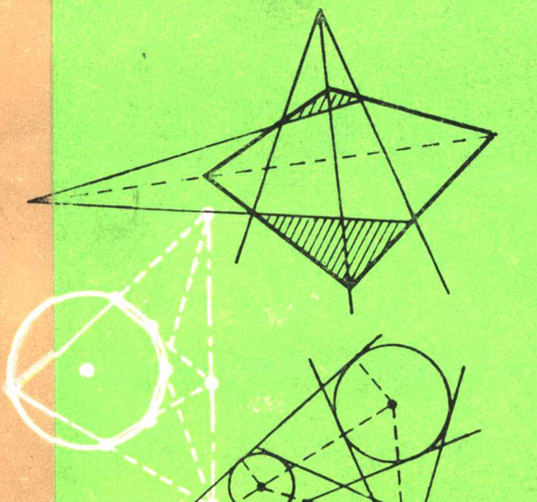
中学生文库

射影几何趣谈



上海教育出版社

中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

射影几何趣谈

冯 克 勤

上 海 教 育 出 版 社

责任编辑 澍 边

封面设计 范一辛

中学生文库 射影几何趣谈

冯 克 勤

上海教育出版社出版发行

（上海永福路123号）

各地新华书店经销 上海市印刷十二厂印刷

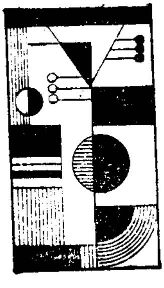
开本787×1092 1/32 印张5 插页2 字数95,000

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

印数1—14,300本

统一书号：7150·3976 定价：0.82元

目 录



引　言

射影几何具有悠久的发展历史．远在公元前四世纪，古希腊人已经发现了圆锥曲线．公元前三世纪，希腊数学家欧几里得(Euclid)和阿波罗尼(Apollonius)都发表了关于圆锥曲线的专门著作．他们发现了关于圆锥曲线许多有趣的性质，这些性质属于现在射影几何的内容．十五世纪和十六世纪，欧洲的学者由于绘画、雕塑和建筑的需要，发现了透视原理．到了十七世纪，法国数学家笛卡儿(R. Descartes, 1596～1650)引入了直角坐标系，使几何学代数化，许多几何问题归结于代数上的解联立方程组，从而把几何图形的性质归结为一些代数运算，这就是解析几何．解析几何的出现，对于力学、物理学和数学本身的发展，起了很大的推动作用．但是，在另一方面，几何本身仍有它自身的直观性和优美性．与笛卡儿同时代的法国数学家德沙格(G. Desargues, 1591～1661)和帕斯卡(B. Pascal, 1623～1662)创立了射影几何．1639年，德沙格通过对透视的研究，建立了无穷远点和射影空间概念．1649年，帕斯卡

德沙格(G. Desargues)

帕斯卡(B. Pascal)

发现了关于圆锥曲线的著名定理．由此，一个优美的数学学科——射影几何产生了．

十八世纪是解析几何得到广泛应用的时代，而十九世纪则是射影几何大发展的时代．射影几何的发展，首先应归功于法国另一个数学家彭色列(J. V. Poncelet, 1788～1867)．他于1822年出版了有名的著作《关于图形的射影性质》，系统研究了图形在中心射影之下不变的性质．在这之前，射影几何是在欧氏几何的框架里进行研究的．但是欧氏几何中的最基本概念——距离，以及角度、面积等性质，在中心射影之下是变化的．既然是这样，为什么射影几何一定要依附于以距离为基石的欧氏几何？于是，在1847年，德国数学家冯·施道特(K. G. C. von Staudt, 1798～1867)等人建立了射影几何自己的公理系统．至此，射影几何作为一个独立的几何学科，基本上完整地建立起来．射影几何有别于欧氏几何，最显著的差别是射影几何中没有“直线平行”这个概念，在射影平面中的任意两条不同的射影直线均恰好

交于一点．在这期间，法国数学家庞加莱(H. J. Poincaré, 1854～1912)，匈牙利数学家波约依(J. Bolyai, 1802～1860)和俄国数学家罗巴切夫斯基(Н. И. Лобачевский, 1792～1856)各自独立地建立了另一些非欧几何的模型．在这些不同的几何学的基础上，1872年德国数学家克莱因(F. Ch. Klein, 1849～1925)在著名的爱尔兰根纲领中给几何学下了一个经典的定义：几何学是研究空间在某个变换群下不变性的一门学问．

