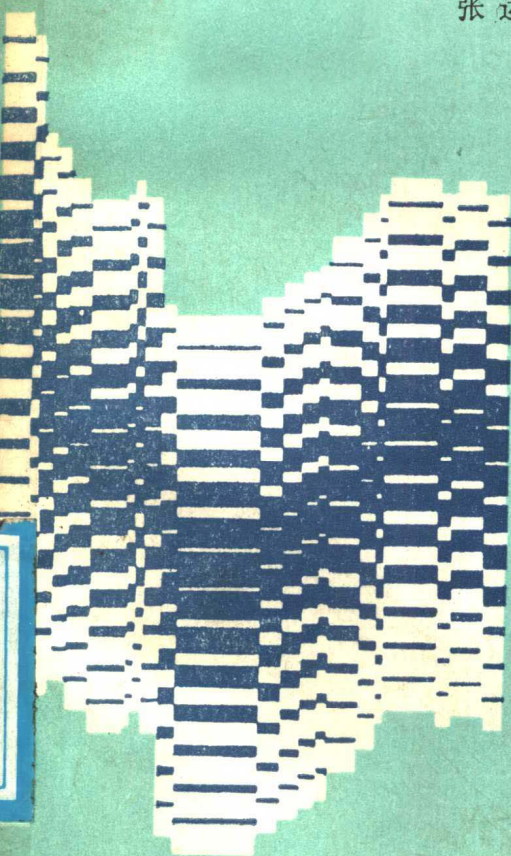


日本新高中数学研究丛书

向量与矩阵

[日] 早川康弋 著

张运钧 译



文化教育出版社

日本新高中数学研究丛书7

向量与矩阵

[日]早川康弋著

张运钩 译

文化教育出版社

内 容 提 要

这套丛书,译自日本旺文社出版的《高中数学研究丛书》,原书共分十五册,书中除有中学数学传统题材外,还包括一些较新的内容。

本册是第七册,主要内容有向量、向量的运算、向量的分量、向量的应用,空间向量、空间向量的运算、空间向量的分量,向量的内积及其应用,向量的应用,向量空间,矩阵、矩阵的运算,矩阵的乘法及其性质,逆矩阵,一次方程组与矩阵,线性变换与矩阵,矩阵的应用。叙述比中学数学教材广泛、深入、易懂,可供中学数学教研员、中学数学教师、中学学生在研究、教学或自学中参考。

日本新高中数学研究丛书7

向量与矩阵

[日]早川康夫著

张运钧 译

文化教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

北京市顺义永利印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 9.5 字数 195,000

1989年10月第1版 1989年6月第1次印刷

印数 1-1,800

ISBN7-5018-0003-0

G·4 定价3.20元

译者的话

这套丛书,译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书,原书共分十五册,我们译出了其中的第二册至第十五册,本册是第七册。丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容。

这套丛书的特点是比较教材内容广泛、深入、易懂。对基础知识作了系统整理,归纳概括,重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究。可供我国中学数学教师和高中学生研究参考。

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳教育学院数学系等单位合译的,最后由我院教研部数学教研室负责审校工作。本册由沈阳市教育学院张运钧同志译出,由钱永耀、刘占元同志审校。

由于时间仓促以及译者和校者水平所限,缺点错误恐难避免。希望读者提出宝贵意见。

辽宁教育学院

1981年3月

前 言

在高中的数学中，除了内积以外的二维向量是在数学 I 中，内积和三维向量是在数学 IIB 中学习的。另外，矩阵和它的群也编入数学 IIB 中。

这样，向量就在两个学年中学习。可是，作为数学的内容，它是一个整体，为此，本书作了统一的处理。即将：

数学 I 中有关“向量”的内容编入本书 1. ~5. 节论述；

数学 IIB 中有关“向量和矩阵”的内容编入本书 6. ~26. 节论述。

本书在统一处理上述内容中，是以

更加广泛，更加深入，更加易懂

为宗旨。力求使苦于学习数学的人，爱好数学；使爱好数学的人，更加爱好为目标而写成的。为了上述后一个目标，有的地方多少超过了高中程度的内容。

为了很好地理解向量和矩阵，应明确对图形的理解与对计算的理解的联系和统一。为此，在说明同一个事实时，有时一并使用计算的方法和图形的方法。希望读者努力掌握这两种思考方法的联系。

