日本新高中数学研究丛书

向量与矩阵

[日] 早川康弌 著

张运钧 译

文化教育出版社

日本新高中数学研究丛书7

向量与矩阵

[日]早川康弌著
张运钧 译

文化教育出版社

内容提要

这套丛书，译自日本旺文社出版的《高中数学研究丛书》，原书共分十五册，书中除有中学数学传统题材外，还包括一些较新的内容.

本册是第七册，主要内容有向量、向量的运算、向量的分量、向量的应用，空间向量、空间向量的运算、空间向量的分量，向量的内积及其应用，向量的应用，向量空间，矩阵、矩阵的运算，矩阵的乘法及其性质，逆矩阵，一次方程组与矩阵，线性变换与矩阵，矩阵的应用. 叙述比中学数学教材广泛、深入、易懂，可供中学数学教研员、中学数学教师、中学学生在研究、教学或自学中参考.

日本新高中数学研究丛书7

向量与矩阵

[日]早川康弌著

张运钧 译

文化教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

北京市顺义永利印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 9.5 字数 195,000

1989年6月第1版 1989年6月第1次印刷

印数 1—1,600

ISBN7-5018-0003-0

G·4 定价3.20元

译者的话

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，我们译出了其中的第二册至第十五册，本册是第七册．丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容．

这套丛书的特点是比教材内容广泛、深入、易懂．对基础知识作了系统整理，归纳概括，重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究．可供我国中学数学教师和高中学生研究参考．

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳教育学院数学系等单位合译的，最后由我院教研部数学教研室负责审校工作．本册由沈阳市教育学院张运钧同志译出，由钱永耀、刘占元同志审校．

由于时间仓促以及译者和校者水平所限，缺点错误恐难避免．希望读者提出宝贵意见．

辽宁教育学院

1981年3月

前　　言

在高中的数学中，除了内积以外的二维向量是在数学Ⅰ中，内积和三维向量是在数学ⅡB中学习的．另外，矩阵和它的群也编入数学ⅡB中．

这样，向量就在两个学年中学习．可是，作为数学的内容，它是一个整体，为此，本书作了统一的处理．即将：

数学Ⅰ中有关"向量"的内容编入本书1.～5.节论述；

数学ⅡB中有关"向量和矩阵"的内容编入本书6.～26.节论述．

本书在统一处理上述内容中，是以

更加广泛，更加深入，更加易懂

为宗旨．力求使苦于学习数学的人，爱好数学；使爱好数学的人，更加爱好为目标而写成的．为了上述后一个目标，有的地方多少超过了高中程度的内容．

为了很好地理解向量和矩阵，应明确对图形的理解与对计算的理解的联系和统一．为此，在说明同一个事实时，有时一并使用计算的方法和图形的方法．希望读者努力掌握这两种思考方法的联系．

本书为了能达到系统的理解和培养应用的能力，采取了

解说──→例题──→发展题──→练习

的反复学习方式，所以从培养基本能力来看，作为准备高考的

参考书也是最合适的.

最后，在本书出版之际，谨向始终予以协助的木村邦五郎先生致以深厚的谢意.

著　者

1973年6月

几 点 说 明

如前言所述，本书是一本独具风格的参考书．使苦于学习数学的人容易理解，使擅长数学的人更加爱好．为此，本书的结构安排如下：

主张划分细目

本书各部分尽量划分细目，凡披阅所及均能一目了然；同时，在解说时，既能配合教科书，又写得

比较广泛，比较深入，比较易懂．

在解说后的提要中，归纳出重要公式．因此，希望在理解解说的同时，必须记住这些公式．另外，用竖线把版面分成两部分，在左边列记重要项目，以便提高学习效率．

例题——→发展题——→练习

本书最大优点是，力求在理解解说的基础上，反复学习例题、发展题、练习题，能在潜移默化中增强解决问题的实际能力．虽然由例题到发展题依次提高了难度，但在提示和要点中，指出了思考方法和解题要领，因此，希望读者反复学习，对这两种题目达到几乎能够背诵的程度．总之，学习数学最重要的是要用

逐步积累的学习方法

为此，也要建议读者反复进行学习．如果对于前面的两种题都能掌握，解练习题时就不会感到什么困难；反之，如果不大

会解练习题，那么就应该认为学习得还不够深刻.

习题

分为 A、B 两部分. A的程度相当于例题和发展题；B 中还包含稍难的题目. 因为在高考中，这种程度的题目出的最多，所以，对准备参加高考的读者，这是不能缺少的题目.

虽然常说，学数学背下来也没有用，但那是指死记硬背.