以上我们扼要地叙述了射影几何的产生和发展，以及射影几何在整个几何学发展中所处的地位．十九世纪是射影几何的光辉时代，以至于当时英国数学家凯莱(A. Cayley, 1821～1895)说过这样一句名言：一切几何都是射影几何！

在这本小册子里，我们打算通俗地介绍平面射影几何当中一些有趣的定理和概念．我们也以大量的例子来说明，如何利用射影几何的知识和方法来解决平面几何学中的问题．从上面关于几何学的发展历程中看出，解析几何和射影几何是以不同的风格平行地前进；与此同时，它们也是相互渗透和相互促进的．在射影几何中采用了解析几何的手段和工具，如射影坐标等．但是，我们在本书中更多的是采用几何方法，以体现射影几何本身的内在美．我们也说过，射影几何已是一门独立的几何学科，它有着自己的公理系统．但是，作为一本通俗性读物，我们不打算从公理出发严格地板着面孔地讲述，而宁愿先从射影几何中一个精

彩的定理——帕斯卡定理出发. 我们在第一章中, 先给出这个优美定理的一个初等几何的证明; 然后, 再给出另外两个证明, 后一个证明中体现出射影几何的思想, 特别是引出了中心射影的概念和添加无穷远点的自然想法. 随后, 在第二章, 我们逐节介绍平面射影几何中的主要概念(射影平面, 射影坐标, 复比, 对偶性, 配极理论等)和主要定理, 尤其是要着重讲述关于圆锥曲线的一些优美性质, 以及如何用这些概念和性质解决平面几何中的问题. 最后, 在第三章中, 我们讲述射影几何在整个几何学中的地位, 告诉大家什么是射影几何, 介绍它的"子几何"——仿射几何, 再说明欧氏几何又是仿射几何的"子几何". 我们用射影几何构作出非欧几何的模型. 使大家理解克莱因的几何定义, 并且懂得在现实世界中存在着许多不同的几何.

我们希望本书能使读者增强几何直观形象思维的能力和对几何学明快典雅风格的喜爱. 另一方面, 我们(特别是在书的后一半)也使用了一些代数工具(解线性方程组的行列式理论, 坐标方法等), 希望读者对于这些中学数学知识能够灵活运用和融会贯通, 因为整个数学是一个有机的整体, 而许多新思想往往在不同学科的交汇处滋生和发展起来, 射影几何充分体现了这一点.

一、从帕斯卡定理谈起

1. 帕斯卡定理和它的初等证明

帕斯卡在十六岁的时候发现了下面一个美妙的定理:

帕斯卡定理 设 $ABCDEF$ 是圆 O 的内接六边形. 对边 AB 和 DE 交于点 X, 对边 BC 和 EF 交于点 Y, 对边 CD 和 AF 交于点 Z, 则 X、Y 和 Z 在一条直线上(图1-1).

帕斯卡的许多关于圆锥曲线的著作, 不幸都失传了. 德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646～1716)说他看见过帕斯卡的这个定理, 并且将它称作是"神奇的六边形". 我们不知道当年帕斯卡是如何证明这个定理的, 但是现在人们已经给出它的许多种证明. 本章中我们给出其中的三个证明, 下一章中还要给出另一个证明. 在这一节中, 我们先给出一个初等几何的证明. 为此, 我们需要两个预备性定理.

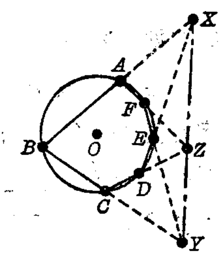


图 1-1

预备定理 1 设圆 O 和圆 O' 交于两个点 P 和 Q. 过点 P 作直线 AB, 与圆 O 和 O' 分别交于点 A 和 B. 过点 Q 作直线 $A'B'$, 与圆 O 和 O' 分别交于点 A' 和 B'. 则 $AA' /\!/ BB'$.

