

八^年级

总主编 单 樽 熊 斌

奥数教程

本册主编 赵雄辉



华东师范大学出版社

总主编 单 燊 熊 斌

奥数教程

(第三版)

· 八年级 ·

本册主编 赵雄辉

参编者 申建春 赵雄辉 卞新荣

谢立红 艾跃龙



华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程. 八年级/赵雄辉主编. —上海:华东师范大学出版社, 2000. 11

ISBN 7-5617-2378-4

I. 奥... II. 赵... III. 数学课—初中—教学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 48987 号

奥数教程·八年级· (第三版)

总 主 编 单 增 熊 斌

主 编 赵雄辉

策划组稿 倪 明

责任编辑 徐惟简

封面设计 高 山

版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社

市场部 电话 021-62865537

门市(邮购)电话 021-62869887

门市地址 华东师大校内先锋路口

业务电话 上海地区 021-62232873

华东 中南地区 021-62458734

华北 东北地区 021-62571961

西南 西北地区 021-62232893

业务传真 021-62860410 62602316

<http://www.ecnupress.com.cn>

社 址 上海市中山北路 3663 号

邮编 200062

照 排 南京理工出版信息技术有限公司

印 刷 者 江苏句容市排印厂

开 本 890 × 1240 32 开

印 张 10

字 数 286 千字

版 次 2006 年 1 月第 3 版

印 次 2006 年 1 月第 21 次

书 号 ISBN 7-5617-2378-4/G · 1115

定 价 13.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

本书荣获
第十届全国教育图书展
优秀畅销图书奖

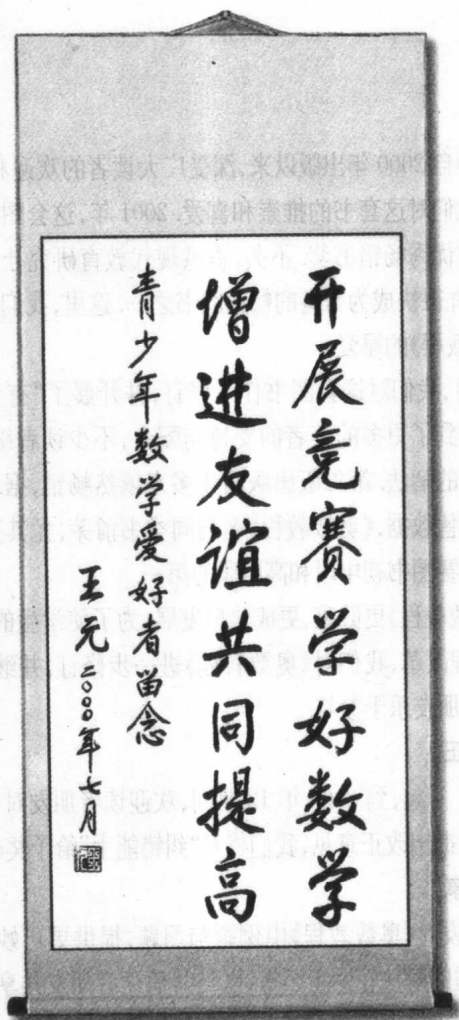
《奥数教程》编委会

顾 问	王 元
主 编	单 墀 熊 斌
编 委	(按姓氏笔画为序)
	冯志刚 刘诗雄
	江兴代 余红兵
	单 墀 杭顺清
	胡大同 赵雄辉
	倪 明 葛 军
	熊 斌



赵雄辉 1964年生，现为湖南省教育科学研究院副研究员，数学教育硕士。独立编写和主编的著作有《证明的方法》、《初中数学竞赛同步训练指南》、《数学解题思维策略》、《数学特长生训练教程》、《中学数学课堂教学模式研究》、《中小学教师队伍素质研究》、《名师名题精析·数学卷》等21种。参编的书籍有《学习方法指导》、《21世纪中国数学教育展望》、《初中数学应用问题》等10多种。发表数学教育文章80多篇。

普 菊 姪



著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生致青少年数学爱好者

前言

据说在很多国家,特别是美国,孩子们害怕数学,把数学作为“不受欢迎的学科”。但在中国,情况很不相同,很多少年儿童喜爱数学,数学成绩也都很好.的确,数学是中国人擅长的学科,如果在美国的中小学,你见到几个中国学生,那么全班数学的前几名就非他们莫属.

在数(shǔ)数(shù)阶段,中国儿童就显出优势.

中国人能用一只手表示 1~10,而很多国家非用两只手不可.

中国人早就有位数的概念,而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有 12 进制,60 进制的残余).

