高等工程专科教学用书

高等数学

下册

山东工业大学高等数学教研室　编

山东科学技术出版社

高等工程专科教学用书

高等数学

下册

山东工业大学高等数学教研室　编

山东科学技术出版社

鲁新登字05号

高等工程专科教学用书

高 等 数 学

下册

山东工业大学高等数学教研室　编

*

山东科学技术出版社出版

（济南市玉函路　邮编250002）

山东省新华书店发行

山东人民印刷厂印刷

*

850×1168毫米32开本　11.75印张　260千字

1993年9月第1版　1993年9月第1次印刷

印数：1—10000

ISBN 7—5331—1237—7/O·52

定价：6.90元

前　　言

近年来，我国高等工程专科教育有了很大发展，国家教委对高等工程专科教育的培养目标、制定教学计划的原则都作了明确的规定，并对一些主要课程制定了教学基本要求，在新形势下，为适应高等工程专科各专业的教学需要，我们编写了这套高等数学教学用书．

本书是编者在总结多年教学实践经验的基础上，参照国家教委 1991 年颁发的高等工程专科《高等数学课程教学基本要求》进行编写的，根据对高等工程专科基础理论教学"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则，在内容的选取上，除保证必要的系统性外，尽量注意到针对性与应用性，力求贯彻减少课堂教学时数的精神，适应精讲与自学相结合的教学改革要求，处理好传授知识与培养能力的关系，在编写过程中，不过分追求理论证明和推导的严密性，而注意加强对处理工程技术问题意义较大的基本知识和基本方法的教学内容，以利于培养运算和应用能力，在基本理论的叙述上，则力求直观简明，通俗易懂，便于教学，便于阅读．鉴于数值方法在工程技术中应用广泛，本书下册专设"数值计算方法"一章，集中介绍微积分学中各种数值计算方法，并增加了部分近似计算内容，以加强数值计算能力的培养．

全书共十一章，分上、下两册．上册五章，内容包括、函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数应用，不定积分，定积分及其应用；下册六章，内容包括：空间解析几何，多元函数

微分学，多元函数积分学，无穷级数，微分方程，数值计算方法．每节后配有习题，每章后配有复习题，书末附有习题答案、初等数学常用公式、几种常用的曲线和积分表．讲完本书的基本内容约需 130～150 学时，少量注有“*”的内容可供不同专业选用．

本书还可作为成人高校有关专业的教材以及工程技术人员和具有高中水平的读者参考或自学．

本书由陈广桐、陈君华、隋畔熙主编，山东大学数学系许闻天副教授主审，张天德、宫献军、潘建勋、韩国平、王倩、刘华雯、李乐学、郑修才、宋君波、叶宏、杜世田、王玮、单沪军等参加了编写工作，在编写过程中，得到了山东工业大学校系领导和许多老师的关心和指导，承蒙张改荣、王自力、杨昌兰、秦静、王镇英、李莲英、张焕玲、张光明等分别审阅了部分初稿，在此谨表衷心的谢意．

限于水平与经验，不妥或谬误之处难免，恳请使用本书的同行和广大读者批评指正．

编　者

1993 年 2 月

目　　录

第六章　向量代数与空间解析几何

如同平面解析几何一样，空间解析几何是通过建立空间直角坐标系，把空间的点与三元有序数组对应起来，用三元方程及方程组来表示空间的几何图形，从而可以用代数的方法来研究空间几何问题．空间解析几何是学习多元函数微积分的基础．

§1　向量及其线性运算

一、向量的概念

通常所遇到的物理量有两种．一种是由数值大小决定的量，称为数量或标量，如温度、质量和功等；另一种是不仅有大小而且有方向的量，称为向量或矢量，如力、力矩、速度和加速度等．

向量可用有向线段来表示．有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．

向量有两种书写方法：一种是用一个粗体字母，如向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{v}$ 等，或用一个上面加箭头的字母，如向量 $\vec{a}$、$\vec{i}$、$\vec{v}$ 等；另一种是顺序写出向量的始点和终点，然后从始点到终点上面画一个箭头，如以 M_1 为始点，M_2 为终点的向量记为$\overrightarrow{M_1M_2}$．见图 6—1．

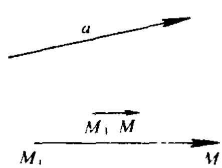

图 6—1

向量的大小叫向量的模，向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$、$|\overrightarrow{M_1M_2}|$；模等于 1 的向量叫做单位向量；模等于 0 的

向量叫做零向量，记为 **0**. 从几何上看，零向量就是始点和终点重合的向量，零向量的方向可以看作是任意的；与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

在实际问题中，常遇到与始点无关的向量，我们称这种向量为自由向量(以后简称向量). 在数学中仅研究自由向量.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 在同一直线上或在两条平行直线上，则称向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为平行向量，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行也称作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线. 可见平行向量的方向相同或相反.