本书并不提倡单纯的机械记忆. 所谓数学就是恰当地指导人们要"这样进行思考"，并在实际运用方面增强广泛的记忆. 我们深信，得到本书的读者，能够真正理解数学，从而获得广泛应用数学的实际本领.

目　录

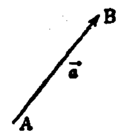
1. 向量的意义与相等

纯　　量

线段的长度，平面图形的面积，立体的体积，物体的质量，温度，时间等，都可以用某一个量为单位进行度量，并用得到的一个数值来表示，这样的量叫做纯量（或标量）.

位　　移

但是，为了表示出力和速度、加速度或在平面上的点从A移到B的位置变化（这通常叫做位移），就必须同时研究它们的大小和方向. 例如，这里举出的位移，是用有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示的，长度表示位移的大小，方向就是表示位移的方向.



向　　量

在平面上**具有大小和方向的量叫做向量**. 用图形来表示向量时，如同位移，用带有箭头的**有向线段**表示.

用从点A到点B的有向线段表示向量时，A叫做**始点**，B叫做**终点**，把这个向量记作$\overrightarrow{AB}$.

用一个字母表示向量时，可用$\vec{a}$，$\boldsymbol{a}$等表示. 并且用$|\overrightarrow{AB}|$，$|\vec{a}|$表示$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$的**大小**.

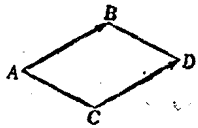
这时，$|\overrightarrow{AB}|=\overrightarrow{AB}$ 就是线段 AB 的长.

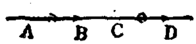
相等的定义

大小相等，方向相同的两个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 叫做相等. 记作 $\vec{a}=\vec{b}$.

如果，有向线段 AB，CD 由平行移动包括方向在内能完全重合，则称 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 相等.

把 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 用有向线段 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$，来表示，那么 $\vec{a}=\vec{b}$ 就表示 $AB \parallel CD$ 且 $AB=CD$（包括方向）. 所以当 AB，CD 不在同一直线上时，四边形 $ABDC$ 是平行四边形，当 AB，CD 在同一直线上时，就象右下图那样，是把平行四边形挤扁到成为一条直线的情形. 将平行的意义推广，使 AB，CD 在一条直线上的情形也包含在平行中，这时，上述的情况也就包含在内了.





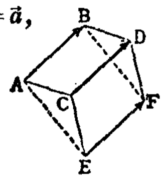
等式的基本性质

由于 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$，因而有 $\vec{a}=\vec{a}$ ①

又若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 时，则有 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$，

因而如 $\vec{a}=\vec{b}$ 时，则有 $\vec{b}=\vec{a}$， ②

这是显然的，而且下述关系也成立.



如 $\vec{a}=\vec{b}$，$\vec{b}=\vec{c}$，则 $\vec{a}=\vec{c}$ ③

上述关系，可以证明如下：

现在，取 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CD}$，$\vec{c}=\overrightarrow{EF}$. 这时，

因 $AB \parallel CD, AB=CD,$

$$CD \parallel EF, CD=EF,$$

(重合的情况也包含在平行里)

则 $\quad AB \parallel EF, AB=EF,$

从而 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$, 所以 $\vec{a}=\vec{c}$

有向线段集合的种类

其次，用有向线段的集合和它们的关系说明向量相等的意义如下:

考虑平面上的有向线段的集合（始点任意），其中，取 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, 即设等于 $\overrightarrow{OA}$ 的向量集合为 A, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, 即设等于 $\overrightarrow{OB}$ 的向量集合为 B.

如取 A 中的任意二元素 $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, 由于 $\vec{a}_1=\vec{a}, \vec{a}_2=\vec{a}$, 则 $\vec{a}_1=\vec{a}_2$.

对 B 也同样. 且取 A, B 中任意二元素 $\vec{a}_1, \vec{b}_1$, 如有 $\vec{a}_1=\vec{b}_1$ 则由 $\vec{a}_1=\vec{a}$, $\vec{b}_1=\vec{b}$, 可得 $\vec{a}=\vec{b}$. 由此得

$$A=B$$

再如 $\vec{a}_1 \neq \vec{b}_1$, 则 $A \cap B=\varnothing$(空集)

即 A, B 无公共元素(假若 $A \cap B \neq \varnothing$, 即有公共元素 $\vec{c}$, 则有 $\vec{a}=\vec{c}=\vec{b}$ 与所设矛盾).

这就是用平面上的有向线段来表示向量(始点任意)，并把有向线段的全体集合，如上所述，分类为相互无公共元素的集合 A, B, …等时，把属于同一集合的向量看作是相

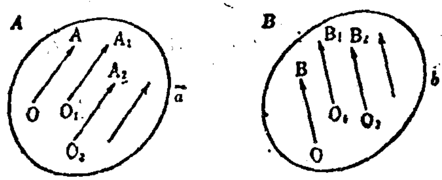
等的，这就是向量相等的意义.