证明 连结 PQ(参见图 1-2). 由圆内接四边形的性质可知 $\angle\alpha=\angle\beta$、$\angle\beta=\angle\gamma$. 于是 $\angle\alpha=\angle\gamma$. 从而 $AA' /\!/ BB'$. 证毕.

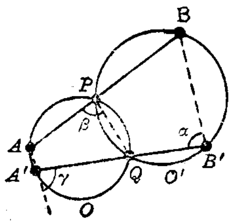


图 1-2

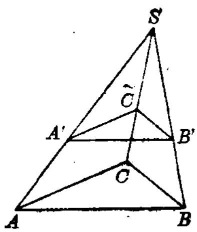


图 1-3

预备定理 2 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的对应边平行, 即 $AB /\!/ A'B'$、$BC /\!/ B'C'$、$CA /\!/ C'A'$. 如果直线 AA'、BB'、CC' 两两相交, 则这三条直线必相交于一点.

证明 设 AA' 和 BB' 交于点 S. 我们只需证明 C' 一定在直线 SC 上. 现在过 A' 作直线平行于 AC, 并且与直线交于点 $\tilde{C}$. 再连结 $\tilde{C}B'$(图 1-3). 由于 $AC /\!/ A'\tilde{C}$, 从而 $\triangle A'\tilde{C}S \backsim \triangle ACS$. 于是

$$\frac{A'S}{AS}=\frac{\tilde{C}S}{CS}.$$

同样地, 由于 $AB /\!/ A'B'$, 可知

$$\frac{A'S}{AS}=\frac{B'S}{BS}.$$

于是 $$\frac{\widetilde{C}S}{CS}=\frac{B'S}{BS}.$$

由此可知 $\triangle\widetilde{C}B'S\backsim\triangle CBS$. 于是 $\widetilde{C}B'\parallel CB$. 所以 $\widetilde{C}$ 是过 A' 和 B' 分别与 AC, BC 平行的两条直线的交点. 但是这个交点应当是 C', 所以 $\widetilde{C}=C'$. 由于 $\widetilde{C}$ 在直线 SC 上, 从而 C' 在直线 SC 上. 这就证明完毕.

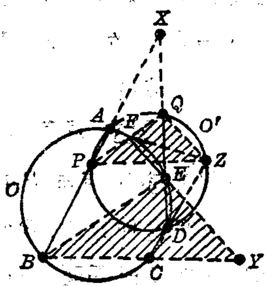


图 1-4

现在我们来证明帕斯卡定理(参见图1-4). 过 A、D、Z 三点作圆 O'. 圆 O' 与直线 AB 已有交点 A. 设另一个交点为 P(注意: 如果 $A=P$, 即 AB 与圆 O' 相切的时候, 下面的证明仍有效). 圆 O' 与直线 DE 除 D 外还交于一点 Q. 由预备定理1可知 $PQ\parallel BE$, $QZ\parallel EY$, $PZ\parallel BY$. 再由预备定理2便知 ZY 过 BP 和 EQ 的交点 X. 换句话说, X、Y、Z 三点在一条直线上. 这就证明了帕斯卡定理.

这个证明颇为别致. 但是添加辅助圆 O' 和众多的辅助线, 着实需要一点巧妙的想法. 下面介绍的两个证明, 也都具有新的构思.

