全国高等教育精选系列辅导教材

Xianxing Daishu Yu Gailü Tongji

线性代数与概率统计

学习指导与基本训练

路永洁 宋岱才 李阳 主编

中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

线性代数与概率统计
学习指导与基本训练

路永洁　宋岱才　李　阳　主编

中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与概率统计学习指导与基本训练/路永洁、宋岱才、李阳主编. -北京：中国经济出版社，2005. 10

ISBN 7-5017-1273-5

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①路… ②宋… ③李… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 118315 号

出版发行：中国经济出版社（100037·北京市西城区百万庄北街 3 号）
网　　址：www.economyph.com
责任编辑：张淑玲（电话：010-88380089）
E—mail：zsl8838@sina.com
责任印制：石星岳
封面设计：中子画艺术设计
经　　销：各地新华书店
承　　印：北京人民文学印刷厂
开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印　张：17　　字　数：391 千字
版　　次：2005 年 10 月第 1 版　　印　次：2006 年 1 月第 2 次印刷
书　　号：ISBN 7-5017-1273-5/F·813　　定　价：19.00 元

　举报电话：68359418　68319282
服务热线：68344225　68369586　68346406　68309176

序 Preface

随着普通高校教育规模的不断扩大，受教育者的不同层次的各个群体对数学的学习提出了不同的要求，因此出版一套有针对性的辅助教材是十分必要的。目前的数学教学辅助资料很多，有的是侧重于通用教材的习题全解，这对于培养学生的数学思维能力十分无益。有的是考研培训教材，对大多数初学者学习起来又有一定的难度。

本书所列章节与同济大学《线性代数》和浙江大学《概率论与数理统计》教材同步。每章有知识要点概要，例题精析，重要知识和方法的注解，并配有适当数量的习题。内容紧扣教学大纲和主讲教材，解析最基本的内容和方法，具有浓重的强化基础的特色。

本书的出版与《高等数学学习指导与基本训练》是同步参考书，作者的目的和愿望是：在课堂学习之余通过这本书的学习，能够使学习者完全掌握主讲教材的全部内容，解题能力随之能有一定幅度的提高，为各种形式的考试准备厚重的基础。

数学基础知识和基本方法的训练，是能力训练的主要手段，也是各类不同专业教学的迫切需要。相信在具体的使用过程中应该获得成功，学习者的渴望会得到满足，教育者的愿望会得以实现。

吕　方

2005年6月

前言

Foreword

《线性代数》和《概率论与数理统计》是高等院校的两门重要基础课，也是全国工科硕士研究生入学考试的必考数学内容之一。它是自然科学、社会科学及计算机技术和数学科学本身的重要理论基础和方法。但由于这两门课程内容丰富，应用和考研考试要求面较广，所以很多内容和方法不能在教学时数内完成。这就需要广大同学充分利用自习时间学习及练习。为此我们编写了这本《线性代数与概率统计学习指导与基本训练》一书。

为了使学生能正确理解和掌握这两门课程的内容，本书在形式上除了包括内容提要和一般的计算题与证明题之外，还搜集了大量的填空题、选择题，并增加了释疑解难内容。另外还从1987年到2005年以来全国工学、经济学硕士研究生入学试题中摘录了《线性代数》和《概率论与数理统计》两门课的部分试题。每章还附有练习题及其答案与提示。所以本书不仅可以作为高等学校本科和专科学习《线性代数》和《概率论与数理统计》两门课的补充教材，也可作为参与自学考试及考研学生复习应考的辅导教材。

本书共分三大部分：第一部分，线性代数学习指导。第二部分，概率论与数理统计学习指导。第三部分，《线性代数》课程的部分期末考试题。其中线性代数部分由宋岱才、路永洁编写；概率论与数理统计部分由佟毅、李阳编写。全书由路永洁统编。刘国志、陈明明教授主审。

本书在编写过程中得到我校教务处和理学院广大教师的支持和帮助。在此表示深切的感谢。

由于编者水平有限，难免有不足之处，希望广大师生批评指正。

编　者

2005年6月于辽宁石油化工大学

《线性代数与概率统计学习指导与基本训练》编委会

主　编

路永洁　宋岱才　李　阳

副主编

佟　毅　陈德艳

编　委

路永洁　宋岱才　佟　毅
李　阳　陈德艳　聂　宏
侯景臣　魏晓丽　苗　晨

主　审

刘国志　陈明明

目　录

Contents

第一篇　线性代数

目 录

Contents

第二篇 概率统计

目　录

Contents

目 录

Contents

第一篇　线性代数

第一章　行　列　式

本章主要介绍行列式的定义、性质与计算，由于二、三阶行列式应用最多，务求熟练掌握。n 阶行列式的计算是个难点，这里将举出一些典型例子，介绍其常见的一些计算方法，希望读者仔细体会。