本书为了能达到系统的理解和培养应用的能力，采取了

解说→例题→发展题→练习

的反复学习方式，所以从培养基本能力来看，作为准备高考的

参考书也是最合适的。

最后，在本书出版之际，谨向始终予以协助的木村邦五郎先生致以深厚的谢意。

著 者

1973年6月

几点说明

如前言所述，本书是一本独具风格的参考书，使苦于学习数学的人容易理解，使擅长数学的人更加爱好。为此，本书的结构安排如下：

主张划分细目

本书各部分尽量划分细目，凡披阅所及均能一目了然；同时，在解说时，既能配合教科书，又写得

比较广泛，比较深入，比较易懂。

在解说后的提要中，归纳出重要公式。因此，希望在理解解说的同时，必须记住这些公式。另外，用竖线把版面分成两部分，在左边列记重要项目，以便提高学习效率。

例题→发展题→练习

本书最大优点是，力求在理解解说的基础上，反复学习例题、发展题、练习题，能在潜移默化中增强解决问题的实际能力。虽然由例题到发展题依次提高了难度，但在提示和要点中，指出了思考方法和解题要领，因此，希望读者反复学习，对这两种题目达到几乎能够背诵的程度。总之，学习数学最重要的是要用

逐步积累的学习方法

为此，也要建议读者反复进行学习。如果对于前面的两种题都能掌握，解练习题时就不会感到什么困难；反之，如果不大，

会解练习题,那么就认为学习得还不够深刻.

习题

分为 A、B 两部分. A 的程度相当于例题和发展题; B 中还包含稍难的题目. 因为在高考中, 这种程度的题目出的最多, 所以, 对准备参加高考的读者, 这是不能缺少的题目.

虽然常说, 学数学背下来也没有用, 但那是指死记硬背.

本书并不提倡单纯的机械记忆. 所谓数学就是恰当地指导人们要“这样进行思考”, 并在实际运用方面增强广泛的记忆. 我们深信, 得到本书的读者, 能够真正理解数学, 从而获得广泛应用数学的实际本领.

目 录

前言	1
几点说明	3
1. 向量的意义与相等	1
纯量, 位移, 向量, 相等的定义, 等式的基本性质, 有向线段集合的种类, 逆向量, 零向量.	
2. 向量的加法与减法	9
向量的加法, 向量集合的元素, 逆向量与零向量的和, 加法的基本定律, 向量的减法.	
3. 向量的实数倍	17
向量的自然数倍, 实数倍的定义, 向量的平行, 单位向量, 运算律, 位置向量, 定比分点的位置向量.	
4. 向量的分量	25
向量的分量, 基本向量. 以基本向量表示分量, 向量的大小, 向量的和与差的分量, 向量实数倍的分量, 定比分点的坐标, 分量与大小、方向的关系, 在有向直线上的正射影.	
5. 向量的应用(其一)	33
习题(1-15)	44
6. 空间的向量与空间的性质	47
空间的向量, 单位向量, 空间的意义, 基本性质, 二直线的平行, 直线与平面平行, 决定平面的条件, 向量的相等, 等式的性质.	