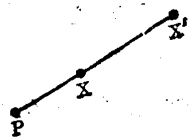
2. 反　　演

——帕斯卡定理的第二个证明

帕斯卡定理的第二个证明采用一种新的想法, 即采用

几何图形的反演．我们先来介绍什么是平面上的反演．

在平面上取一点 P，再取定一个正实数 k．对于平面上另一点 X（这里 $X \neq P$），在射线 PX 上有唯一的一点 X'，满足



$$\overline{PX} \cdot \overline{PX'} = k^2, \qquad (*)$$

图 1-5

其中 $\overline{PX}$ 表示两点 P 和 X 之间的距离，即线段 PX 的长度．按照这种方法，我们把平面上除了 P 之外的每个点 X 都唯一地变成平面上点 $X'(\neq P)$．我们把平面上的这个变换 π 叫作是一个反演．点 P 叫作反演中心，k 叫作反演半径．点 $X(\neq P)$的反演点 X' 也记作 $\pi(X)$．由定义不难看出，如果 X' 是 X 的反演点，则 X 是 X' 的反演点，即：若 $X'=\pi(X)$，则 $X=\pi(X')$．所以，一方面，不仅平面上除 P 之外每个点 X 均变成唯一的反演点 X'，而且另一方面，平面上除 P 之外的任意一点 A 也均是某个点的反演点，因为若 $B=\pi(A)$，则事实上 A 就是 B 的反演点：$\pi(B)=A$．于是，以 P 为反演中心的反演，把去掉点 P 的平面变到它自身之上，并且是一一对应．这样的事情我们以后还要遇到很多次．今后我们把某个几何图形到它自身之上的点之间的一一对应都叫作是一个变换．于是，我们遇到了变换的第一个例子：平面上以点 P 为中心的每个反演都是平面除掉一点 P 之后所得到的“有洞”平面上的一个变换．当然，这个变换不仅与反演中心 P 有关，而且与反演半径 k 也有关．

反演变换有许多有趣的性质．现在我们只叙述今后证明柏斯卡定理所需要的一些性质，其他性质留给大家作为习题．以下用 π 表示以点 P 为中心，k 为半径的反演．

性质 1 设圆 O 是以 P 为圆心 k 为半径的圆．则平面上点 X 等于它的反演点 $X'=\pi(X)$ 的充分必要条件是点 X 在圆 O 上．

证明 这可由反演定义中的 (*) 式直接推出．因为 $X=\pi(X)=X'$ 的充分必要条件是 $\overline{PX}\cdot\overline{PX}=k^2$，即 $\overline{PX}=k$．这相当于说点 X 在圆 O 上．证毕．

性质 1 表明，反演 π 的不动点恰好是圆 O 上的那些点．圆 O 叫作反演 π 的反演圆．从(*)式同样可知，π 把反演圆外部的点变到反演圆的内部(若 $\overline{PX}>k$，则 $\overline{PX'}<k$)，而把反演圆除去点 P 之后的内部变成反演圆的整个外部．

性质 2 设圆 Ω 不过点 P，则反演 π 把圆 Ω 变成圆．

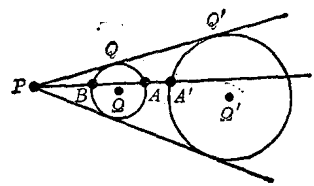


图 1-6

证明 先设点 P 在圆 Ω 的外面(见图 1-6)．设 A 是圆 Ω 上一点．PA 与圆 Ω 交于另一点 B．则 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=c^2$，其中 c 是过点 P 作圆 Ω 的切线 PQ 的切线长度．令 $A'=\pi(A)$，则 $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=k^2$．于是 $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA'}}$ 为常数 $\left(\dfrac{c}{k}\right)^2$．当 A 跑过圆 Ω 时，点 B 也跑过圆 Ω．由于 $\overline{PB}$ 与 $\overline{PA'}$ 之间有

固定的比值，可知点 A' 描出的曲线应当与点 B 描出的曲线(即圆 Ω)相似，从而也是一个圆 Ω'，这就证明完毕.（请读者证明当 P 在圆 Ω 内的情形.）

除了圆 Ω 反演成圆 Ω' 之外，从证明中我们还可以看出：圆 Ω 上切点 Q 的反演是圆 Ω' 上的切点 Q'，并且当点 A 沿着圆 Ω 转动时，反演点 A' 以相反的方向沿着圆 Ω' 转动.

在叙述反演的另一个性质之前，我们先讲一下什么是两个相交圆的夹角. 设圆 O 和圆 O' 相交于两个点 A 和 B（图 1-7），则 $\angle OAO'=\angle OBO'$，这里 O 和 O' 分别是两个圆的圆心. 我们把这个角度称作是这**两个圆的夹角**.

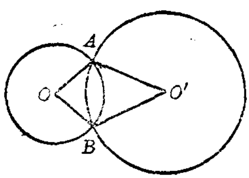


图 1-7

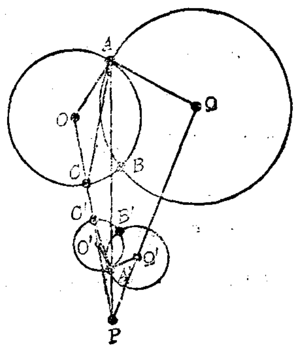


图 1-8

性质 8 设圆 O 和圆 Ω 相交，点 P 在此两圆的外部. 反演 π 把圆 O 和圆 Ω 分别变成圆 O' 和圆 Ω'. 则圆 O 和圆 Ω 的夹角等于圆 O' 和圆 Ω' 的夹角.

