经济数学
全程导学（下册）

JINGJI SHUXUE QUANCHENG DAOXUE

人大社·《线性代数》（第三版）

人大社·《概率论与数理统计》（修订本）

裘亚峥 贺伟奇 杨文胜 曾力勇 编著

● 大学数学精要辅导丛书

湖南科学技术出版社

● 大学数学精要辅导丛书

经济数学全程导学（下册）

JINGJI SHUXUE QUANCHENG DAOXUE

人大社·《线性代数》（第三版）

人大社·《概率论与数理统计》（修订本）

裘亚峥 贺伟奇 杨文胜 曾力勇 编著

JINGJI SHUXUE

湖南科学技术出版社

大学数学精要辅导丛书
经济数学全程导学(下册)
人大社·《线性代数》(第三版)
人大社·《概率论与数理统计》(修订本)
编　　著：裘亚峥　贺伟奇　杨文胜　曾力勇
责任编辑：徐　为　赵　龙
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路 276 号
http://www.hnstp.com
印　　刷：长沙环境保护学校印刷厂
(印装质量问题请直接与本厂联系)
厂　　址：长沙市井湾路 4 号
邮　　编：410004
出版日期：2004 年 9 月第 1 版第 1 次
开　　本：850mm × 1168mm　1/32
印　　张：11.25
字　　数：294000
书　　号：ISBN 7 - 5357 - 4064 - 2/O·233
定　　价：19.00 元

前言

本书是按照中国人民大学出版社出版的、由赵树嫄主编的经济应用数学基础(二)《线性代数》(第三版)及袁荫棠主编的经济应用数学基础(三)《概率论与数理统计》(修订本)的内容，根据中国人民大学《线性代数》及《概率论与数理统计》课程教学的基本要求及考研大纲(高等数学三、四)而编写的一本教学辅导书，它是由湖南科学技术出版社同时出版的《经济数学全程导学》(上册)一书的姊妹篇．

本书以高等院校经济类、管理类、文科类专业的本科及大专学生、考研志士为主要对象，其根本目的是为了帮助学生理解教材的体系，扫清学习障碍，提高学习效率，培养具有数学素养和创新能力的合格人才．本书也可作为有关专业自考生、教师的参考书．

本书共 13 章，分线性代数和概率论与数理统计两部分．每章设“内容提要”、“典型例题”、“习题选解”，“考研题解”等四节，其特点是：

一、“内容提要”简明、系统，重点突出，以蓝本为基础，融会了作者多年从教的经验，每章的知识脉络图，条理清晰、简单，使读者能对本章的知识体系及重点内容一目了然．

二、“典型例题”精粹、解答详尽并总结了每章典型题目的类型和解法，着重分析，提高解题能力．

三、“习题选解”解答了蓝本上大部分有代表性和针对性的习题，习题的序号还是沿用蓝本中原来的序号，方便读者．

四、“考研题解”以每章内容为主，选择了近 10 年来考研中“高等数学三、四”的试题，并给出详解．题序后括号内文字的意义，以“[1－1](研，2001－4)”为例，说明

如下:“研,2001-4”表示2001年研究生入学考试中高等数学四的试题,其余类推.

参加本书编写的有:贺伟奇(线性代数部分第二、三、四章),曾力勇(线性代数部分第一章),杨文胜(概率统计部分第五、六、七、八、九章),裘亚峥(概率统计部分第一、二、三、四章).

由于编者水平有限,时间又比较仓促,书中难免存在不妥之处,恳请同行、读者给予批评指正.

裘亚峥

2004年5月16日

于中南大学

目录

线性代数

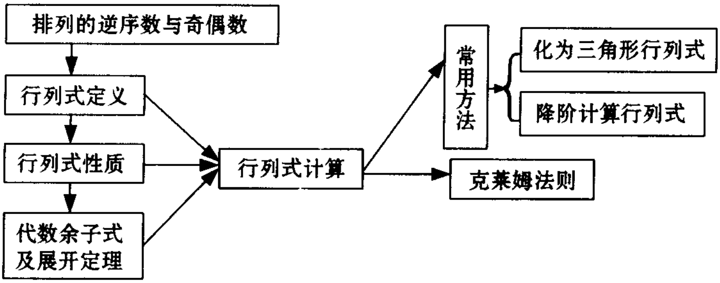
概率论与数理统计

第一章 行列式

HANG LIE SHI

一、内容提要

(一) 知识脉络



(二) 定义、定理

1. n 阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列;$N(j_1j_2\cdots j_n)$ 是这个排列的逆序数;$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 所有排列(共有 $n!$个) 取和.

2. 行列式的性质

(1) 将行列式转置,行列式的值不变,即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

(2) 交换行列式的两行(列),行列式的值变号.

推论　如果行列式中有两行(列) 的对应元素相同,则此行列式的值为零.

(3) 用数 k 乘行列式的某一行(列),等于以数 k 乘此行列式.

推论 1　如果行列式某行(列) 的所有元素有公因子,则公因子可以提到行列式外面.

推论 2　如果行列式有两行(列) 的对应元素成比例,则此行

列式的值等于零.

(4) 如果将行列式中的某一行(列) 的每一个元素都写成两个数的和,则此行列式可以写成两个行列式的和,这两个行列式分别以这两个数为所在行(列) 对应位置的元素,其他位置的元素与原行列式相同.即如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D = D_1 + D_2$.

推论　如果将行列式某一行(列) 的每个元素都写成 m 个数(m 为大于2的整数)的和,则此行列式可以写成 m 个行列式的和.