7. 空间向量的运算	56
向量的加法, 向量的减法, 向量的实数倍, 平面上向量间的关系, 加法的结合律, 平行条件.	
8. 空间的点的坐标	64
平面的垂线, 垂线的存在, 二直线所成的角, 三垂线定理, 空间的坐标, 向量的分量表示, 向量的大小, 两点间距离公式.	
9. 空间向量的分量	73
空间向量的分量, 基本向量, 分量表示, 向量的大小, 方向余弦, 依据分量的计算公式, 分点的坐标.	
10. 向量的线性无关性	79
线性无关性, 平面上的情形, 三个向量的线性相关性, 基本向量, 平行坐标系, 空间的情形.	
11. 向量的内积	90
向量间所成的角, 内积, 内积的基本性质, 基本向量的性质, 向量的运算和数的运算.	
12. 向量的分量与内积	98
平面的情况, 用分量表示的内积公式, 向量间所成的角, 垂直条件, 平行条件, 空间的情形.	
13. 内积的应用	110
14. 向量的应用(其二)	116
15. 向量空间	131
习题(16—30)	140
16. 矩阵的意义与相等	142
矩阵的定义, $m \times n$ 矩阵的表示, 方阵, 矩阵的相等, 矩阵相等的基本性质.	
17. 矩阵的加法与减法	148
矩阵的加法, 和的公式, 矩阵的减法, 差的公式, 零矩阵.	

18. 矩阵的实数倍	155
矩阵实数倍的定义, 实数倍的公式, 行向量, 列向量.	
19. 矩阵的乘法	164
20. 关于矩阵乘法的性质	171
结合律, 分配律, 矩阵的幂, 单位矩阵 E , E 的性质, O 的性质, 交换律不成立的例, 零因子, E 及 O 的幂.	
21. 逆矩阵	184
正则矩阵, 逆矩阵, 逆矩阵的形状.	
习题 (31—42)	190
22. 线性方程组与矩阵	192
用逆矩阵的解法, 行列式, 用行列式的解法, 依据矩阵变形的解法, 用简记法求逆矩阵.	
23. 线性变换与矩阵	203
齐次一次函数的性质, 点的变换, 向量的变换, 线性变换, 线性变换的矩阵表示, 线性变换的和与差, 线性变换的合成矩阵, 线性变换的逆变换.	
24. 平面上的运动(点的变换)	213
平行移动, 旋转, 复合旋转, 三角函数的加法定理, 对称移动, 关于过原点的直线的对称移动.	
25. 矩阵的应用	222
26. 群与矩阵	235
习题 (43—55)	244
练习题答案	246
习题答案	259

1. 向量的意义与相等

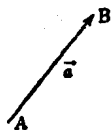
纯 量

线段的长度,平面图形的面积,立体的体积,物体的质量,温度,时间等,都可以用某一个量为单位进行度量,并用得到的一个数值来表示,这样的量叫做纯量(或标量).

位 移

但是,为了表示出力和速度、加速度或在平面上的点从 A 移到 B 的位置变化(这通常叫做位移),就必须同时研究它们的大小和方向. 例如,这里举出的位移,是

用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示的,长度表示位移的大小,方向就是表示位移的方向.



向 量

在平面上具有大小和方向的量叫做向量. 用图形来表示向量时,如同位移,用带有箭头的有向线段表示.

用从点 A 到点 B 的有向线段表示向量时, A 叫做始点, B 叫做终点,把这个向量记作 $\overrightarrow{AB}$.

用一个字母表示向量时,可用 $\vec{a}$, a 等表示. 并且用 $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ 表示 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$ 的大小.

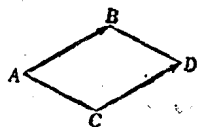
相等的定义

这时, $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$ 就是线段 AB 的长.

大小相等, 方向相同的两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 叫做相等. 记作 $\vec{a} = \vec{b}$.

如果, 有向线段 AB, CD 由平行移动包括方向在内能完全重合, 则称 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 相等.