为此可以举我们已学过的例子如下：

设有理数全体的集合为

$U=\{(m,n)|m,n$ 为整数，且 $n\neq0\}$，这时，它的子集合

$A=\{(m,n)|am=bn,a,b$为确定的整数，m,n为整数，且 $an\neq0\}$的元素都相等，可表示为$\frac{b}{a}$.



例如，$B=\{(m,n)|2m=n\neq0,m,n$为整数$\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{-1}{-2},\frac{2}{4},\cdots\cdots\right\}$，它的元素都相等，可表示为$\frac{1}{2}$.

又如，把整数全体的集合 U，分为奇数的集合 A和偶数的集合 B 二类也是其例之一.

这样，对某个集合中的元素，把具有相同性质的元素归纳为一个集合，象这样把一个集合分类为若干个集合的思考方法是数学常用的方法.

逆向量

与向量 $\vec{a}$ 大小相等，但方向相反的向量，叫做向量 $\vec{a}$ 的**逆向量**，记作$-\vec{a}$，即 $\overrightarrow{BA}=$

$-\overrightarrow{AB}$

零向量

在 $\overrightarrow{AB}$ 中当 B 与 A 重合时，即可考虑为 $\overrightarrow{AA}$，这时，它的大小为 0，而方向不明．这类大小为 0 的向量是一种特殊的向量，叫做零向量，记作 $\vec{0}$ 或 0．也就是 $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$．

零向量可用一个点表示，大小为零，方向任意．

提　要

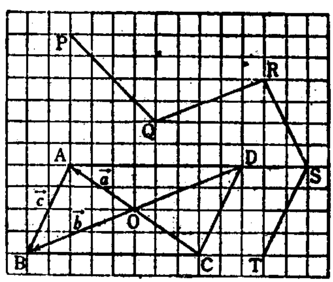
(1) 向量 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$（大小为 $|\overrightarrow{AB}|$，方向为由 A 到 B 的方向）．

(2) 相等 $\vec{a}=\vec{b}$（$\vec{a}$，$\vec{b}$ 的方向相同，$|\vec{a}|=|\vec{b}|$）．

(3) 逆向量 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ 时，则 $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$．

(4) 零向量 $\vec{0}=\overrightarrow{AA}$（大小为零，方向任意）．

例题 1． 在右边的方格纸上画有平行四边形 $ABCD$ 与折线 $PQRST$．设 AC 与 BD 的交点为 O，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，在对这个图上线段注明适当的方向的向量中，求出与 $\vec{a}$ 相等的向量，与 $\vec{B}$ 相等的向量和与 $\vec{c}$ 相等的向量．



提示 求与 $\vec{a}$ 相等的向量时，首先选与 $\vec{a}$ 平行的(也包含与 $\vec{a}$ 重合的)，然后在其中求出与 $|\vec{a}|$ 具有相同长度的．同理可求与 $\vec{b}$ 相等及与 $\vec{c}$ 相等的向量．

并且运用平行四边形的对角线互相平分的性质．

解 与 $\vec{a}$ 相等的，有 $\overrightarrow{OA}$ 及 $\overrightarrow{CO}$；与 $\vec{b}$ 相等的，有 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{DO}$ 及 $\overrightarrow{RQ}$；与 $\vec{c}$ 相等的，有 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$ 及 $\overrightarrow{ST}$．

例题 2. (1) 求证 $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$．

(2) 试证：如 $\vec{a}=-\vec{b}$，则 $\vec{b}=-\vec{a}$．

(3) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=K$ 是使 $\vec{a}=\vec{b}$ 的充要条件，求 K 应满足的条件．

提示 (1)，(2)可用逆向量的定义．

(3) 条件 A 为条件 B 的充要条件时，则下列二命题皆真：

(i) 如 A 成立，则 B 成立．(ii) 如 B 成立则 A 成立．

在本题中，$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ 应分成 $\neq 0$ 及 $=0$ 两种情况来研究．

解 (1) $-\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的大小是相等的，$\therefore\ |-\vec{a}|=|\vec{a}|$．

(2) 设 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，则 $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$，又 $-\vec{b}=\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，从而 $\vec{b}=\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$．

(3) $|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq 0$ 时，因为存在着大小相等而方向不同的向量，所以，不一定 $\vec{a}=\vec{b}$．

仅在 $k=0$ 时，$\vec{a}=\vec{b}=0 \Longleftrightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}|=k$

发展题

设有 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$，满足下列条件；