(5) 将行列式某一行(列) 的所有元素同乘以数 k 后加于另一行(列) 对应位置的元素上,行列式的值不变。

(6) 行列式按行(列) 展开定理:n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列) 的各元素与其对应代数余子式乘积的和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或 $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

推论　n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的某一行(列) 的元素与另一行(列) 对应元素的代数余子式乘积的和等于零,即

$$a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = 0 \quad (i \neq s)$$

或 $$a_{1j}A_{1t} + a_{2j}A_{2t} + \cdots + a_{nj}A_{nt} = 0 \quad (j \neq t).$$

3. 克莱姆法则

含有 n 个方程的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

中,当其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \text{有且仅有惟一解}$$

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

其中 $D_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式中第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 对应地换为方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 后得到的行列式.

推论　未知量个数与方程个数相等的齐次线性方程有非零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式 $D = 0$.

二、典型例题

(一) 利用行列式的定义计算行列式

例 1.1　设 n 阶行列式中有 $n^2 - n$ 个以上元素为零,证明该行列式为零.

证　设 n 阶行列式为 $|a_{ij}|$,根据 n 阶行列式的定义,$|a_{ij}|$ 的一般项为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

又 $|a_{ij}|$ 中零元素个数大于 $n^2 - n$,所以 $|a_{ij}|$ 中不等于零的元素个数小于 $n^2 - (n^2 - n) = n$ 个.由此可知行列式 $|a_{ij}|$ 的任何一项都等于零,所以 $|a_{ij}| = 0$.

例 1.2　用行列式的定义计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解　根据 n 阶行列式的定义，D_n 的一般项为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

由此可知，仅当 $j_n = 1, j_{n-1} = 2, \cdots, j_2 = n-1, j_1 = n$ 时，该行列式的一般项不等于零，所以

$$D_n = (-1)^{N[n(n-1)\cdots 2\cdot 1]} \times 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = (-1)^{(n-1)+\cdots+1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

例 1.3　已知 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，求 x^3 的系数.

解　设 $f(x) = |a_{ij}|\ (i,j = 1,2,3,4)$，由行列式的定义，$f(x)$ 是一个 x 的多项式函数，且最高次幂为 x^3. 显然行列式中含 x^3 的项仅有两项，它们是：$(-1)^{N(1234)} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 及 $(-1)^{N(1243)} a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$.

即　$x \cdot x \cdot x \cdot 1 = x^3$ 及 $(-1) \cdot x \cdot x \cdot 2x \cdot 1 = -2x^3$.

故多项式 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 $1 + (-2) = -1$.

(二) 用化为三角形行列式的方法计算行列式

这是计算行列式的最基本且常用的方法，它主要是通过利用行列式的性质等，将行列式化为三角形行列式来计算. 它的难点在于具体怎样化为上三角或下三角行列式以及如何计算较为简便，这需要在熟练掌握行列式性质的前提下，多练习，多思考，并注意从范例中得到启发，灵活变通.

例 1.4　计算下列行列式：

$$(1)\ D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix},$$

$$(2)\ D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \text{其中 } a_i \neq 0 \ \ (i = 0,1,\cdots,n).$$

解 (1)

$$\begin{array}{l} D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} = \\ \qquad\qquad \times 1 \quad \times 1 \qquad\quad \times 1 \quad \times 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x & a \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times(-1) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} = \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix} =$$

$[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$.

$$(2)D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} =$$

$$\times\left(-\frac{1}{a_1}\right) \quad \times\left(-\frac{1}{a_2}\right) \quad \cdots \quad \times\left(-\frac{1}{a_n}\right)$$

$$\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} =$$

$$\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)a_1a_2\cdots a_n =$$

$$a_0a_1a_2\cdots a_n - a_1a_2\cdots a_n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}.$$

注　这是一种典型的行列式,常称为“三线行列式”,类似的题目都可以采用这种相似的方法去计算。

例 1.5　计算下列行列式

$$(1)\ D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n\end{vmatrix}$$

$$(2)\ D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1\\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2\\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x & x & x & \cdots & 2\\ 1 & x & x & x & \cdots & 1\end{vmatrix}.$$

解(1)　将 D_{n+1} 的第一行加到第二行上，再将新得到的第二行加到第三行上……直至新得到的第 $n-1$ 行加到第 n 行上，行列式 D_{n+1} 化为

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

$$(2)\ D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1\\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2\\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x & x & x & \cdots & 2\\ 1 & x & x & x & \cdots & 1\end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \times(-1)\\ \times(-1)\\ \times(-1)\\ \vdots\\ \\ \times(-1)\end{array}=$$

$$
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
1 & x & x & x & \cdots & 1
\end{vmatrix}.
$$

再按第一列展开得

$$
D_n = (-1)^{n+1}
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\\
\times(-1) \\
\times(-1) \\
\\
\times(-1)
\end{array}
=
$$

$$
(-1)^{n+1}
\begin{vmatrix}
x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1
\end{vmatrix}
=
$$

$$
(-1)^{n+1}x^{n-2}.
$$

(三) 按行列式展开定理,降阶计算行列式

这也是常用的计算行列式的重要方法,特别是高阶行列式的计算通常用降价法.它主要是通过先用行列式的性质将行列式中某一行(列)化为仅含有一个非零元素,再按此行(列)展开,变为低一阶的行列式,如此继续下去,直到化为三阶或二阶行列式.

例 1.6 计算行列式:

$$
D = \begin{vmatrix}
1 & 2 & 1 & 4 \\
0 & -1 & 2 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 3 & 1
\end{vmatrix}.
$$

解法 1 选择含零最多的第 1 列展开,得