来表示．

对于一个确定的元素 a 和一个确定的集合 A，有且仅有以下两种情形之一成立：

如果 a 是集合 A 的元素，就说“元素 a 属于集合 A”．用符号 $a\in A$ 表示，读做“a 属于 A”；

如果 a 不是集合 A 的元素，就说“元素 a 不属于集合 A”．用符号 $a\overline{\in} A$（或 $a\notin A$）表示，读做“a 不属于 A”．

例如，A 是由 2、4、6、8 组成的集合，2 是集合 A 的元

素，记作 $2\in A$．而 3、$\frac{1}{2}$不属于 A，记作 $3\overline{\in}A$，$\frac{1}{2}\overline{\in}A$．

二、集合的表示法

怎样表示一个集合呢？要把一个具体的集合表示出来，一般采用以下两种方法：

1．枚举法：把所有属于集合 A 的元素，用花括号括起来，就表示由它们组成了集合 A．在这里，元素的先后顺序是无关紧要的．

例 1 由 1 到 10 的偶数组成的集合 A，可记为

$$A=\{2,4,6,8,10\}.$$

例 2 全体自然数组成的集合 N，可记为

$$N=\{1,2,3,4,\cdots\}.$$

例 3 由一年中的四个季节组成的集合 B，可记为

$$B=\{春，夏，秋，冬\}.$$

例 4 8 和 12 的最大公约数的集合 C，记为

$$C=\{4\}.$$

2．描述法：我们常常会遇到对集合中的元素无法枚举出来的情况，这时，可以给出集合中元素的特征，来表示一个集合．

例 5 所有等腰三角形组成的集合 D，可记为

$$D=\{等腰三角形\}.$$

例 6 方程 $x^2-5x+6=0$ 的根的集合 M，可记为

$$M=\{x\,|\,x^2-5x+6=0\}.$$

在这里，花括号中竖线右边是一个数学表达式或一句话，它表示与集合 M 的元素 x 有关的条件，这些条件给出了元素的特征．集合 M 是由全体满足这些条件的元素 x 所组

成.

例 7 全体有理数组成的集合Q，可记为

$$Q=\left\{x \mid x=\frac{m}{n},\ m、n \in z, n \neq 0\right\}\ (z \text{ 是整数集}).$$

例 8 $E=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1$，且$x$是整数$\}$.

集E也可以用枚举法给出：

$$E=\{0,1\}.$$

例 9 $F=\{(x,y) \mid x$、y是实数，$y=x^2\}$.

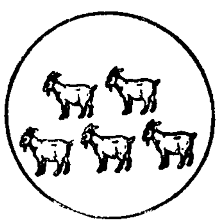
集F表示直角坐标平面的抛物线$y=x^2$上的所有的点的集合.

例 10 $G=\{P \mid A$、B是定点，$\angle APB=60°\}$.

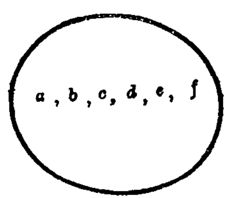
这个集合是平面上以AB为弦，圆周角等于60°的两条弧上点的全体，它不包括A、B两个端点.

在许多关于集合的书籍中，常常用韦恩(Venn)图法来表示集合. 即用一条封闭曲线将所给的元素圈起来表示一个集合. 这个方法比较直观、形象，易于看出集合之间的关系，便于初学者所接受.

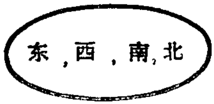
例如



5只羊的集合



由a,b,c,d,e,f这6个元素组成的集合



由东、西、南、北四
个元素组成的集合

自然数集合

三、有限集、无限集

1. 有限集

我们在前面所举的例中，例 1、例 3、例 4、例 6 和例 8 的集合的元素都是有限的，我们把由有限个元素组成的集合叫做有限集.

例 11 设 $A=\{x\mid 0<x<1,000,000,000,\ x$ 是自然数$\}$

集 A 是有限集.

例 12 集 B 是一杯水里的所有水的分子所组成的集合. 集 B 是有限集.

这是因为 18 克的水中约含有 6.023×10^{23} 个水分子，所以，一杯水内水分子的总数可以求出来，就是说，一杯水里的水的分子是有限集.

在前面的例 4 中，集合 C 只有一个元素，仅含有一个元素的集合，叫做单元素集.

例 13 设 $H=\{x\mid 2x+1=0\}$,

集 H 是单元素集，它只含有一分元素 $-\frac{1}{2}$.

例 14 设 $S=\{x\mid -1<x<1,\ x\in Z\}$,

集 S 是单元素集，它只含有一个元素 0,

即 $S=\{0\}$。

有时我们不知道一个集合是否有任何元素，却谈论这个集合，感到这比较方便。一个元素也没有的集合，我们把它叫做空集。例如，李老师说："明天缺课的同学，星期日到学校补课"。我们把"明天缺课的同学"看成一个集合，但第二天没有缺课的同学，于是这个集合就是空集。空集一般用 ϕ(或$\{\ \ \}$)来表示。

例 15 $\phi=\{x|\ x^2+1=0$ 的实数根$\}$。

例 16 $\phi=\{x|\ x>5$ 且 $x<3\}$。

在这里要分清空集 ϕ 与$\{0\}$是不同的，集$\{0\}$是有一个元素的单元素集，0 是它的元素，集 ϕ 没有元素，所以 ϕ 与$\{0\}$是不同的两个集合。与此相区别，至少含有一个元素的集合，叫做非空集合。

我们把空集看作集合，这一点与通常的习惯不很一致。但在数学中引入这个概念是很必要的，正如我们把 0 也看作数一样，它在数的运算中起着很重要的作用，空集在集合的运算中也起着类似的作用。所以，扩大"集合"这个概念使之能包括空集，是合适的。