中国文字都是单音节,易于背诵,例如乘法表,学生很快就能掌握,再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”.但外国人,一学乘法,头就大了.不信,请你用英语背一下乘法表,真是佶屈聱牙,难以成诵.

圆周率 $\pi = 3.14159\cdots$. 背到小数后五位,中国人花一两分钟就够了.可是俄国人为了背这几个数字,专门写了一首诗,第一句三个单词,第二句一个,……要背 π 先背诗,我们看来简直自找麻烦,可他们还作为记忆的妙法.

四则运算应用题及其算术解法,也是中国数学的一大特色.从很古的时候开始,中国人就编了很多应用题,或联系实际,或饶有兴趣,解法简洁优雅,机敏而又多种多样,有助于提高学生学习兴趣,启迪学生智慧.例如:

“一百个和尚一百个馒头,大和尚一个人吃三个,小和尚三个人吃一个,问有几个大和尚,几个小和尚?”

外国人多半只会列方程解.中国却有多种算术解法,如将每个大和尚“变”成 9 个小和尚,100 个馒头表明小和尚是 300 个,多出 200 个和尚,是由于每个大和尚变小和尚,多变出 8 个,从而 $200 \div 8 = 25$ 即是大和尚人数.小和尚自然是 75 人,或将一个大和尚与 3 个小和尚编成一组,平均每人吃一个馒头.恰好与总体的平均数相等.所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少,即大和尚是 $100 \div (3 + 1) = 25$ 人.

中国人善于计算,尤其善于心算.古代还有人会用手指计算(所谓“掐指一算”).同时,中国很早就有计算的器械,如算筹、算盘.后者可以说是计算机的雏形.

在数学的入门阶段——算术的学习中,我国的优势显然,所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科.

几何推理,在我国古代并不发达(但关于几何图形的计算,我国有不少论著),比希腊人稍逊一筹.但是,中国人善于向别人学习.目前我国中学生的几何水平,在世界上遥遥领先.曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班,他们认为所教的几何内容太深,学生不可能接受,但听课之后,不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解,而且掌握得很好.

我国数学教育成绩显著.在国际数学竞赛中,我国选手获得众多奖牌,就是最有力的证明.从1986年我国正式派队参加国际数学奥林匹克以来,中国队已经获得了11次团体冠军.成绩骄人.当代著名数学家陈省身先生曾对此特别赞赏.他说“今年一件值得庆祝的事,是中国在国际数学竞赛中获得第一.……去年也是第一名.”(陈省身1990年10月在台湾成功大学的讲演“怎样把中国建为数学大国”)

陈省身先生还预言:“中国将在21世纪成为数学大国.”

成为数学大国,当然不是一件容易的事,不可能一蹴而就,它需要坚持不懈的努力.我们编写这套丛书,目的就是:(1)进一步普及数学知识,使数学为更多的青少年喜爱,帮助他们取得好的成绩;(2)使喜爱数学的同学得到更好的发展,通过这套丛书,学到更多的知识和方法.

“天下大事,必作于细.”我们希望,而且相信,这套丛书的出版,在使我国成为数学大国的努力中,能起到一点作用.本丛书初版于2000年,2003年修订过一次,现根据课程改革的要求对各册再作不同程度的修订.

著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问,并为青少年数学爱好者题词,我们表示衷心的感谢.还要感谢华东师范大学出版社及倪明先生,没有他们,这套丛书不会是现在这个样子.

单 增 熊 斌

2005年11月

目 录

第 1 讲	分数的计算	1
第 2 讲	分数的大小比较	7
第 3 讲	分数数列求和	14
第 4 讲	繁分数	21
第 5 讲	分数、百分数应用题	27
第 6 讲	巧配浓度	35
第 7 讲	工程问题	43
第 8 讲	比和比例关系	51
第 9 讲	圆的周长和面积	58
第 10 讲	扇形	69
第 11 讲	长方体和正方体	80
第 12 讲	圆柱和圆锥	93
第 13 讲	加法原理和乘法原理	104
第 14 讲	递推的方法	110
第 15 讲	重叠问题	120
第 16 讲	钟面上的数学问题	128
第 17 讲	上楼梯的问题	133
第 18 讲	同余问题	139
第 19 讲	不定方程	144
第 20 讲	最大与最小	151
第 21 讲	从整体看问题	156
第 22 讲	反过来考虑	163
第 23 讲	不变量	170
第 24 讲	染色问题	177