证明 我们以 O、Ω、O'、Ω' 分别表示四个圆的圆心. 令 $A'=\pi(A)$、$B'=\pi(B)$，其中 A 和 B 是圆 O 和圆 Ω 的两个

交点. 从性质 2 的证明可知, A' 和 B' 是圆 O' 和圆 Ω' 的两个交点,并且 P、A、A' 在一条直线上. P、O、O' 也在一条直线上. 设直线 PO 与圆 O 交于点 C, $C'=\pi(C)$,则 C' 是直线 PO 与圆 O' 的交点(见图 1-8). 由于 $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=k^2=\overline{PC}\cdot\overline{PC'}$,可知 $\triangle ACP\backsim\triangle C'A'P$. 从而

$$\angle CAP=\angle A'C'P=\angle O'A'C'. \qquad (1)$$

此外还有

$$\begin{aligned}\angle OAC=\angle OCA&=180^\circ-\angle ACP\\&=180^\circ-\angle C'A'P=\angle C'A'A.\end{aligned} \qquad (2)$$

将(1)和(2)式两边相加,便得到 $\angle OAP=\angle O'A'A$. 同样可以证明 $\angle \Omega AP=\angle \Omega'A'A$. 将后两式相加,就得到 $\angle OA\Omega=\angle O'A'\Omega'$. 这就证明了性质 3.

现在我们准备利用反演给出帕斯卡定理的第二个证明. 首先,我们仍需要两个预备定理,这两个预备定理本身也是很有意思的.

预备定理 3 (梅内劳斯(Menelaus,公元 80 年左右)定理). 在 $\triangle ABC$ 的三边 AB、AC 和 BC 的延长线上分别取点 X、Z 和 Y,如果

$$\frac{AX}{BX}\cdot\frac{BY}{CY}\cdot\frac{CZ}{AZ}=1,$$

则 X、Y、Z 三点在一条直线上.

证明 设直线 XZ 与直线 BC 交于 Y'(图 1-9). 我们只需证明

$$\frac{AX}{BX}\cdot\frac{BY'}{CY'}\cdot\frac{CZ}{AZ}=1 \qquad (*)$$

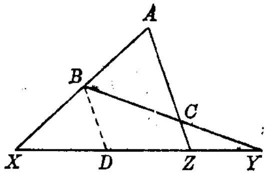


图 1-9

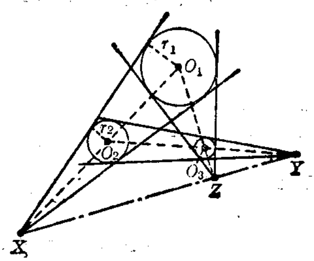


图 1-10

因为根据此式和定理条件可推出

$$\frac{BY'}{CY'}=\frac{BY}{CY},$$

由于 Y' 和 Y 均在直线 BC 上，从而必然 $Y'=Y$. 这便可以证明 X、Y、Z 共线.

为证(*)式，过 B 作平行于 AZ 的直线，与 XZ 交于 D. 由 $BD/\!/AZ$ 可知

$$\frac{AX}{BX}=\frac{AZ}{BD}、\frac{BY'}{CY'}=\frac{BD}{CZ},$$

由此即得(*)式. 这就证明了梅内劳斯定理.

预备定理 4 设 O_1、O_2、O_3 是大小均不相等的三个圆. X 是圆 O_1 和圆 O_2 的公切线交点，Y 是圆 O_2 和圆 O_3 的公切线交点，Z 是圆 O_1 和圆 O_3 的公切线交点. 则 X、Y、Z 三点在一条直线上.

证明 设三个圆的圆心分别为 O_1、O_2 和 O_3，而半径分别为 r_1、r_2 和 r_3(图 1-10). 不难看出 X、O_2、O_1 在一条直线上，并且

$$\frac{O_1X}{O_2X}=\frac{r_1}{r_2}.$$