如果两平行向量大小相等，且指向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 由此可见两相等向量经过平行移动后能完全重合. 也可以说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

由物理试验知，力、速度、位移等都可以合成，向量的加法就是从这些物理量的合成法则抽象出来的运算.

定义 1　将向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的始点放在一起，以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，则从始点到平行四边形对角顶点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 6—2).

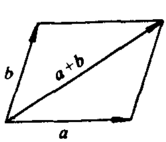

图 6—2

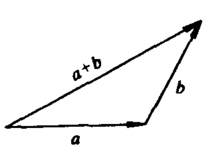

图 6—3

上述求向量和的方法称为平行四边形法则. 特别地，如果两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为平行向量，则规定其和为这样一个向量：当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 指向相同时，和向量的模等于两向量模之和，其方向与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的方向相同；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 指向相反时，和向量的模等于两向量模之差，其

方向与模较长的向量方向相同.

由以上规定易知

$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$;

$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$.

据向量相等的定义,两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 也可以这样得到:平移向量 $\boldsymbol{b}$,将 $\boldsymbol{b}$ 的始点移到 $\boldsymbol{a}$ 的终点上去,则从 $\boldsymbol{a}$ 的始点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 6—3). 这种求和的方法称为两向量相加的三角形法则.

三角形法则可以推广到求任意有限个向量的和. 比如求向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 之和时,只要相继作出 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$,使前一向量的终点为后一向量的始点,最后从 $\boldsymbol{a}$ 的始点向 $\boldsymbol{d}$ 的终点所引的向量就是向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$(图 6—4).

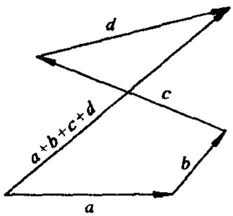

图 6—4

依定义 1,由图 6—5 及图 6—6 易知,向量的加法符合下列运算规律.

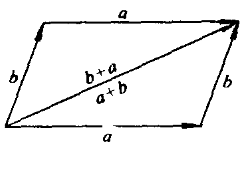

图 6—5

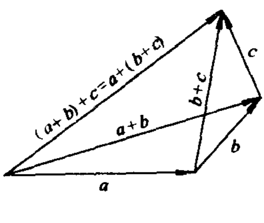

图 6—6

(1) 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

定义 2 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差规定为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$ 之和,即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

由三角形法则可推知，将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的始点放在一起，再从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点至向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点引一向量，即得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 6—7).

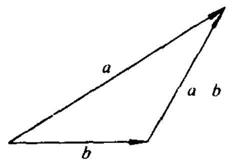

图 6—7

2. 向量与数的乘法

由向量加法知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 仍为一向量，它与 $\boldsymbol{a}$ 平行且同向，其模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 2 倍，可记 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}$，$2\boldsymbol{a}$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 和数 2 的“积”.

定义 3 向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积仍为一向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{a}\lambda$)，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量，即 $0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；当 $\lambda<0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

例如，当 $\lambda=1,-1$ 时有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\qquad(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

由向量与数乘积的定义知：两个非零向量平行的充要条件是：存在非零实数 λ，使

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}.$$

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$，则由向量与数的乘法定义知

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

这就是非零向量单位化的方法.

容易证明，向量与数的乘法满足下列运算规律(λ,μ 为实数)：

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

向量的加减法和向量与数的乘法统称为向量的线性运算.

例 1　已知不共线向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 及平行四边形 $ABCD$，并知其两邻边 $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=2\boldsymbol{b}$，求平行四边形 $ABCD$ 两对角线向量 $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$.

解　如图 6—8，由向量加法的平行四边形法则，得

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}.$$

又由向量减法法则，得

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}.$$

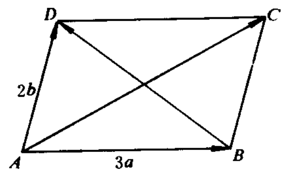

图 6—8

例 2　已知梯形 $OABC$，其中 CB 与 OA 平行且等于 OA 的一半，设 M 和 N 各为上底 CB 和下底 OA 的中点，如果 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，试求 $\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{MN}$.

解　如图 6—9.