第 25 讲 对策问题	183
综合测试题(一)	189
综合测试题(二)	193
习题解答	197

第 1 讲

分数的计算



一、知识要点和基本方法

分数计算是小学数学的重要内容,也是数学竞赛的重要内容之一。

分数计算同整数计算一样既有知识要求又有能力要求。法则、定律、性质是进行计算的依据,要使计算快速、准确,关键是掌握运算技巧。对算式认真观察,剖析算式的特点及各数之间的关系,巧妙、灵活地运用运算定律,合理改变运算顺序,使计算简便易行,这对启迪思维,培养综合分析、推理能力和灵活的运算能力,都有很大的帮助。

大家都非常熟悉德国著名数学家高斯十岁时巧算前 100 个自然数的故事吧!从某种意义上说,计算方法的巧妙,在一定程度反映一个人智商的高低。就这个问题给同学们提供一些帮助,愿你能较好地掌握巧算妙解的方法。



二、例题精讲

例 1 计算: $\frac{2006 \times (4.4 \times 87 - 4.3)}{4.3 \times 87 + 4.4}$

分析 可以清楚地看到分子的括号部分与分母可以通过乘法意义转化成同一个算式,使计算简便。

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= 2006 \times \frac{(4.3 + 0.1) \times 87 - 4.3}{4.3 \times 87 + 4.4} \\ &= 2006 \times \frac{4.3 \times 87 + 8.7 - 4.3}{4.3 \times 87 + 4.4} \\ &= 2006 \times \frac{4.3 \times 87 + 4.4}{4.3 \times 87 + 4.4}\end{aligned}$$

$$= 2\,006$$

计算:
$$\frac{1.2 \times 3.6 \times 10.8 + 2 \times 6 \times 18 + \frac{1}{13} \times \frac{3}{13} \times \frac{9}{13}}{1.2 \times 2.4 \times 4.8 + 2 \times 4 \times 8 + \frac{1}{13} \times \frac{2}{13} \times \frac{4}{13}}$$

分析 若按部就班,计算的复杂性是可想而知的.通过观察,找到分子、分母的共同点,变形以后,计算过程就简单多了.

解 原式 =
$$\frac{1.2^3 \times 1 \times 3 \times 9 + 2^3 \times 1 \times 3 \times 9 + \left(\frac{1}{13}\right)^3 \times 1 \times 3 \times 9}{1.2^3 \times 1 \times 2 \times 4 + 2^3 \times 1 \times 2 \times 4 + \left(\frac{1}{13}\right)^3 \times 1 \times 2 \times 4}$$

$$= \frac{1 \times 3 \times 9}{1 \times 2 \times 4} \times \frac{1.2^3 + 2^3 + \left(\frac{1}{13}\right)^3}{1.2^3 + 2^3 + \left(\frac{1}{13}\right)^3}$$

$$= 3 \frac{3}{8}$$

计算:

$$1 \frac{1}{2} + 3 \frac{1}{4} + 5 \frac{1}{8} + 7 \frac{1}{16} + 9 \frac{1}{32} + 11 \frac{1}{64} + 13 \frac{1}{128} + 15 \frac{1}{256} + 17 \frac{1}{512} + 19 \frac{1}{1024}$$

分析 先分别把整数部分的数、分数部分的数合并,然后把整数部分的和加上分数部分的和.

解 原式 =
$$(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19)$$

$$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} \right)$$

$$= 100 + \left(1 - \frac{1}{1024} \right)$$

$$= 100 + \frac{1\,023}{1\,024}$$

$$= 100 \frac{1\,023}{1\,024}$$

● 计算:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) \times \left(2-\frac{2}{3}\right) \times \left(3-\frac{3}{4}\right) \times \left(4-\frac{4}{5}\right) \times \left(5-\frac{5}{6}\right) \times \\ \left(6-\frac{6}{7}\right) \times \left(7-\frac{7}{8}\right) \times \left(8-\frac{8}{9}\right) \times \left(9-\frac{9}{10}\right)$$

分析 把每一个括号里的结果计算出来,解这道题的方法可能就产生了. 第一个括号的差是 $\frac{1}{2}$,第二个括号的差是 $\frac{4}{3}$,第三个括号的差是 $\frac{9}{4}$ ……

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{9}{4} \times \frac{16}{5} \times \frac{25}{6} \times \frac{36}{7} \times \frac{49}{8} \times \frac{64}{9} \times \frac{81}{10} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2^2}{3} \times \frac{3^2}{4} \times \frac{4^2}{5} \times \frac{5^2}{6} \times \frac{6^2}{7} \times \frac{7^2}{8} \times \frac{8^2}{9} \times \frac{9^2}{10} \\ &= 3 \times 4 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 36\,288 \end{aligned}$$