一、内容提要

1．*n 阶行列式的定义*

(1) 排列和逆序

由 n 个数1，2，…，n 组成的一个有序数组（i_1，i_2，i_3，…，i_n）称为一个 n 元排列。所有不同的 n 元排列共有 $n!$ 个。在一个排列（i_1，i_2，i_3，…，i_n）中，如果一个大的数排在小的数前面，就称这两个数构成一个逆序。一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数。通常记为 τ（i_1，i_2，i_3，…，i_n）。若一个排列的逆序数为奇数，则称这个排列为奇排列，否则称为偶排列。

在一个排列（i_1，i_2，i_3，…，i_n）中，如果交换任意两个数的位置，称为对排列作一次对换。

对换改变排列的奇偶性。

(2) n 阶行列式的定义

由 n^2 个数排成 n 行 n 列的数表，记为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$。作出表中所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，就称为此行列式的值。这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是1，2，…，n 的一个排列。当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项的前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项的前面带负号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有不同的 n 元排列求和。

2. 余子式、代数余子式

在行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列，由剩下的元素按原位置排成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}。又 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

3. 行列式的性质

性质 1　行列互换，行列式的值不变。

注意：该性质表明了行列式中行、列地位的对称性。也就是说，行列式中有关行的性质对列也同样成立。

性质 2　对换行列式的两行（列），行列式变号。

推论　如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零。

性质 3　用数 k 乘行列式的某一行（列），等于用数 k 乘以此行列式。

推论　行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号外面。

性质 4　行列式中，如果有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式等于零。

性质 5　若行列式的某一行（列）的元素都是两个数之和，则此行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{in} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{in} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{in} \end{vmatrix}$$

性质 6　把行列式某一行的若干倍加到另一行上去，行列式不变。

4. 行列式按行（列）展开定理

n 阶行列式等于它的任一行（列）的所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和。

推论 1：n 阶行列式中某一行（列）的每个元素与另一行（列）相应元素的代数余子式的乘积之和等于零。

推论 2：在 n 阶行列式中，若有一行（列）除去一个元素 $a_{ij}\neq 0$ 外其余元素均为零，则此行列式的值等于这个非零元素与其代数余子式的乘积。即 $D=a_{ij}A_{ij}$。

以上结论用公式表示为：

设$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,则 $a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases} D & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

或　$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\begin{cases} D & j=k \\ 0 & j\neq k \end{cases} \quad (j=1,2,\cdots,n)。$$

5. 几种特殊行列式的结论

(1) 对角行列式、上（下）三角行列式的值等于主对角线元素之积；

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 两个特殊的展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

(3) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_i^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

(4) 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & \\ \iddots & & \\ a_{n1} & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

6. 行列式的计算方法

(1) 基本方法

1) 直接利用行列式定义或行列式性质算得结果；

2) 用行列式的性质，化行列式成三角形行列式；

3) 按某一行（或列）展开。

(2) 常用方法

1) 递推法；

2) 数学归纳法；

3）利用一些已知结论。

①范德蒙行列式性质；②特殊行列式。

7. 克莱姆法则

（1）如果非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-1}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq0$,则方程组有唯一解 $x_j=\dfrac{D_j}{D},(j=1,2,\cdots,n)$。

其中 D_j 是把系数行列式 D 中的第 j 的元素换为常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所构成的行列式。

（2）如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{1-2}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq0$，则方程组有唯一零解。

推论 1：如果非齐次线性方程组（1－1）的系数行列式 $D=0$，那么它无解或有无穷多解。

推论 2：如果齐次线性方程组（1－2）的系数行列式 $D=0$，那么它有非零解。

二、典型例题

1. 填空题

（1）7 阶行列式中项 $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$ 的符号是__________。

解：法一　将以上的项，按行标排列为自然排列重新排列，排列后为 $a_{16}a_{27}a_{33}a_{44}a_{55}a_{61}a_{72}$，考虑列标排列 6，7，3，4，5，1，2 的逆序数 τ（6734512）$=5+5+2+2+2+0=16$，所以其符号为“+”。

法二　将以上的项，按列标排列为自然排列重新排列，排列后为 $a_{61}a_{72}a_{33}a_{44}a_{55}a_{16}a_{27}$，考虑行标排列 6，7，3，4，5，1，2 的逆序数 τ（6734512）$=5+5+2+2+2+0=16$，所以其符号为“+”。

法三　分别考虑行标排列 3，1，7，2，5，6，4 的逆序数 τ（3172564）$=2+0+4+0+1+1=8$，以及列标排列 3，6，2，7，5，1，4 的逆序数 τ（3627514）$=2+4+$

$1+3+2+0=12$，二者逆序数之和为 $12+8=20$，从而其符号为“+”。

(2) $\tau(2,4,6,\cdots,2n,2n-1,\cdots,3,1)=$______。

解：$\tau(2,4,6,\cdots,2n,2n-1,\cdots,3,1)=1+2+\cdots+n+(n-1)+\cdots+2+1=n^2$。

(3) $D=\begin{vmatrix}103&100&204\\199&200&395\\301&300&600\end{vmatrix}=$______。

解：注意到行列式中第1列的三个数分别与100，200，300较接近，而第3列的三个数分别与200，400，600较接近，所以由行列式的性质知，将第二列的−1倍加到第1列上，将第二列的−2倍加到第3列上，第二列再提取公因数100，则有