我们规定：空集是有限集。

2．无限集

前面的例 2、例 5、例 7、例 9 和例 10 中的集合，它们的元素是无限的。我们把由无限个元素所组成的集合，叫做无限集。

例如，偶数集、奇数集、质数集以及实数轴上的点的集合等等，都是无限集。

习　题　一

1．在____处填上符号$\in$或$\bar{\in}$：（N表示自然数集；Z表示整数集；R表示实数集．）

1____N，0.5____N，0____N，-2____N；$\sqrt{3}$____N，$\frac{3}{2}$____N，0____Z，-2____N，π____N，53____N，$\sqrt{2}$____R，0.75____R，e____R，-5____R，$\sqrt{-5}$____R。

2．用枚举法或描述法表示下列集合：

（1）20以内的质数的集合；

（2）20以内正偶数的集合；

（3）20以内既是奇数又是质数的那些数的集合。

3．把下列各集合，改用枚举法表示：

（1）$A=\{210$ 的质因数$\}$；

（2）$B=\{180$ 的约数$\}$；

（3）$C=\{x\mid x^2=9,\ x\in Z\}$；

（4）$D=\{a\mid 5<a<6,\ a\in N\}$；

（5）$E=\{x\mid |x|<1,\ x\in N\}$；

（6）$F=\{5$ 的倍数$\}$；

（7）$G=\{2$ 与 3 的公约数$\}$；

（8）$H=\{n\mid 2n-1,\ n\in N\}$。

在以上集合中，哪些是有限集？哪些是无限集？哪些是单元素集？哪些是空集？

4．用描述法表示下列各集合：

（1）方程：$x^2-1=0$ 的根的集合；

(2) 不等式$|x|<5$的解的集合；

(3) 大于 100 的自然数的集合；

(4) 全体质数的集合；

(5) 适合方程：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=1$ 的全部点的集合；

(6) 闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上所有点的集合.

5. 下列命题是否正确？为什么？

(1) 一个正方形是多边形集合的一个元素；

(2) 地球是太阳系九大行星集合的一个元素；

(3) 一架飞机是飞机场集合的一个元素；

(4) 一支铅笔是铅笔盒集合的一个元素；

(5) 李明是北京市中学集合的一个元素；

(6) $\{(0, 1)\}$是方程 $x+y=1$ 的解的集合；

(7) 1，2，1，3，4 五个数组成一个集合；

(8) 很小的整数组成一个集合；

(9) 集合$\{a, b, c\}$与集合 $\{c, a, b\}$ 是 两个不同的集合.

第二节 集合的包含与相等关系

我们知道，在实数集中，对于任意两个实数 a、b，它们之间存在着大小关系或相等关系. 对于两个集合 A 与 B，也常常要考虑它们之间的关系，我们是通过集合中的元素，来研究集合之间的关系的，即其中一个集合的元素是否是另一个集合中的元素.

对于任意两个集合，一般来说，有以下几种情况：

1. 两个集合的元素完全相同. 如

$$A=\{1, 2, 3\}, \quad B=\{1, 2, 3\};$$

2．其中一个集合的元素全部都是另一个集合的元素．如

$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，

（或$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{1, 2\}$）；

3．两个集合的元素中有部分元素相同．如

$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{2, 3, 4, 5\}$；

4．两个集合中没有相同的元素．如

$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{4, 5, 6\}$．

下面，我们来分别讨论两个集合的元素之间的这些关系，我们有

定义 1 如果集合A的每一个元素都属于集合B，那么，集合A就叫做集合B的子集，集合B叫做集合A的扩集．

记为：　　$A\subseteq B$或$B\supseteq A$，

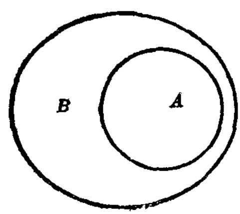
读做：A包含于B或B包含A．

我们在考察上述的1、2两种情况时，发现集合A包含于集合B是有区别的，从而有

定义 2 如果集合A的每一个元素都属于集合B，但集合B至少有一个元素不属于集合A，那么，集合A叫做集合B的真子集，集合B叫做集合A的真扩集．

记为：　　$A\subset B$或$B\supset A$，

集合之间的包含关系，可以用韦恩图来说明．例如，$A\subset B$可以表示为右图．



例 1 设 $A=\{$自然数$\}$，

$B=\{$整数$\}$．

则 $A\subset B$，即A是B的真子集．

例 2 设 $A=\{$等腰三角形$\}$，

$B=\{$等边三角形$\}$

则　$B\subset A$，即B是A的真子集。

例 3　设　$A=\{12$ 的约数$\}$，

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$。

则　$B\subseteq A$，即B是A的子集，但不是真子集。

例 4　设　$A=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$，

$B=\{2, 3\}$。

则　$B\subseteq A$，即B是A的子集，但不是真子集。

根据子集的定义以及例3、例4，可以得出：

（1）一个集合的自身是它的子集，即

$$A\subseteq A;$$

（2）空集是任何集合的子集，即

$$\phi\subseteq A。$$

证明：（用反证法）

如果集ϕ不是A的子集，则ϕ中至少有一个元素不属于A，但ϕ是空集，没有这样的元素，根据定义1，$\phi\subseteq A$。

由此可知，一个非空集合至少有两个子集（集合本身和空集）。

现在，我们来看看任意一个有限集合可能有多少个子集。

例 5　设　$A=\{a, b\}$，

则　A的子集有：ϕ，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$共4个子集。

例 6　设　$A=\{a, b, c\}$，

则　A的子集有8个：$\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\}$
$\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$。