● 计算:

$$\frac{455}{7 \times 11 \times 13} + \frac{1\,326}{11 \times 13 \times 17} + \frac{2\,223}{13 \times 17 \times 19} + \frac{1\,311}{17 \times 19 \times 23}$$

分析 先把分子分解质因数,约分后就可以获得结果.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \frac{5 \times 7 \times 13}{7 \times 11 \times 13} + \frac{6 \times 13 \times 17}{11 \times 13 \times 17} + \frac{9 \times 13 \times 19}{13 \times 17 \times 19} \\ &\quad + \frac{3 \times 19 \times 23}{17 \times 19 \times 23} \\ &= \frac{5}{11} + \frac{6}{11} + \frac{9}{17} + \frac{3}{17} \\ &= 1 \frac{12}{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{(2^2+4^2+6^2+\cdots+100^2)-(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2)}{1+2+3+\cdots+8+9+10+9+8+\cdots+3+2+1} \\ \text{解 原式} &= \frac{(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\cdots+(100^2-99^2)}{10^2} \\ &= \frac{(2+1)(2-1)+(4+3)(4-3)}{10^2} \\ &\quad + \frac{(6+5)(6-5)+\cdots+(100+99)(100-99)}{10^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3+7+11+\cdots+195+199}{100} \\
&= \frac{(3+199) \times 50 \div 2}{100} \\
&= \frac{101 \times 50}{100} = \frac{101}{2}
\end{aligned}$$

练 习 题

A 组

计算下列各题(1~7):

1 $35 \times \frac{37}{138} + 137 \times \frac{103}{138}$

2 $18 \times \frac{3}{7} + 0.65 \times \frac{8}{13} - \frac{2}{7} \times 18 + \frac{5}{13} \times 0.65$

3 $425 \div 3 \frac{2}{5} + 4 \frac{7}{12} \times 4 \frac{7}{12} \times 2 \frac{2}{11} - 10 \frac{5}{24}$

4 $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{20} - \frac{1}{200} - \frac{1}{2000} - \frac{1}{20000}$

5 $7.0875 - 4 \frac{2}{3} \times 0.72 + \frac{57}{64} \div 2.85$

6 $84 \frac{1}{2} - \left\{ 2 - \left[0.35 \div \left(1 - \frac{3}{8} \right) \times 60\% \right] \right\} \times \frac{1}{4}$

7 $1992 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{3} + 2 \frac{1}{2} - 3 \frac{1}{3} + 4 \frac{1}{2} - 5 \frac{1}{3} + \cdots + 1990 \frac{1}{2} - 1991 \frac{1}{3}$

B 组

计算下列各题(8~15):

8 $\frac{3}{7} \times 2.96 \div 2 \frac{1}{11} \div \left(1 \frac{5}{7} \times 1.48 \right) \times 4 \frac{2}{11}$

9 $\left(\frac{2}{343} + \frac{4}{343} + \frac{6}{343} + \cdots + \frac{98}{343} \right) - \left(\frac{3}{686} + \frac{5}{686} + \frac{7}{686} + \cdots + \frac{99}{686} \right)$

$$\blacksquare 1.25 \times 88 \frac{6}{15} \times 8 + 8 \times \frac{1}{3} \times 1 \frac{1}{4} - 125\% \times 78 \frac{2}{3} \times 8 + \frac{2}{5} \times 3 \frac{1}{3}$$

$$\blacksquare 11 \left(1 + \frac{7}{33}\right) + \left(1 + \frac{7}{33} \times 2\right) + \left(1 + \frac{7}{33} \times 3\right) + \cdots + \left(1 + \frac{7}{33} \times 10\right) \\ + \left(1 + \frac{7}{33} \times 11\right)$$

$$\blacksquare 71 \frac{1}{6} \times \frac{6}{7} + 61 \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} + 51 \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + 41 \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + 31 \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$

$$\blacksquare 13 \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1995} + \frac{2}{1995} \\ + \cdots + \frac{1995}{1995} + \frac{1994}{1995} + \cdots + \frac{2}{1995} + \frac{1}{1995}$$

$$\blacksquare \left[\frac{1}{3} + \frac{5}{12} \times 2 + \left(1 \frac{1}{12} - \frac{5}{8}\right) \times 8 + 1 \frac{1}{4} \div 7 \frac{1}{2} \right] \div \left[3 \frac{4}{5} \div \left(3 - 2.4 \times \frac{14}{15}\right) \times 2.5 \right]$$

$$\blacksquare 15 \frac{2000}{2000^2 - 1999 \times 2001} + 2$$

测 试 题

计算下列各题(1~15):