由已知条件得

$\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，连接 O、B，得

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a},$$

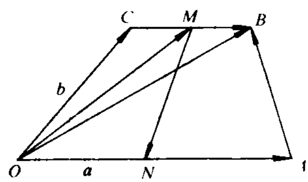

图 6—9

连接 O、M，则　$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$$=\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\left(\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{a}\right)=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

例 3　证明三角形两边中点的连线必平行于底边，且其长

等于底边的一半(图 6—10).

证 设 A、B、C 是三角形的三个顶点，D、E 分别是 AB、AC 的中点，并设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，于是

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.$$

又 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

从而
$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

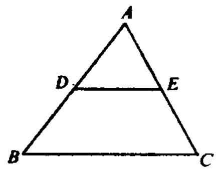

图 6—10

这就证明了 $DE \mathbin{/\mkern-6mu/} BC$，且 $|DE|=\frac{1}{2}|BC|$.

三、向量在轴上的投影

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，将它们的始点移至同一点 O，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则规定向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 之间不超过 π 的夹角 $\angle AOB=\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$（或 $(\boldsymbol{b}\hat{,}\boldsymbol{a})$），即 $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\varphi$.

类似地，可以规定向量与一轴的夹角或空间两轴的夹角.

下面定义空间一点与一向量在轴 u 上的投影. 设已知空间一点 A 及一轴 u，通过点 A 作轴 u 的垂直平面 α，则此平面 α 与轴 u 的交点 A' 称为点 A 在轴 u 上的投影(图 6—11(a))，设已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为 A' 与 B'(图 6—11(b))，则轴 u 上的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影，记作 $\mathbf{Prj}_u\overrightarrow{AB}$，即：

$$\mathbf{Prj}_u\overrightarrow{AB}=A'B'$$

其中 $A'B'$ 是一个数，其绝对值等于 $\overrightarrow{A'B'}$ 的长度，符号由 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向决定：如果 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向和轴的正向相同，就取正号；如果

$\overrightarrow{A'B'}$ 的方向和轴的正向相反，就取负号．

关于向量的投影，有如下两个定理．

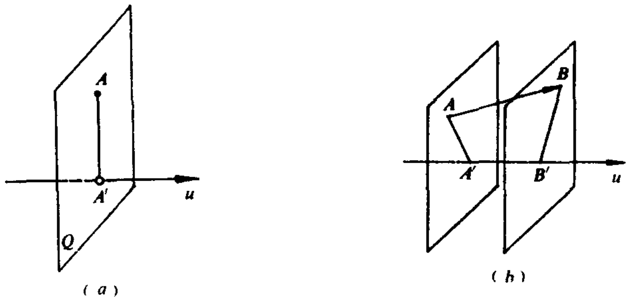

图 6—11

定理 1 向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的投影等于向量$\overrightarrow{AB}$的模乘以轴 u 与向量$\overrightarrow{AB}$ 间的夹角 θ 的余弦，即

$$\mathbf{Prj}_u\, \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{A'B'}|\cos\theta$$

证 如图 6—12，过点 A 作与轴 u 平行且具有相同正向的轴 u'，则轴 u' 与向量$\overrightarrow{AB}$ 间的夹角等于轴 u 与向量$\overrightarrow{AB}$ 间的夹角 θ.

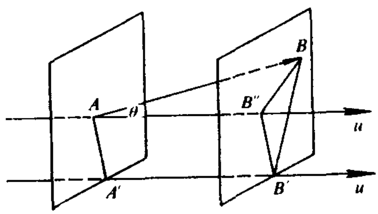

图 6—12

由于 $\mathbf{Prj}_u AB = \mathbf{Prj}_u AB$ ，

而 $\mathbf{Prj}_u AB = AB''$

$= |AB|\cos\theta$

所以 $\mathbf{Prj}_u AB = |AB|\cos\theta.$

由此可知，相等的向量在同一轴上的投影相等。

根据 $\cos\theta$ 的符号与 θ 的关系，易知：当一非零向量与其投影轴成锐角时，向量的投影为正；成钝角时，向量的投影为负；成直角时，向量的投影为零．

定理 2　两个向量的和在轴上的投影等于这两个向量在该轴上的投影之和，即

$$\mathbf{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \mathbf{Prj}_u\boldsymbol{a}_1 + \mathbf{Prj}_u\boldsymbol{a}_2$$

证　如图 6—13，设有两个向量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 及轴 u，

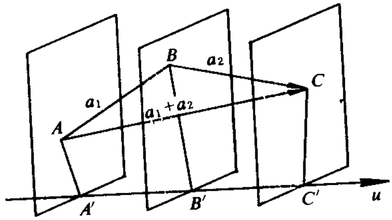

图 6—13

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\mathbf{Prj}_u\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{Prj}_u\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'},$$

$$\mathbf{Prj}_u\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{Prj}_u\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'},$$

$$\mathbf{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \mathbf{Prj}_u AC = A'C'.$$

由于　$A'B' + B'C' = A'C'$，

所以　$\mathbf{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = A'B' + B'C' = \mathbf{Prj}_u\boldsymbol{a}_1 + \mathbf{Prj}_u\boldsymbol{a}_2$.