$D=\begin{vmatrix}103&100&204\\199&200&395\\301&300&600\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}3&1&4\\-1&2&-5\\1&3&0\end{vmatrix}$，对于最后的行列式，可以将第3行加到第2行上，同时将第3行的−3倍加到第1行上，再按第1列展开，得

$$D=100\begin{vmatrix}0&-8&4\\0&5&-5\\1&3&0\end{vmatrix}=100\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-8&4\\5&-5\end{vmatrix}=100\cdot(40-20)=2000。$$

注意:以后为简单起见,第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)上,记为 $kr_i+r_j(kc_i+c_j)$。

(4) 若 $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\0&0&x&3\\0&0&4&5\end{vmatrix}=0$，则 $x=$______。

解：法一　用 $(-5)r_1+r_2$，然后按第1列展开，得：

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\0&0&x&3\\0&0&4&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&0&x&3\\0&0&4&5\end{vmatrix}=1\cdot(-4)\begin{vmatrix}x&3\\4&5\end{vmatrix}=-4(5x-12)=0,\text{所以},x=\frac{12}{5}。$$

法二　直接用几种特殊行列式的结论中(2)，得到

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\0&0&x&3\\0&0&4&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\5&6\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x&3\\4&5\end{vmatrix}=-4(5x-12)=0，\text{得到答案}，x=\frac{12}{5}。$$

(5) $D=\begin{vmatrix}n&0&0&\cdots&0&0\\0&0&2&\cdots&0&0\\0&0&0&\ddots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&n-1\\0&1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=$______。

解：法一　直接按行列式展开公式及对角行列式的结论得，

$$D=n\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot(-1)^{n-1+1}\cdot\begin{vmatrix}2&\cdots&0\\ \cdots&\ddots&\cdots\\ 0&0&n-1\end{vmatrix}=(-1)^n n!$$

法二　注意到，所有 $n!$ 项中，不等于零的项只有 $a_{11}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n2}$这一项，它为 $(-1)^{\tau(1,3,4,\cdots,n,2)}n!=(-1)^{n-2}n!=(-1)^n n!$

(6) 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix}2x&1&-1\\-x&-x&x\\1&2&x\end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数为__________。

解:x^3 的系数只需考察组成 x^3 的项即可。事实上,只需考察 $2x\begin{vmatrix}-x&-x\\2&x\end{vmatrix}=-2x^3+4x^2$，所以 x^3 的系数为 2。

(7) 设 a，b 为实数，则当 $a=$______，$b=$______时，行列式 $\begin{vmatrix}a&b&0\\-b&a&0\\-1&0&-1\end{vmatrix}=0$。

解：将行列式按第 3 列展开，得：$\begin{vmatrix}a&b&0\\-b&a&0\\-1&0&-1\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}a&b\\-b&a\end{vmatrix}=-(a^2+b^2)$，所以应填 $a=0$，$b=0$。

(8) $\begin{vmatrix}0&0&0&1\\2&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&4&0\end{vmatrix}=$__________。

解：∵所有 $4!=24$ 项中，只有 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$这一项不为零，而其符号为负，

∴原式 $=-24$。

(9) 已知 $\begin{vmatrix}x&3&1\\y&0&1\\z&2&1\end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix}x-3&y-3&z-3\\5&2&4\\1&1&1\end{vmatrix}=$__________。

解：先进行 $3r_3+r_1$，得 $\begin{vmatrix}x-3&y-3&z-3\\5&2&4\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&y&z\\5&2&4\\1&1&1\end{vmatrix}$，再进行 $(-2)r_3+r_2$，得到 $\begin{vmatrix}x&y&z\\5&2&4\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&y&z\\3&0&2\\1&1&1\end{vmatrix}$，这正是已知行列式的转置行列式。再由性质 1 得，

$$\begin{vmatrix}x-3&y-3&z-3\\5&2&4\\1&1&1\end{vmatrix}=1。$$

(10) $D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=$__________。

解：按第1列展开，得：

$$D_n=a\cdot\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}+b\ (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}=a^n+\ (-1)^{n+1}b^n。$$

2. **选择题**

(1) 与三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 等值的行列式为 =__________。

(A) $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$； (B) $\begin{vmatrix} -a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$；

(C) $\begin{vmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12}+a_{13} & a_{13}+a_{11} \\ a_{21}+a_{22} & a_{22}+a_{23} & a_{23}+a_{21} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32}+a_{33} & a_{33}+a_{31} \end{vmatrix}$； (D) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} & a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} & a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a_{33} & a_{31}+a_{32}+a_{33} \end{vmatrix}$。

解：由行列式性质，得知，(B) 的第1、第3列均有公因数 −1，提取后为 $(-1)^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，所以应选 (B)。而 (A) 与原行列式相差一个负号。对于 (C)(D) 按行列式性质展开后可以发现与原行列式不相等。

(2) 下列行列式中，哪一个不等于零__________。

(A) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$； (B) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；

(C) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$； (D) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$。

解：法一　由于四个行列式形状是相同的，对角线上的数是一样的，故可以做一个下列行列式，