$$\blacksquare 1 42 \div \left[\left(\frac{2}{3} + 0.4 \right) \times 60 \div \left(3 \frac{5}{42} - 2 \frac{5}{14} \right) \right]$$

$$\blacksquare \left[5 - 3 \frac{7}{8} \div \left(1 \frac{5}{6} + 2 \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \right) \right] \div \frac{1}{8}$$

$$\blacksquare 3 \left(9 - \frac{16}{39} \times 4 \right) + \left(8 - \frac{16}{39} \times 5 \right) + \cdots + \left(4 - \frac{16}{39} \times 9 \right)$$

$$\blacksquare 0.1 \div 0.001 - \left(39 \frac{7}{12} \times 3 \frac{3}{5} \div 39 \frac{7}{12} + 3.6 \times 5 \frac{5}{8} + 0.36 \times 33.75 \right)$$

$$\blacksquare 5 \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{1}{50} + \frac{2}{50} + \cdots \frac{49}{50}$$

$$\bullet 2 \times \left(1 - \frac{1}{1995^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{1994^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{1993^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)$$

$$\bullet 7 \quad 1949 \times \left(\frac{1}{47} - \frac{1}{1996}\right) + 47 \times \left(\frac{1}{1949} - \frac{1}{1996}\right) - 1996 \times \left(\frac{1}{1949} + \frac{1}{47}\right) + 1003$$

$$\bullet \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right) \times \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right)$$

$$\bullet 9 \quad \left(96 \div 4 - 4 \frac{1}{18} \times 5\right) \times \left[\left(3 \frac{7}{8} - 3.875\right) \times 49.5 \div 0.8 \div \frac{4}{5}\right]$$

$$\bullet 0.\dot{1}\dot{2} + 0.\dot{2}\dot{3} + 0.\dot{3}\dot{4} + 0.\dot{4}\dot{5} + 0.\dot{5}\dot{6} + 0.\dot{6}\dot{7} + 0.\dot{7}\dot{8} + 0.\dot{8}\dot{9}$$

$$\bullet 11 \quad 1 \div (2 \div 3) \div (3 \div 4) \div (4 \div 5) \div (5 \div 6) \div (6 \div 7) \div (7 \div 8) \div (8 \div 9)$$

$$\bullet 6 \div \left\{1 - \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} - \left[1 - \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3}\right] \times \frac{1}{4}\right\}$$

$$\bullet 13 \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{100}}$$

$$\bullet \frac{7^2+1}{7^2-1} + \frac{9^2+1}{9^2-1} + \frac{11^2+1}{11^2-1} + \cdots + \frac{99^2+1}{99^2-1}$$

$$\bullet 15 \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{60}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{2}{60}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} + \cdots + \frac{3}{60}\right) + \cdots + \left(\frac{58}{59} + \frac{58}{60}\right) + \frac{59}{60}$$

第2讲

分数的大小比较



一、知识要点和基本方法

比较两个分数的大小,数学课本中介绍了两种基本方法.第一种是如果两个分数的分母相同,分子大的分数较大;第二种是如果两个分数的分子相同,分母小的分数较大.如果分子、分母都不相同,那么或者统一分母,或者统一分子,再进行比较.有时就需要另辟蹊径,例如相减比较,如果差大于零,减数就小;相除比较,若商是真分数,则被除数小于除数,若商是假分数,则被除数大于除数;交叉相乘比较,分数 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$,如果 $ad > cb$,那么 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$;倒数比较,倒数大的分数小于倒数小的分数;化为小数或循环小数比较等等.

在解题中必须认真分析,要学会多角度、多侧面思考问题,灵活运用解题方法,不断开拓解题思路,提高解题能力.



二、例题精讲

例1 分数 $\frac{5}{7}$ 、 $\frac{15}{17}$ 、 $\frac{4}{9}$ 、 $\frac{40}{124}$ 、 $\frac{103}{309}$ 中,哪一个最大?

分析 先把 $\frac{40}{124}$ 和 $\frac{103}{309}$ 化简, $\frac{40}{124} = \frac{10}{31}$, $\frac{103}{309} = \frac{1}{3}$.

这五个分数的分子和分母都不相同.如果统一分母,显然计算量大.统一分子,可以看出分子的最小公倍数是 $[5, 15, 4, 10, 1] = 60$.统一分子后各分数分别为:

$$\frac{5}{7} = \frac{60}{84}, \frac{15}{17} = \frac{60}{68}, \frac{4}{9} = \frac{60}{135}, \frac{10}{31} = \frac{60}{186}, \frac{1}{3} = \frac{60}{180}$$