该定理可以推广到有限个向量的情形，即

$$\mathbf{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n) = \mathbf{Prj}_u\boldsymbol{a}_1 + \mathbf{Prj}_u\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathbf{Prj}_u\boldsymbol{a}_n.$$

习题 6—1

1. 试解释下列不等式的几何意义：

(1)　$|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$；

(2)　$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \geqslant |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|$.

2. 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$，$M$ 为对角线交点，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$.

3. 化简下列各式：

(1) $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b})$；

(2) $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + 5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{a}}{5}\right)$.

4. 若已知向量 $\boldsymbol{a}$，且

(1) 垂直于轴 u；

(2) 在垂直于轴 u 的平面上；

(3) 与轴 u 平行．

试分别求出向量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 u 上的投影．

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 6，$\boldsymbol{a}$ 与轴 u 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{a}$ 在轴 u 上的投影．

§2　空间直角坐标系与向量的坐标

一、空间直角坐标系

空间直角坐标系的建立，完全类似于平面直角坐标系．过空间一定点 O，作三条互相垂直的数轴 Ox、Oy、Oz，它们都以 O 为原点，且一般具有相同的长度单位，这样就组成了一个空间直角坐标系 $Oxyz$. 这三条数轴分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴)，统称为坐标轴．

三条坐标轴的方向和次序，通常规定按右手法则排列，即右手握住 z 轴，以四指握拳方向表示由 x 轴正向按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角度到 y 轴正向，则大拇指所指的方向就是 z 轴的正向．这样的坐标系称为右手坐标系，本书都采用右手坐标系，如图 6—14 所示，点 O 称为坐标原点．

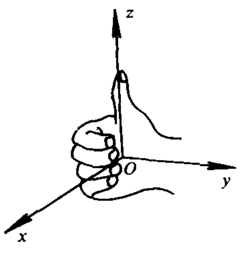

图 6—14

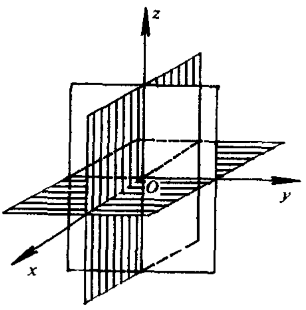

图 6—15

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，三条坐标轴 Ox、Oy 和 Oz 两两确定的平面称为坐标平面，且分别称为 xOy 面、yOz 面和 zOx 面．三个坐标面把整个空间分成 8 个部分，每一部分称为一个卦限（图 6—15）．在 xOy 面的上方，含 x 轴和 y 轴正向的那个卦限称为第 Ⅰ 卦限，其余的按逆时针方向，依次为第 Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 卦限．在 xOy 面的下方，与第 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 卦限依次相对应的是第 Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 卦限．

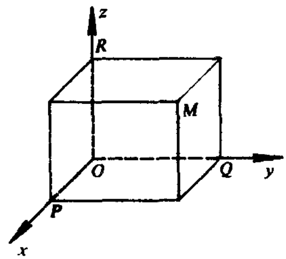

图 6—16

取定空间直角坐标系后，就可建立空间点与有序数组之间的一一对应关系．

取空间任一点 M，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，其交点分别为 P、Q、R，设该三点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别为 x、y、z，于是空间一点 M 就唯一地确定了一个三元有序数组 (x,y,z)；反过来，对于任意一个给定的三元有序数组 (x,y,z)，便可以唯一地确定空间一点 M（图 6—16）．这样就建立了空间点与三元有序数组之间的一一对应关系，有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标，x、y、z 依次称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标．

坐标轴与坐标面上的点，其坐标各有一定的特征，在 x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标分别为 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$；在 xOy、yOz、zOx 面上点的坐标分别为 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$，原点的坐标是 $(0,0,0)$．

空间每个卦限内点（不在坐标面上）的坐标的符号分别为

Ⅰ（＋，＋，＋）　　Ⅱ（－，＋，＋）

Ⅲ（－，－，＋）　　Ⅳ（＋，－，＋）