把 $\vec{a}, \vec{b}$ 用有向线段 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 来表示, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$ 就表示 $AB \parallel CD$ 且 $AB = CD$ (包括方向). 所以当 AB, CD 不在同一直线上时, 四边形 $ABDC$ 是平行四边形, 当 AB, CD 在同一直线上时, 就象右下图那样, 是把平行四边形挤扁到成为一条直线的情形. 将平行的意义推广, 使 AB, CD 在一条



直线上的情形也包含在平行中, 这时, 上述的情况也就包含在内了.

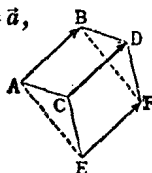
等式的基本性质

由于 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$, 因而有 $\vec{a} = \vec{a}$ ①

又若 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 时, 则有 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$,

因而如 $\vec{a} = \vec{b}$ 时, 则有 $\vec{b} = \vec{a}$, ②

这是显然的, 而且下述关系也成立.



如 $\vec{a} = \vec{b}, \vec{b} = \vec{c}$, 则 $\vec{a} = \vec{c}$

上述关系, 可以证明如下:

现在, 取 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{CD}, \vec{c} = \overrightarrow{EF}$. 这时,

有向线段集合的
种类

因 $AB \parallel CD, AB = CD,$

$$CD \parallel EF, CD = EF,$$

(重合的情况也包含在平行里)

$$\text{则 } AB \parallel EF, AB = EF,$$

从而 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$, 所以 $\vec{a} = \vec{c}$

其次, 用有向线段的集合和它们的关系说明向量相等的意义如下:

考虑平面上的有向线段的集合 (始点任意), 其中, 取 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, 即设等于 $\overrightarrow{OA}$ 的向量集合为 A , $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, 即设等于 $\overrightarrow{OB}$ 的向量集合为 B .

如取 A 中的任意二元素 $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, 由于 $\vec{a}_1 = \vec{a}, \vec{a}_2 = \vec{a}$, 则 $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$.

对 B 也同样. 且取 A, B 中任意二元素 $\vec{a}_1, \vec{b}_1$, 如有 $\vec{a}_1 = \vec{b}_1$ 则由 $\vec{a}_1 = \vec{a}, \vec{b}_1 = \vec{b}$, 可得 $\vec{a} = \vec{b}$. 由此得

$$A = B$$

再如 $\vec{a}_1 \neq \vec{b}_1$, 则 $A \cap B = \emptyset$ (空集)
即 A, B 无公共元素 (假若 $A \cap B \neq \emptyset$, 即有公共元素 $\vec{c}$, 则有 $\vec{a} = \vec{c} = \vec{b}$ 与所设矛盾).

这就是用平面上的有向线段来表示向量 (始点任意), 并把有向线段的全体集合, 如上所述, 分类为相互无公共元素的集合 $A, B, \dots$ 等时, 把属于同一集合的向量看作是相

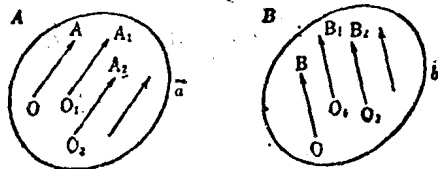
等的,这就是向量相等的意义.

为此可以举我们已学过的例子如下:

设有理数全体的集合为

$$U = \{(m, n) \mid m, n \text{ 为整数, 且 } n \neq 0\}, \text{ 这时, 它的子集合}$$

$A = \{(m, n) \mid am = bn, a, b \text{ 为确定的整数, } m, n \text{ 为整数, 且 } an \neq 0\}$ 的元素都相等, 可表示为 $\frac{b}{a}$.



例如, $B = \{(m, n) \mid 2m = n \neq 0, m, n \text{ 为整数}\} =$

$\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \dots\right\}$, 它的元素都相等, 可表示

为 $\frac{1}{2}$.

又如, 把整数全体的集合 U , 分为奇数的集合 A 和偶数的集合 B 二类也是其例之一.

这样, 对某个集合中的元素, 把具有相同性质的元素归纳为一个集合, 象这样把一个集合分类为若干个集合的思考方法是数学常用的方法.

与向量 $\vec{a}$ 大小相等, 但方向相反的向量, 叫做向量 $\vec{a}$ 的逆向量, 记作 $-\vec{a}$, 即 $\vec{BA} =$

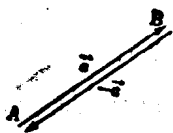
零向量

$-\overrightarrow{AB}$

在 $\overrightarrow{AB}$ 中当 B 与 A 重合时, 即可考虑为

$\overrightarrow{AA}$, 这时, 它的大小为 0, 而方向不明. 这类大小为 0 的向量是一种特殊的向量, 叫做零向量, 记作 $\vec{0}$ 或 0. 也就是 $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

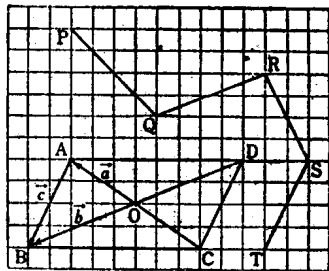
零向量可用一个点表示, 大小为零, 方向任意.



提 要

- (1) 向量 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (大小为 $|\overrightarrow{AB}|$, 方向为由 A 到 B 的方向).
- (2) 相等 $\vec{a} = \vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b}$ 的方向相同, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$).
- (3) 逆向量 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ 时, 则 $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$.
- (4) 零向量 $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ (大小为零, 方向任意).

例题 1. 在右边的方格纸上画有平行四边形 $ABCD$ 与折线 $PQRST$. 设 AC 与 BD 的交点为 O , $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, 在对这个图上线段注明适当的方向的向量中, 求出与 $\vec{a}$ 相等的向量, 与 $\vec{b}$ 相等的向量和与 $\vec{c}$ 相等的向量.



提示 求与 $\vec{a}$ 相等的向量时, 首先选与 $\vec{a}$ 平行的(也包含与 $\vec{a}$ 重合的), 然后在其中求出与 $|\vec{a}|$ 具有相同长度的. 同理可求与 $\vec{b}$ 相等及与 $\vec{c}$ 相等的向量.

并且运用平行四边形的对角线互相平分的性质.

解 与 $\vec{a}$ 相等的, 有 $\vec{OA}$ 及 $\vec{CO}$; 与 $\vec{b}$ 相等的, 有 $\vec{OB}$, $\vec{DO}$ 及 $\vec{RQ}$; 与 $\vec{c}$ 相等的, 有 $\vec{AB}$, $\vec{DC}$ 及 $\vec{ST}$.

例题 2. (1) 求证 $|\vec{a}| = |\vec{a}|$.

(2) 试证: 如 $\vec{a} = -\vec{b}$, 则 $\vec{b} = -\vec{a}$.

(3) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = K$ 是使 $\vec{a} = \vec{b}$ 的充要条件, 求 K 应满足的条件.

提示 (1), (2) 可用逆向量的定义.

(3) 条件 A 为条件 B 的充要条件时, 则下列二命题皆真:

(i) 如 A 成立, 则 B 成立. (ii) 如 B 成立则 A 成立.

在本题中, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 应分成 $\neq 0$ 及 $= 0$ 两种情况来研究.

解 (1) $-\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的大小是相等的, $\therefore |\vec{a}| = |\vec{a}|$.

(2) 设 $\vec{a} = \vec{AB}$, 则 $-\vec{a} = \vec{BA}$, 又 $-\vec{b} = \vec{a} = \vec{AB}$, 从而 $\vec{b} = \vec{BA} = -\vec{a}$.

(3) $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$ 时, 因为存在着大小相等而方向不同的向量, 所以, 不一定 $\vec{a} = \vec{b}$.

仅在 $k=0$ 时, $\vec{a} = \vec{b} = 0 \iff |\vec{a}| = |\vec{b}| = k$

发展题

设有 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$, 满足下列条件;